

面内载荷下双材料 界面裂纹力学分析

MIANNEI ZAIHAXIA SHUANGCAILIAO
JIEMIAN LIEWEN LIXUE FENXI

张雪霞 崔小朝 杨维阳 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

面内载荷下双材料 界面裂纹力学分析

张雪霞 崔小朝 杨维阳 著

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书重点介绍裂纹面内载荷作用下正交异性双材料界面裂纹尖端场问题。将双材料平面断裂问题化为偏微分方程组边值问题,采用复变函数方法,通过确定含待定实系数和实应力奇异指数的应力函数,得到了裂纹面内载荷作用下正交异性双材料板滑移型、张开型和混合型界面裂纹尖端应力场、位移场、应力强度因子的解析解。应力场有 $-1/2 + \varepsilon_m$ 的常规奇异性,无振荡奇异性,位移无相互嵌入现象,应力强度因子具有混合断裂特征。分析了应力与位移随两种材料杨氏模量比、剪切模量比和泊松比比值的变化规律,揭示材料参数对界面裂纹应力场和位移场的影响。本书大部分内容是作者多年来的科研成果。

本书可以作为应用数学专业和工程力学专业高年级本科生和研究生的选修课教材,也可供相关领域工作的教师、工程师和研究人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

面内载荷下双材料界面裂纹力学分析/张雪霞,崔小朝,杨维阳著. —北京:国防工业出版社,2012.9

ISBN 978-7-118-08419-1

I. ①面... II. ①张... ②崔... ③杨... III. ①裂纹分析 IV. ①TB302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 223246 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京市海淀区四季青印刷厂

新华书店经售

*

开本 880 × 1230 1/32 印张 6 1/8 字数 220 千字

2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 38.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

总 序

2012年,太原科技大学将迎来60周年华诞。值此六秩荣庆之际,我校的专家学者推出了这套学术丛书,以此献礼,共襄盛举。

60年前,伴随着新中国的成立,伟业初创,百废待兴,以民族工业为先锋的社会主义现代化建设蓬勃兴起,太原科技大学应运而生。60年来,几代科大人始终心系民族振兴大业,胸怀制造强国梦想,潜心教书育人,勇担科技难题,积极服务社会,为国家装备制造行业发展壮大和社会主义现代化建设做出了积极贡献。四万余名优秀学子从这里奔赴国民经济建设的各个战场,涌现出一大批杰出的科学家、优秀的工程师和知名的企业家。作为新中国独立建设的两所“重型机械”院校之一,今天的太原科技大学已发展成为一所以工业为主,“重大技术装备”领域主流学科特色鲜明,多学科协调发展的教学研究型大学,成为国家重型机械工业高层次人才培养和高水平科技研发的重要基地之一。

太原科技大学一直拥有浓郁的科研和学术氛围,众位同仁在教学科研岗位上辛勤耕耘,硕果累累。这套丛书的编撰出版,定能让广大读者、校友和在校求学深造的莘莘学子共享我校科技百花园散发的诱人芬芳。

愿太原科技大学在新的征途上继往开来、再创辉煌。

谨以为序。

太原科技大学校长 郭勇义

2012年6月

前 言

随着各类功能材料、复合材料的广泛应用,由不同材料组成的界面断裂问题成为材料学、力学领域研究的热点。界面裂纹尖端场的研究是界面断裂力学的重要课题之一,界面裂纹尖端场的确定为讨论材料参数对界面裂纹尖端场的影响及界面断裂准则的建立提供理论依据,具有重要的理论意义和广阔的应用前景。

全书共分五章。第一章给出了力学基础知识和复变函数知识。第二、三章探讨裂纹面内载荷作用下正交异性双材料界面裂纹模型,在双材料工程参数满足适当条件下,给出了实双材料弹性常数 ϵ_m 和实应力奇异指数 λ_m 的表达式,得到滑移型、张开型、混合型界面裂纹尖端附近的应力强度因子、应力场和位移场的解析表达式。第四章采用光弹贴片法测试了正交异性双材料中心穿透裂纹尖端区域的应力、应变场,比较了混合应力强度因子与理论应力强度因子,验证了理论公式的正确性。第五章分析了两种材料弹性模量比值对裂纹尖端场的影响及双材料中两种材料之间的干涉作用。

借此机会,感谢国家教育部科学技术研究重点项目(208022)、太原科技大学博士科研启动基金(059706)和太原科技大学对本书出版的大力支持。同时感谢常红、李俊林、赵文彬同志在本书成稿过程中给予的热心帮助。

限于作者的水平,书中若有错误和不妥之处,欢迎读者不吝指正。

目 录

第一章 力学基础与复变函数理论	1
1.1 裂纹的基本形式	1
1.2 力学基础	2
1.2.1 应力—应变关系	2
1.2.2 单层板弹性主方向的弹性特征	7
1.2.3 单层板非弹性主方向的弹性特征	10
1.3 正交异性复合材料板	15
1.3.1 正交异性复合材料板基本方程	15
1.3.2 正交异性复合材料板特征方程和特征根	16
1.4 复变函数理论	17
1.4.1 复数	17
1.4.2 复变函数	18
1.4.3 广义重调和方程	21
第二章 裂纹面内载荷作用下正交异性双材料滑移型 界面裂纹尖端场	24
2.1 滑移型界面裂纹力学模型	26
2.2 滑移型界面裂纹的应力函数	28
2.3 滑移型界面裂纹的应力奇异指数	32
2.4 滑移型界面裂纹的应力强度因子	39

2.5	滑移型界面裂纹尖端应力场和位移场	49
2.6	正交异性复合材料板 II 型裂纹尖端场	67
2.6.1	应力奇异指数	68
2.6.2	应力强度因子	70
2.6.3	裂纹尖端场	70
2.7	小结	72
第三章	裂纹面内载荷作用下正交异性双材料混合型	
	界面裂纹尖端场	73
3.1	混合型界面裂纹力学模型	73
3.2	混合型界面裂纹的应力函数	74
3.3	混合型界面裂纹的应力强度因子	81
3.4	混合型界面裂纹尖端应力场和位移场	87
3.5	裂纹面内载荷作用下正交异性双材料张开型	
	界面裂纹尖端场	113
3.6	正交异性复合材料板裂纹尖端场	129
3.7	小结	131
第四章	双材料界面裂纹光弹性实验分析	132
4.1	反射式偏光仪系统	133
4.2	光弹性贴片法基本原理	135
4.3	双材料平板的制备及力学性能测试	137
4.4	双材料界面裂纹光弹性实验研究	142
4.5	实验数据计算与分析	146
4.6	小结	150
第五章	两种材料参数对界面裂纹尖端场的影响分析	151
5.1	双材料参数对双材料工程参数和双材料应力	
	奇异指数的影响	151

5.2 两种材料参数对裂纹尖端场的影响 158

5.3 正交异性双材料界面裂纹尖端应力场和
位移场的角分布曲线 179

5.4 小结 183

参考文献 185

第一章 力学基础和复变函数理论

1.1 裂纹的基本形式

断裂力学中的裂纹分类有两种方式^[1],一种是按照裂纹在外力作用下的扩张方式分为三种情况,分别为张开型裂纹、滑移型裂纹和撕开型裂纹,即Ⅰ型裂纹、Ⅱ型裂纹和Ⅲ型裂纹,如图 1-1 所示;另一种是按照裂纹在构件中的位置,将裂纹分为穿透裂纹、表面裂纹和深埋裂纹,如图 1-2 所示。

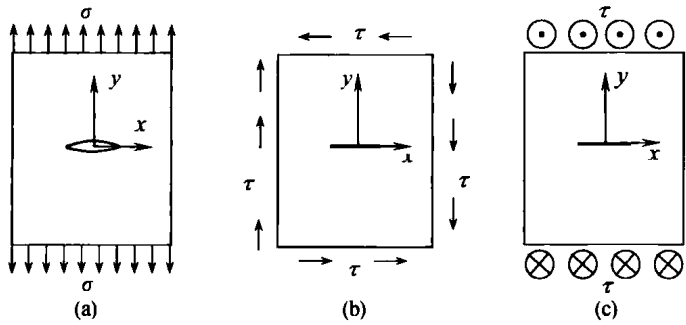


图 1-1 裂纹的力学特征分类
(a) 张开型; (b) 滑移型; (c) 撕开型。

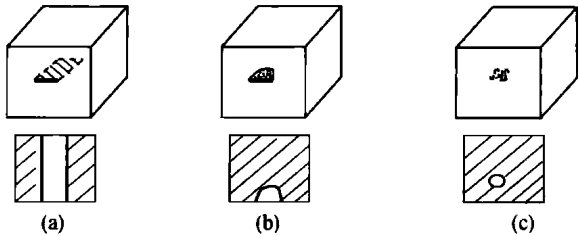


图 1-2 裂纹的几何特征分类
(a) 穿透裂纹; (b) 表面裂纹; (c) 深埋裂纹。

1.2 力学基础

1.2.1 应力—应变关系

纤维增强复合材料是由高强度、低密度的纤维材料与基体所组成的。从传统的力学观点来看,纤维增强复合材料可以认为是具有线弹性各向异性力学性能的单一材料。线弹性各向异性材料是指每一点的各个方向上的弹性性质不尽相同的材料。对于线弹性各向异性材料,应力与应变之间满足广义胡克定律:应力是应变的齐次线性函数,反之应变也是应力的齐次线性函数^[2,3],即

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_x\} = [Q]\{\varepsilon_x\} \quad (1.1)$$

式中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是正应力; $\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ 是剪应力,如图 1-3 所示; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 是线应变; $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 是剪应变; $\{\sigma_x\}$ 是应力列阵; $\{\varepsilon_x\}$ 是应变列阵; $[Q]$ 是刚度矩阵; Q_{ij} 是表征弹性特性的材料常数,称为刚度系数。

可以证明,刚度矩阵 $[Q]$ 是一个对称矩阵,即

$$Q_{ij} = Q_{ji} \quad (1.2)$$

因此对于各向异性材料而言, $[Q]$ 只有 21 个独立分量。

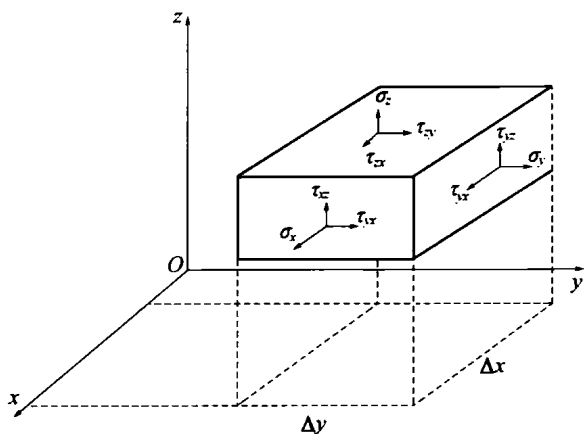


图 1-3 微元体与应力记号

表示式(1.1)可改写为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

即

$$\{\varepsilon_x\} = [S]\{\sigma_x\} \quad (1.3)$$

式中, $[S]$ 是柔度矩阵; S_{ij} 是另一类表征弹性特性的材料常数, 称为柔度系数。显然, 刚度矩阵和柔度矩阵是互逆的, 即

$$[S] = [Q]^{-1}, \quad [Q] = [S]^{-1} \quad (1.4)$$

并且柔度矩阵 $[S]$ 也是一个对称矩阵, 只有 21 个独立分量。

线弹性正交异性材料是指通过每一点都具有三个相互垂直的弹性对称平面的材料。因此, 由弹性对称可以证明

$$\begin{aligned} Q_{14} = Q_{15} = Q_{16} = Q_{24} = Q_{25} = Q_{26} = Q_{34} \\ = Q_{35} = Q_{36} = Q_{45} = Q_{46} = Q_{56} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

从而,应力—应变关系式(1.1)简化为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_x\} = [Q]\{\varepsilon_x\} \quad (1.6)$$

这时,刚度矩阵 $[Q]$ 中独立的刚度系数只有9个。类似地,应变—应力关系式(1.3)简化为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\varepsilon_x\} = [S]\{\sigma_x\} \quad (1.7)$$

独立的柔度系数也只有9个。对于正交异性体,由式(1.7)可知,正应力不引起剪应变,剪应力不引起线应变,反之亦然。

若用弹性常数:杨氏模量,泊松比和剪切模量代替应变—应力关系式(1.7)中的柔度矩阵 $[S]$,有

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

式中, E_1, E_2, E_3 是正交异性材料沿弹性主方向 x, y, z 的杨氏模量; ν_{12} 是 x 方向伸、缩时决定 y 方向缩、伸的泊松比, ν_{13} 是 x 方向伸、缩时决定 z 方向缩、伸的泊松比, 余类推; G_{23}, G_{31}, G_{12} 是决定 y 方向和 z 方向、 z 方向和 x 方向、 x 方向和 y 方向之间夹角变化的剪切模量。通常弹性主方向的弹性常数, 称为主弹性常数, 以区别任意坐标系中的弹性常数。

将式(1.7)和式(1.8)对照, 得到柔度系数与弹性常数关系

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{1}{E_1}, S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, S_{33} = \frac{1}{E_3} \\ S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, S_{55} = \frac{1}{G_{31}}, S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{cases} \quad (1.9)$$

由式(1.9), 得到

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}, E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31} \quad (1.10)$$

由式(1.4), 通过求逆矩阵, 推出刚度系数可用柔度系数表示为

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S}, Q_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S}, Q_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\ Q_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S}, Q_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}, Q_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \\ Q_{44} = \frac{1}{S_{44}}, Q_{55} = \frac{1}{S_{55}}, Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{cases} \quad (1.11)$$

式中

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} + 2S_{12}S_{23}S_{13} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 \quad (1.12)$$

将式(1.9)代入式(1.11)和式(1.12),得到刚度系数与弹性常数关系

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, Q_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}, Q_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} \\ Q_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} = Q_{21} \\ Q_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta} = \frac{\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21}}{E_2E_3\Delta} = Q_{31} \\ Q_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta} = \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{E_1E_3\Delta} = Q_{32} \\ Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{31}, Q_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (1.13)$$

式中, Δ 是用弹性常数表示的式(1.12)中的 S 值

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1E_2E_3} \end{aligned} \quad (1.14)$$

我们知道,应变能密度函数

$$W = \frac{1}{2} \{\sigma_x\}^T \{\varepsilon_x\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon_x\}^T \{\sigma_x\} \quad (1.15)$$

恒取正值。将式(1.6)和式(1.7)代入式(1.15),有

$$W = \frac{1}{2} \{\varepsilon_x\}^T [Q] \{\varepsilon_x\} = \frac{1}{2} \{\sigma_x\}^T [S] \{\sigma_x\} \quad (1.16)$$

因此刚度矩阵和柔度矩阵都是正定的,从而有

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1 E_2 E_3} > 0 \quad (1.17)$$

$$E_1 > 0, E_2 > 0, E_3 > 0 \quad (1.18)$$

$$G_{12} > 0, G_{23} > 0, G_{31} > 0 \quad (1.19)$$

$$1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, 1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0 \quad (1.20)$$

$$\begin{cases} |\nu_{12}| < \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2}, |\nu_{21}| < \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} \\ |\nu_{23}| < \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2}, |\nu_{32}| < \left(\frac{E_3}{E_2}\right)^{1/2} \\ |\nu_{31}| < \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2}, |\nu_{13}| < \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{1/2} \end{cases} \quad (1.21)$$

利用表示式(1.17)、式(1.10)和式(1.18),可推出表示式

$$\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} < \frac{1}{2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} \right) < \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

即三个泊松比的乘积小于0.5。

1.2.2 单层板弹性主方向的弹性特征

单层板是指单向纤维或编织纤维在基体中成扁平形式的层片。对于纤维增强复合材料单层板,在面内有两个弹性主方向:纤维方向(纵向)和垂直纤维方向(横向),垂直单层板的方向为法线方向(垂向)。如图1-4所示,选取坐标轴平行于单层板的弹性主方向,纵向 x 轴,横向 y 轴,垂向 z 轴,这样的坐标系 $oxyz$ 称为弹性主方向坐标系。

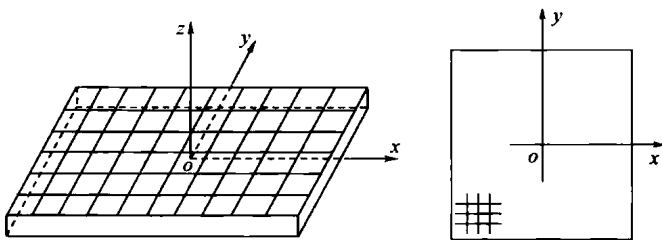


图 1-4 弹性主方向坐标系

客观上,单层板在弹性主方向坐标系中研究时属于正交异性体。进行力学分析时,假设单层板法线方向(z 轴)有关的应力分量与面内(xoy 面)的应力分量相比可以忽略不计,即

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (1.23)$$

于是,对单层板的力学分析简化为广义平面应力问题,即式(1.7)和式(1.8)简化为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

和

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

将面内部分分离出来,得到

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\varepsilon_x\} = [S] \{\sigma_x\} \quad (1.26)$$

和

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

式中, $[S]$ 是柔度矩阵。杨氏模量与泊松比满足麦克维尔关系式

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

由式(1.26)、式(1.27)和式(1.10)可知,单层板在弹性主方向坐标系中只有4个独立的柔度系数 $S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{66}$ 和弹性常数 E_1, E_2, ν_{12} 或 ν_{21}, G_{12} 。同时,有

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_y \quad (1.28)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.29)$$

由式(1.26),通过求逆矩阵,可以推出在平面应力状态下,单层板在弹性主方向的应力—应变关系如下:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或