ISSN 1001-6120

运筹学杂志

CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH

第 9 卷　第 2 期
Vol. 9　No. 2
1990

中国数学会运筹学会主编　上海科学技术出版社出版

运 筹 学 杂 志

第9卷 第2期

目 录

专题介绍：理论和方法

应 用 实 例

研 究 简 报

动 态 和 其 他

CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH

Vol. 9 No. 2

MAIN CONTENTS

Survey and Introduction

Research Letters

第9卷 第2期 运筹学杂志 Vol. 9 No. 2
1990年12月 CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH Dec., 1990

专题介绍：理论和方法

非线性最优化的抽象算法模型及非闭性收敛条件的研究(下)

韩继业
(中国科学院应用数学研究所)

本文叙述了具有单调性的最优化算法的若干重要的收敛性条件，包括这方面最近的新成果，并且证明了新的收敛性条件比文献中已有的条件要严格地弱；其次讨论了常见的可行点算法类的一致可行性收敛条件，证明了本文介绍的新的收敛性条件比一致可行性收敛条件要弱。

1. 单调最优化算法的全局收敛性

大多数具体的最优化算法是单调算法，即对应于迭代点列$\{x_i\}$的某一函数f(目标函数或特定的另一函数)的值$\{f(x_i)\}$是单调数列，所以文献中对于单调的抽象算法模型的全局收敛性研究很多. Zangwill 提出的第一个抽象算法和相应的收敛性条件就是关于单调算法的. 对于这类算法，函数值$\{f(x_i)\}$的单调性与算法的全局收敛性有密切关系. 一般而言，单调算法的收敛性条件比较简单些，见文献[1~6]，[8~15]. 在文献[12]中，Tishyadhigama, S., Polak, E. 和 Klessig, R. 对许多种收敛性条件的相互关系进行了研究，并指出他们的条件([12]中条件(3.3))为最弱. 本文中我们将介绍这些重要的收敛性条件，及最近的一些新的研究成果.

我们考虑如下的具有一般结构的单调算法模型. 令$E\subset R^n$为n维欧氏空间的一非空闭子集，$P\subset E$, P为解集. 令$F: E\to 2^E\setminus\{\varnothing\}$为点到集映象，$f: E\to R^1$为一实值函数. 借助于映象$F$定义抽象算法$(A_0)$：任取$x_0\in E$，对任意$i\geqslant 0$，取

$$x_{i+1}\in F(x_i),\quad 若 x_i\notin P;$$
$$x_{i+1}=x_i,\quad 若 x_i\in P.$$

此迭代算法总可产生一无穷点列$\{x_i, i\in N\}$，这里$N=\{0, 1, 2, \cdots\}$. 映象F满足

$$f(y)\leqslant f(x),\ \forall y\in F(x),\ x\in E \tag{1}$$

Zangwill 条件(CZ)[1]:

(i) f在E中为连续函数，

国家自然科学基金委员会资助项目。
1990年12月2日收到本文修改稿。

(ii) $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in P$,

(iii) $f(y)<f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in E\backslash P$,

(iv) F 在 $E\backslash P$ 中为闭映象,

(v) 对每一 $x\in E\backslash P$, 如 $z_i\to x$, $y_i\in F(z_i)$, 则 $\{y_i\}$ 为紧致。

Polyak 条件(CPY)[15]:

(i) F 在 $E\backslash P$ 中为下半连续,

(ii) F 在 E 中为单值映象,

(iii) $f(F(x))\leqslant f(x)$, $\forall x\in P$,

(iv) $f(F(x))<f(x)$, $\forall x\in E\backslash P$,

(v) $f(F(\cdot))$在 $E\backslash P$ 中为上半连续.

Polak 条件(CP)[3]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为下半连续(或在 E 中为有下界),

(ii) $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in P$,

(iii) (f, F)在 $E\backslash P$ 中为局部一致单调.

在上面的条件中 f 在 E 中为"局部下有界"是指: 对于 E 中任意点 x, 存在 x 的一邻域 $V(x)$ 和实数 b(b 依赖于 x, 本文中邻域 $V(x)$ 均指以 x 为心的开球与 E 之交), 使得 $f(y)\geqslant b$, $\forall y\in V(x)$. 另一概念(f, F)在 $E\backslash P$ 中为"局部一致单调"是指: 对于 $E\backslash P$ 中任意点 x, 存在数 $d(x)>0$ 和 x 的邻域 $V(x)$, 使得 $f(z)\leqslant f(y)-d(x)$, $\forall z\in F(y)$, $\forall y\in V(x)$.

R. Meyer 条件($CMR1$)[14]: 存在非负函数 $\delta: E\to R^+$, 满足

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为下半连续(或在 E 中为局部下有界),

(ii) $f(y)\leqslant f(x)-\delta(x)$, $\forall y\in F(x)$, $\forall x\in E$,

(iii) 对任意 $x\in E$, 如果 $\{z_i\}\to x$, $\delta(z_i)\to 0$, 则 $\delta(x)=0$,

(iv) $\{y\in E\mid\delta(y)=0\}\subset P$.

G. Meyer 条件($CMG1$)[5]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为局部下有界,

(ii) $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $\forall x\in P$,

(iii) (f, F)在 $E\backslash P$ 中为局部一致单调.

G. Meyer条件($CMG2$)[5]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为下半连续,

(ii) $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $\forall x\in P$,

(iii) 对于任意 $x\in E\backslash P$, 存在 x 的一邻域 $V(x)$, 满足

$$f(x'')<f(x),\ \forall x''\in F(x'),\ \forall x'\in V(x).$$

R. Meyer 条件($CMR2$)[14]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为局部下有界,

(ii) $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in P$,

(iii) 对于任意 $x\in E\backslash P$, 如果 $\{z_i\}$, $\{y_i\}\subset E$, $z_i\to x$, $y_i\in F(z_i)$, $f(z_i)\to f^*$, $f(y_i)\to\bar{f}$, 则 $\bar{f}<f^*$.

Tishyadhigama-Polak-Klessig 条件($CTPK1$)[12]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为下半连续,

(ii) $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in P$,

(iii) 对于任意 $x\in E\backslash P$, 存在 $\gamma(x)>0$, 使得

$$f(y)\leqslant f(x)-\gamma(x),\ \forall y\in F(x),$$

(iv) $f(F(\cdot))$在 $E\backslash P$ 中为超上半连续.

条件(iv)$f(F)$在 $E\backslash P$ 中"超上半连续"是指: 对于 $x\in E\backslash P$, 及对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $y\in F(x)$ 和 x 的一邻域 $V(x)$, 使得

$$f(x'')\leqslant f(y)+\varepsilon,\ \forall x''\in F(x'),\ \forall x'\in V(x).$$

Tishyadhigama-Polak-Klessig条件($CTPK2$) [12]:

存在非负函数 $\delta: E\to R^+$, 满足

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为局部下有界,

(ii) $f(y)\leqslant f(x)-\delta(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in E$,

(iii) 对于任意 $x\in E\backslash P$, 如果 $\{z_i\}\subset E$, $z_i\to x$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta(z_i)=+\infty$.

Tishyadhigama-Polak-Klessig 条件($CTPK3$) [12]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 中为局部下有界,

(ii) $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in P$,

(iii) 对于任意 $x\in E\backslash P$, 如果 $\{z_i\}\subset E$, $z_i\to x$, $f(z_i)\to f^*$, 则存在一自然数 n_0, 使得

$$f(y)<f^*,\ \forall y\in F(z_{n_0}).$$

对于单调算法(A_0)的全局收敛性, 以上条件都是充分条件. 为了说明这一点, 同时说明各条件间的关系, 我们先证明条件 $CTPK3$ 是(A_0)的全局收敛性条件, 再说明各条件均蕴含了 $CTPK3$.

定理1 如条件 $CTPK3$ 成立, 则算法(A_0)是全局收敛的, 即迭代点列 $\{x_i\}$ 的任意聚点 x^* 属于 P.

证 由条件 $CTPK3$ 的(iii), 对任意点 $x\in E\backslash P$, 取 $z_i=x$, $\forall i=0, 1, 2, \cdots$, 故 $\{z_i\}\to x$, $f(z_i)\to f^*=f(x)$, 可知存在 n_0, 使得 $f(y)<f(x)$, $\forall y\in F(z_{n_0})=F(x)$. 结合(ii), 有 $f(y)\leqslant f(x)$, $\forall y\in F(x)$, $x\in E$.

现令 $\{x_i\}$ 为抽象算法(A_0)产生的迭代点列, x^* 为 $\{x_i\}$ 的一聚点. 设 $x^*\in E\backslash P$, 令 $K\subset\{0, 1, 2, \cdots\}$ 表一子列, 使 $x_i\xrightarrow{K}x^*$. 由 $f(x_{i+1})\leqslant f(x_i)$, $\forall i$, 以及由(i), 存在实数 c^*, 使得 $f(x_i)\to c^*$, 且

$$f(x_i)\geqslant c^*,\ \forall i=0, 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

另一方面由(iii), 取 $z_i=x_i$, $\forall i$, $x=x^*$, 可知必存在一自然数 n_0, 使得 $f(x_{n_0+1})<c^*$, 这与(2)式相矛盾, 故证聚点 $x^*\in P$.

定理2 条件 $CMR2$ 蕴含了条件 $CTPK3$.

证 这两组条件的(i)和(ii)都相同, 我们只要证由条件 $CMR2$ 成立可推出条件 $CTPK3$之(iii). 由条件 $CMR2$ 之(ii)和(iii), 可知

$$f(y)\leqslant f(x),\ \forall y\in F(x),\ x\in E.$$

令 $x\in E\backslash P$, $\{z_i\}\subset E$, $z_i\to x$, $f(z_i)\to f^*$. 设条件 $CTPK3$ 之(iii)不成立, 则对于任意 $i\geqslant 0$,

存在 $y_i\in F(z_i)$，使得 $f(y_i)\geqslant f^*$，$\forall i=0, 1, \cdots$. 故有

$$f(z_i)\geqslant f(y_i)\geqslant f^*,\ i=0, 1, 2, \cdots.$$

上式表明 $f(y_i)\to f^*$，这与条件 $CMR2$ 的(iii)相矛盾，故证明条件 $CTPK3$ 之(iii)成立.

定理 3 (a)条件 $CMG2$ 蕴含了条件 $CTPK3$.

(b) 若函数 f 为连续函数，则条件 $CTPK3$ 蕴含了条件 $CMG2$.

证 (a) 设条件 $CMG2$ 成立. 显然由 f 在任意点 $x\in E\backslash P$ 为下半连续可推出 f 在 x 为局部下有界. 又，条件 $CTPK3$ 之(ii)与条件 $CMG2$ 之(ii)相同. 令 $x\in E\backslash P$, $\{z_i\}\subset E$, $z_i\to x$ 且 $f(z_i)\to f^*$，由 f 在 x 为下半连续，可知

$$f(x)\leqslant\liminf_{i\to\infty} f(z_i)=f^*. \tag{3}$$

由条件 $CMG2$ 之(iii)，存在 x 的一邻域 $V(x)$ 及自然数 n_0，使得 $z_{n_0}\in V(x)$，故有

$$f(y)<f(x),\ \forall y\in F(z_{n_0}). \tag{4}$$

结合(3)和(4)，$f(y)<f^*$，$\forall y\in F(z_{n_0})$，即条件 $CTPK3$ 之(iii)成立.

(b) 设 f 为连续函数且条件 $CTPK3$ 成立. 显然有条件 $CMG2$ 之(i)和(ii). 令 $x\in E\backslash P$，取 x 的一列球状邻域 U_k，$U_k=\left\{y\,\middle|\,\|y-x\|<\dfrac{1}{k}\right\}\cap E$. 设 $CMG2$ 之(iii)不成立，则对每一 U_k，存在 $z_k\in U_k$，$y_k\in F(z_k)$，使得

$$f(y_k)\geqslant f(x),\ k=1, 2, \cdots. \tag{5}$$

由 $z_k\to x$，$\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=f(x)$，根据条件 $CTPK3$ 之(iii)，可知存在自然数 n_0，使得

$$f(y)<f(x),\ \forall y\in F(z_{n_0}). \tag{6}$$

(6)式与(5)式相矛盾，故证条件 $CMG2$ 之(iii)成立.

定理 4 条件 CZ 蕴含了条件 $CTPK1$.

证 由条件 CZ 之(i)显然可推出条件 $CTPK1$ 之(i). 条件 CZ 之(ii)与条件 $CTPK1$ 之(ii)相同. 对于任一 $x\in E\backslash P$，令 $\{\xi_i\}\subset F(x)$，使得 $f(\xi_i)\to\sup\{f(y)\,|\,y\in F(x)\}$. 由 CZ 之(v)，可知 $\{\xi_i\}$ 为紧致集，故存在子列 $\{\xi_i, i\in K\}$，使得 $\xi_i\xrightarrow{K}\xi^*$. 由 CZ 之(iv)，$\xi^*\in F(x)$. 故得

$$\lim_{i\in K} f(\xi_i)=f(\xi^*)=\sup\{f(y)\,|\,y\in F(x)\}. \tag{7}$$

再由 CZ 之(iii)，可得

$$f(y)\leqslant f(\xi^*)<f(x),\ \forall y\in F(x). \tag{8}$$

令 $\gamma(x)=f(x)-f(\xi^*)>0$，则有 $f(y)\leqslant f(x)-\gamma(x)$，$\forall y\in F(x)$. 此即 $CTPK1$ 之(iii).

假设 $CTPK1$ 之(iv)不成立，则存在 $x\in E\backslash P$ 及某正数 ε，以及一列邻域 $\{V_i(x)\}$，$x_i'\in V_i(x)$，$x_i''\in F(x_i')$，$x_i'\to x$，使得

$$f(x_i'')>f(\xi^*)+\varepsilon,\ i=1, 2, \cdots, \tag{9}$$

这里的 ξ^* 满足 $f(\xi^*)=\max\{f(y)\,|\,y\in F(x)\}$. 由 CZ 之(iv)和(v)，存在子列 $\{x_i'', i\in K_1\}$，使得 $x_i''\xrightarrow{K_1}x^*\in F(x)$. 故由(9)可得 $f(x^*)\geqslant f(\xi^*)+\varepsilon\geqslant f(x^*)+\varepsilon$，产生矛盾. 即证 $CTPK1$ 之(iv)成立.

定理 5 (a)条件 $CTPK1$ 蕴含条件 $CMG2$.

(b) 条件 $CTPK1$ 蕴含条件 CP.

证 (a)条件 $CTPK1$ 之(i), (ii)等同于条件 $CMG2$ 之(i), (ii). 对于任意 $x\in E\backslash P$, 由 $CTPK1$ 之(iii), 存在正数 $\gamma(x)$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\gamma(x)$, 再由 $CTPK1$ 之(iv), 存在 y 和 x 的邻域 $V(x)$, 使得

$$f(x'')\leqslant f(y)+\frac{1}{2}\gamma(x)\leqslant f(x)-\gamma(x)+\frac{1}{2}\gamma(x)<f(x),$$
$$\forall x''\in F(x'),\ \forall x'\in V(x).$$

即证 $CMG2$ 之(iii)成立.

(b) 条件 CP 之(i), (ii)等同于 $CTPK1$ 之(i), (ii). 对任意 $x\in E\backslash P$, 由 $CTPK1$ 之(iii), 存在正数 $\gamma(x)$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{3}\gamma(x)$, 由 $CTPK1$ 之(iv)可知存在邻域 $V(x)$ 和 $\bar{x}\in F(x)$, 使得

$$f(x'')\leqslant f(\bar{x})+\frac{1}{3}\gamma(x)\leqslant f(x)-\gamma(x)+\frac{1}{3}\gamma(x)=f(x)-\frac{2}{3}\gamma(x),$$
$$\forall x''\in F(x'),\ x'\in V(x). \tag{10}$$

因 f 为下半连续, 所以存在 x 的一邻域 V', $V'\subset V(x)$, 使得

$$f(x)-\frac{1}{3}\gamma(x)\leqslant f(x'),\ \forall x'\in V'. \tag{11}$$

结合(10)和(11), 可得 $f(x'')\leqslant f(x')-\frac{1}{3}\gamma(x)$, $\forall x''\in F(x')$, $x'\in V'$. 即证 CP 之(iii).

定理 6 (a)条件 $CMR1$ 蕴含了条件 CP.

(b) 当 P 为闭集时条件 CP 蕴含了 $CMR1$.

证 (a)条件 $CMR1$ 之(i)和(ii)显然蕴含了条件 CP 之(i)和(ii). 对于 $x\in E\backslash P$, 由 $CMR1$ 之(iv)可知函数值 $\delta(x)>0$. 令 $\{V_i\}$ 为 x 的一列邻域, V_i 的直径趋于零. 现设 CP 之(iii)对 x 不成立, 则对于任意正数 d 和 V_i, 存在 $y\in V_i$, $z\in F(y)$, 使得 $f(z)>f(y)-d$. 所以存在 $\{d_i\}$, $\{y_i\}$和$\{z_i\}$, $d_i\downarrow 0$, $y_i\to x$, $z_i\in F(y_i)$, 使得 $f(z_i)>f(y_i)-d_i$, $i=1, 2, \cdots$. 结合 $CMR1$ 之(ii), 可得 $f(y_i)-d_i<f(z_i)\leqslant f(y_i)-\delta(y_i)$, $i=1, 2, \cdots$, 由此可得 $\delta(y_i)\to 0$. 再由 $CMR1$ 之(iii)可知 $\delta(x)=0$. 这与 $x\in E\backslash P$ 和 $CMR1$ 之(iv)相矛盾, 即证 CP 之(iii)成立.

(b) 条件 CP 之(i)与条件 $CMR1$ 之(i)相同. 定义函数 $\delta: E\to R^+$ 如下:

$$\delta(x)=\begin{cases}\inf\{f(x)-f(y)\,|\,y\in F(x)\}, & \text{如 } x\in E\backslash P,\\ 0, & \text{如 } x\in P.\end{cases}$$

由 CP 之(ii)和(iii)可知 $\delta(x)\geqslant 0$, $\forall x\in E$, 而且显然有 $CMR1$ 之(ii). 对于任意 $x\in E\backslash P$, 由 CP 之(iii), 存在一正数 d 以及一邻域 $V(x)$, 使得

$$\delta(y)=\inf\{f(y)-f(z)\,|\,z\in F(y)\}\geqslant d>0,\ \forall y\in V(x)\backslash P. \tag{12}$$

因为 P 为闭集, 利用(12), 可知 x 存在一邻域 $V'\subset E\backslash P$, 使得 $\delta(y)\geqslant d>0$, $\forall y\in V'$. 故对于点 $\bar{x}\in E$, 如果存在 $\{z_i\}\to\bar{x}$, $z_i\in E$, $\delta(z_i)\to 0$, 则显然 $\bar{x}$ 必不属于 $E\backslash P$, 所以 $\delta(\bar{x})=0$. $CMR1$ 之(iii)成立. 根据(12), 可知 $P=\{y\in E\,|\,\delta(y)=0\}$. 即 $CMR1$ 之(iv)成立.

定理 7 (a) 条件 $CMG1$ 蕴含条件 $CMR2$.

(b) 当 f 为局部有界时条件 $CMR2$ 蕴含条件 $CMG1$.

证 (a) 条件 $CMG1$ 之(i)和(ii)等同于条件 $CMR2$ 之(i)和(ii). 设 $CMG1$ 成立,考虑 $x\in E\backslash P$, 存在正数 $d(x)$ 和邻域 $V(x)$, 使得 $f(z)\leqslant f(y)-d(x)$, $\forall z\in F(y)$, $y\in V(x)$. 如果 $\{z_i\}$, $\{y_i\}\subset E$, $z_i\to x$, $y_i\in F(z_i)$, $f(z_i)\to f^*$, $f(y_i)\to \bar{f}$, 则存在自然数 n_0, 使得 $f(y_i)\leqslant f(z_i)-d(x)$, $\forall i\geqslant n_0$. 故有 $\bar{f}\leqslant f^*-d(x)<f^*$. 此即 $CMR2$ 之(iii).

(b) 只需证当 $CMR2$ 成立且 f 为局部有界时条件 $CMG1$ 之(iii)成立. 对于 $x\in E\backslash P$, 设 $CMG1$ 之(iii)在 x 不成立,则存在一列邻域 V_i, $x_i\in V_i$, $x_i\to x$, 且存在 $\{d_i\}$, $\{y_i\}$, $d_i>0$, $d_i\to 0$, $y_i\in F(x_i)$, 使得

$$f(x_i)\geqslant f(y_i)>f(x_i)-d_i,\ i=1,2,\cdots. \tag{13}$$

因为 f 在 x 为局部有界,故存在 $b\geqslant 0$, 使得

$$|f(x_i)|\leqslant b,\ i=1,2,\cdots.$$

取 $f(x_i)$ 的一个收敛子列 $f(x_i)\xrightarrow{K} f^*$, 可得

$$\lim_K f(y_i)=\lim_K f(x_i)=f^*.$$

上式与 $CMR2$ 之(iii)相矛盾,故证明了 $CMG1$ 之(iii)成立.

定理 8 (a) 当 P 为闭集时 $CMG1$ 蕴含了 $CTPK2$.

(b) 条件 $CTPK2$ 蕴含了 $CMG1$.

证 (a) 条件 $CMG1$ 的(i)与条件 $CTPK2$ 之(i)相同. 由 $CMG1$ 之(iii), 对任意 $x\in E\backslash P$, 存在邻域 $V(x)$ 和正数 $d(x)$, 使得 $f(z)\leqslant f(y)-d(x)$, $\forall y\in V(x)$, $\forall z\in F(y)$. 定义

$$\delta(x)=\inf\{f(x)-f(x')\,|\,x'\in F(x)\},\ \forall x\in E. \tag{14}$$

若 $x\in P$, 由 $CMG1$ 之(ii)及(14), 可知 $\delta(x)\geqslant 0$, 且

$$f(y)\leqslant f(x)-\delta(x),\ \forall y\in F(x).$$

若 $x\in E\backslash P$, 由 $CMG1$ 之(iii)及(14), 可知 $\delta(x)\geqslant d(x)>0$, 且

$$f(y)\leqslant f(x)-\delta(x),\ \forall y\in F(x).$$

即有 $CTPK2$ 之(ii). 对任意 $x\in E\backslash P$, 因 P 为闭集, 利用定理 6(b)中的论证, 可知 x 存在一邻域 $V'\subset E\backslash P$, 使得 $\delta(y)\geqslant d>0$, $\forall y\in V'$. 故若 $\{z_i\}\subset E$, $z_i\to x$, 则存在 n_0, 使 $\delta(z_i)\geqslant d$, $\forall i\geqslant n_0$, 可得 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\delta(z_i)=+\infty$. 即证 $CTPK2$ 之(iii).

(b) 由 $CTPK2$ 成立, 显然 $CMG1$ 之(i)和(ii)成立. 对于任意点 $x\in E\backslash P$, 假设 $CMG1$ 之(iii)在 x 不成立,则存在 $\{x_i\}\subset E$, $x_i\to x$, 以及 $\{d_i\}$, $d_i\to 0$, 使得

$$f(y_i)>f(x_i)-d_i,\ y_i\in F(x_i),\ \forall i=1,2,\cdots. \tag{15}$$

由 $CTPK2$ 之(ii), 可得 $f(y_i)\leqslant f(x_i)-\delta(x_i)$. 结合(15), 可知 $\delta(x_i)\to 0$, $i\to+\infty$. 定义自然数子列 $\{n(0),n(1),n(2),\cdots\}$ 如下:

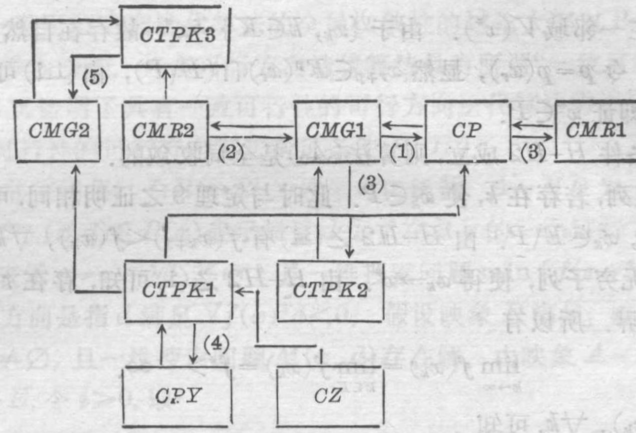
$$n(i)=\min\left\{j\,|\,j\geqslant i+1,\ \delta(x_j)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^i\right\}. \tag{16}$$

再令 $z_0=x_0$, $z_1=x_{n(0)}$, $z_2=x_{n(1)}$, $\cdots$, 显然 $z_i\to x$. 由(16),

$$\sum_{i=0}^{\infty}\delta(z_i)\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=2.$$

这与 $CTPK2$ 之(iii)相矛盾，即证 $CMG1$ 之(iii)成立.

各条件之间除去已经证明的蕴含关系外，其他的蕴含关系比较明显. 我们将这些关系用图表方式来表示. 若条件 A 蕴含了条件 B，则表为 $A\to B$，附加的条件(如 P 为闭集等)在箭身边标明. 这些收敛性条件中 $CTPK3$ 是最弱的.



(1) f 为下半连续，

(2) f 为局部有界，

(3) P 为闭集，

(4) F 为单值映象，

(5) f 为连续.

我们进一步介绍关于单调抽象算法的全局收敛性的最近成果. 这主要是以下两组收敛性条件.

H-$H1$ 条件[17]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 为下半连续，

(ii) $f(y)<f(x)$, $\forall y\in(E\backslash P)\cap F(x)$, $x\in E\backslash P$,

(iii) 对任意 $x\in E\backslash P$，存在一邻域 $V(x)$，对任意 $x'\in V(x)\cap(E\backslash P)$，有 $f(x'')\leqslant f(x)$，$\forall x''\in F^p(x')\cap(E\backslash P)$. 这里 p 为依赖于 x' 的自然数，F^p 表示 p 重映象.

H-$H2$ 条件[17]:

(i) f 在 $E\backslash P$ 为局部下有界，

(ii) $f(y)<f(x)$, $\forall y\in(E\backslash P)\cap F(x)$, $x\in E\backslash P$,

(iii) 对任意 $x\in E\backslash P$，若 $\{z_i\}\subset E\backslash P$, $z_i\to x$, $f(z_i)\to f^*$，则存在自然数 n_0，使得 $f^*\geqslant f(z)$，$\forall z\in F^p(z_{n_0})\cap(E\backslash P)$. 这里 p 为依赖于 z_{n_0} 的一自然数.

我们首先证明这两组条件都是全局收敛性条件，其次讨论它们和 $CTPK3$ 之间的关系.

定理 9 如条件 H-$H1$ 成立，则算法(A_0)是全局收敛的.

证 令 $\{x_k, k=1, 2, \cdots\}$ 为算法(A_0) 产生的迭代点列，x^* 为 $\{x_k\}$之一聚点. 若存在

$\bar{k}$, 使 $x_{\bar{k}}\in P$. 根据算法(A_0)的定义, $x_k=x_{\bar{k}}$, $\forall k\geqslant\bar{k}$. 故 $x^*=x_{\bar{k}}$. 即 $x^*\in P$.

若对于所有 k, $x_k\in E\backslash P$. 由(ii)有 $f(x_{k+1})<f(x_k)$, $\forall k$. 假设 $x^*\in E\backslash P$. 令 $K\subset\{1, 2, \cdots\}$ 为一无穷子列, 使得 $x_k\to x^*$. 因 f 在 x^* 为下半连续, 所以

$$\lim_{k\in K} f(x_k)=\liminf_{k\in K} f(x_k)\geqslant f(x^*).$$

再由(ii)有

$$f(x^*)<f(x_k),\ \forall k=1, 2, \cdots. \tag{17}$$

由(iii)可知, 存在一邻域 $V(x^*)$. 由于 $\{x_k, k\in K\}\to x^*$, 故存在自然数 $r\in K$, 使得 $x_r\in V(x^*)\cap(E\backslash P)$. 令 $p=p(x_r)$, 显然 $x_{r+p}\in F^p(x_r)\cap(E\backslash P)$, 由(iii)可知 $f(x_{r+p})\leqslant f(x^*)$. 这与(17)相矛盾, 即证 $x^*\in P$.

定理 10 如条件 H-$H2$ 成立, 则算法(A_0)是全局收敛的.

证 对迭代点列, 若存在 $\bar{k}$, 使 $x_{\bar{k}}\in P$. 此时与定理 9 之证明相同, 可得 $x^*\in P$.

若对于所有 k, $x_k\in E\backslash P$. 由 H-$H2$ 之(ii)有 $f(x_{k+1})<f(x_k)$, $\forall k$. 设 $x^*\in E\backslash P$, 令 $K\subset\{1, 2, \cdots\}$为无穷子列, 使得 $x_k\to x^*$. 由 H-$H2$ 之(i)可知, 存在 $r\in K$, 使得 $\forall k\geqslant r$, $k\in K$, $f(x_k)$有下界. 所以有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\lim_{k\in K} f(x_k)=f^*>-\infty.$$

由于 $f(x_{k+1})<f(x_k)$, $\forall k$, 可知

$$f(x_k)>f(x_{k+1})>f(x_{k+i}),\ \forall i>1,\ \forall k,$$

令 $i\to\infty$, 可得

$$f(x_k)>f^*,\ \forall k. \tag{18}$$

由 H-$H2$ 之(iii), 取 $z_i=x_i$, $\forall i\in K$, 则 $z_i\to x^*$, $f(z_i)\to f^*$, 因而存在自然数 $n_0\in K$, 使得 $f^*\geqslant f(z)$, $\forall z\in F^p(z_{n_0})\cap(E\backslash P)$, 这里 $p=p(z_{n_0})$. 因为 $x_{n_0+p}\in F^p(z_{n_0})\cap(E\backslash P)$, 故有 $f^*\geqslant f(x_{n_0+p})$. 这与(18)式相矛盾, 即证 $x^*\in P$.

现在我们讨论条件 H-$H1$ 与条件 H-$H2$ 的关系, 以及 H-$H1$, H-$H2$ 与上面介绍的已有的收敛性条件的关系. 首先类似于定理 3 的证明, 我们有

定理 11 (a)条件 H-$H1$ 蕴含了条件 H-$H2$.

(b) 若函数 f 为连续函数, 则条件 H-$H2$ 蕴含了条件 H-$H1$.

定理 12 (a)条件 $CTPK3$ 蕴含了条件 H-$H2$.

(b) 条件 $CMG2$ 蕴含了条件 H-$H1$.

证 (a) $CTPK3$ 之(i)等同于 H-$H2$ 之(i). $CTPK3$ 之(iii)显然蕴含了 H-$H2$ 之(iii). 再由 $CTPK3$ 之(iii), 取 $z_i=x$, 则 $f(z_i)\to f(x)$, 故可得 $f(y)<f(x)$, $\forall y\in F(z_{n_0})=F(x)$, $x\in E\backslash P$. 由此可知 H-$H2$ 之(ii)成立.

(b) 证明与(a)相同.

H-$H1$, H-$H2$ 与已有的条件的关系可表示如下:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{CTPK3} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "f\text{连续}"] & \boxed{H\text{-}H2} \arrow[d, "f\text{连续}"] \\
\boxed{CMG2} \arrow[r] \arrow[u, shift left] & \boxed{H\text{-}H1}
\end{tikzcd}$$

综合本节的讨论，我们可得出如下结论：条件 $H-H2$ 是目前关于单调最优化算法的最好的全局收敛性条件；在函数 f 为连续函数时，$H-H1$ 与 $H-H2$ 等价，它们同是单调最优化算法的最好的全局收敛性条件．

2. 可行点算法类的全局收敛性

文献中常见的一些可行方向迭代算法的全局收敛性的讨论大都以 Bazaraa和Shetty[11] 给出的定理 10.2.6 做为基础．许多可行方向迭代算法具有所谓"一致可行性"．Bazaraa 和 Shetty 的定理10.2.6证明了具有一致可行性的可行方向迭代算法有全局收敛性．下面我们将证明具有一致可行性的可行方向算法满足条件 $H-H2$．

设 $E\subset R^n$ 为一非空闭集，$f: R^n\to R^1$ 为连续可微函数，$A=MD$ 为一复合映象，满足：对 $x\in E$, $D(x)\subset R^{2n}$, $(x,d)\in D(x)$ 表示矢量 d 为 f 在点 x 的一个可行下降方向；$M(x, d)\subset R^n$, $y\in M(x, d)$ 表示 $y=x+\bar{\lambda}d$, 其中 $\bar{\lambda}$ 是一维搜索问题 $\min\{f(x+\lambda d)\,|\,\lambda>0,\ x+\lambda d\in E\}$ 的解．这里下降方向是指 d 满足 $\nabla f(x)^T d<0$. 假设映象 D 满足：如 f 在 x 点存在可行下降方向，则 $D(x)\neq\varnothing$，且一维搜索问题 $M(x, d)$ 存在解．由映象 $A=MD$ 可以定义一迭代算法如下：取 $x_0\in E$, 令 $i\geqslant 0$, 取

$$\begin{cases}(x_i,\ d_i)\in D(x_i),\ x_{i+1}\in M(x_i,\ d_i), & \text{如 } D(x_i)\neq\varnothing;\\ x_{i+1}=x_i & \text{其他}.\end{cases}$$

此算法产生一无穷点列$\{x_i\}$, 和相应的下降方向序列$\{d_i\}$. 若任意点列$\{z_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots\}$, 相应的$\{d_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots\}$, $(z_i,\ d_i)\in D(z_i)$, 存在一正数 δ, 使得

$$z_i+\lambda d_i\in E,\ \forall i=1,\ 2,\ \cdots,\ \forall\lambda\in[0,\ \delta]. \tag{19}$$

我们称 $\{z_i\}$ 和 $\{d_i\}$ 具有"一致可行性"．令 $P=\{x\,|\,x$ 的任一可行方向 d 均有 $\nabla f(x)^T d\geqslant 0\}$. 我们有

定理 13 若(a) f 为连续可微函数，

(b) 对 $\forall x\in E\backslash P$, $D(x)=\{(x,\ d)\}$ 为单值映象，且 $M(D(x))\neq\varnothing$,

(c) 对 $\forall x\in E\backslash P$, 若 $\{z_i\}\to x$, $D(z_i)=\{(z_i,\ d_i)\}$, $D(x)=\{(x,\ d)\}$, 则 $\{d_i\}\to d$, $\{z_i\}$, $\{d_i\}$ 有一致可行性．

则条件 $H-H2$ 成立．

证 由(a)和(b)易知 $H-H2$ 之 (i) 和 (ii) 成立．对 $\forall x\in E\backslash P$, 若 $\{z_i\}\to x$, $D(x)=\{(x,\ d)\}$, $D(z_i)=\{(z_i,\ d_i)\}$, 可知 $\nabla f(x)^T d<0$, 且存在 $\delta>0$, 使得

$$z_i+\lambda d_i\in E,\ \forall i,\ \forall\lambda\in[0,\ \delta]. \tag{20}$$

令 $\nabla f(x)^T d=-2\varepsilon<0$, 则存在充分小的正数 $\bar{\delta}$ 及 k_0, 使得 $\nabla f(z_i+\lambda d_i)^T d_i<-\varepsilon$, $\forall i\geqslant k_0$, $\forall\lambda\in[0,\ \bar{\delta}]$. 取 $\delta'=\min\{\delta,\ \bar{\delta}\}$, 则由(20), 对 $\forall z\in MD(z_i)$ 有

$$\begin{aligned}f(z)&\leqslant f(z_i+\delta' d_i)=f(z_i)+\delta'\nabla f(z_i+\theta_i\delta' d_i)^T d_i\\&\leqslant f(z_i)-\delta'\varepsilon,\ \forall i\geqslant k_0,\end{aligned} \tag{21}$$

因 $\lim_i f(z_i)=f(x)$, 存在一自然数 $k_1\geqslant k_0$, 使得 $f(z_i)\leqslant f(x)+\frac{1}{2}\delta'\varepsilon$, $\forall i\geqslant k_1$. 结合(21), 可得

$$f(z)\leqslant f(x)-\frac{1}{2}\delta' s<f(x),\ \forall z\in MD(z_{k_1}).$$

这证明了 H-$H2$ 之(iii)在 $p=1$ 时成立.

参 考 文 献

[1] Zangwill, W. I., Convergence conditions for nonlinear programming algorithms, Management Science, 16(1)(1969), 1~13.

[2] Polak, E., On the convergence of optimization algorithms, Revue Francaise d'Antomatique, Informatique et Recherche Operationnelle, 16(R1)(1969), 17~34.

[3] Polak, E., On the implementation of conceptual algorithms, in Nonlinear Programming, O. L. Mangasarian, K. Ritter and J. B. Rosen, eds., (Academic Press, New York, 1970), 275~291.

[4] Meyer, G. G. L., A systematic approach to the synthesis of algorithms, Numerische Mathematik, 24 (1975), 277~289.

[5] Meyer, G. G. L., Convergence conditions for a type of algorithm model, SIAM J. on Contr. and Opti., 15(1977), 779~784.

[6] Huard, P., Optimization algorithms and point-to-set maps, Math. Prog., 8(1975), 308~331.

[7] Huard, P., Extensions of Zangwill's theorem, Math. Prog. study, 10(1979), 98~103.

[8] Denel, J., Extensions of the continuity of point-to-set maps: applications to fixed point algorithms, Math. Prog. Study, 10(1979), 48~68.

[9] Yue, M. Y., On a ρ-increasing family of point-to-set maps, Chin. Ann. of Math., 3: 4(1982), 403~414.

[10] Chen, G. J., Families of point-to-set maps and optimization algorithms, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 9: 2(1986), 165~177.

[11] Bazaraa, M. S., and Shetty, C. M., Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, (John Wiley & Sons), 1979.

[12] Tishyadhigama, S., Polak, E. and Klessig, R., A comparative study of several general convergence conditions for algorithms modeled by point-to-set maps, Math. Prog. Study, 10(1979), 172~190.

[13] Meyer, R. R., Sufficient conditions for the convergence of monotonic mathematical programming algorithms, J. of Computer and Systems Science, 12(1976), 108~121.

[14] Meyer, R. R., A comparison of the forcing functions and point-to-set mapping approaches to convergence analysis, SIAM J. on control, 15(4) (1977), 699~715.

[15] Polyak, B. T., Gradient methods for the minimization of functionals, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 3 (1963), 864~878.

[16] Rosen, J. B., The gradient projection method for nonlinear programming, part I: linear constraints, SIAM J. Appl. Math., 8(1960), 181~217.

[17] 韩继业,胡晓东,论单调最优化算法的收敛性,系统科学与数学,1989.

第9卷 第2期 运筹学杂志 Vol. 9 No. 2
1990年12月 CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH Dec., 1990

应用实例

优化小农场结构效益的相对综合评价

姚荣震
(温州市科协)

优化小农场的产业结构，提高其经济、社会、生态等诸方面的效益，是农村深化改革中的新课题，也是农业经济科学管理的重要问题．本文在对某市沿海五个县299个小农场调查数据的基础上，运用综合评价，探索了优化小农场结构效益的途径．先将有关数据列于表1内．

表 1

结构型	场数	结构比重 (%)			
		粮食	经作	畜牧	工副
粮食型	68	82.5	5.2	4.9	7.4
种养型	37	38.0	48.2	9.6	4.2
综合型	153	45.8	12.8	14.1	27.3
兼农型	41	29.6	2.0	4.5	63.9

每种结构型都含粮食、经济作物、畜牧、工副业等四个因素．我们评价时，应在完成国家关于粮食和其他重要农产品指令性计划的前提下，不仅注意经济效益，而且还要充分考虑社会效益、环境生态效益等．这几项都要通过才行，因此要引进阈值概念，即若干项指标有一项不通过就不能通过．其阈值T从逻辑上说就是“与集”的概念，即

$$T=G\cdot j\cdot S\cdot H,$$

其中G表国家计划是否完成，取1或0；j表经济效益可否，S表社会效益可否，H表环境生态效益可否，均取两值1或0．对于我们所讨论的各结构型，当其综合评价的阈值均为1时，表明各结构型都是通过的．

现在的问题是，对某种结构型要考虑是否满意和满意的程度．这就不仅要看它的综合效益，而且同每一个因素有关．其优劣之分不是绝对的，而是相对的．就是说对某种结构的评价不是用绝对的优——“1”或绝对的劣——“0”来表示，而是用α：$(0<\alpha<1)$对该结构效益作相对评定．因此，我们称之为相对综合评价问题．下面我们对农场结构效益进行相对综合评价．

首先，针对本文所考虑的实际问题给出相对评价集合．例如，V可由五种评语构成：

$$V=\{\text{甚满意、满意、可以、欠满意、不满意}\}.$$

本文1990年4月23日收到．

先评粮食型．找各界人士若干人，就粮食型中的四个方面因素(即粮食，经作，畜牧，工副)结合总的效益逐一进行评价，其结果为集合：

$$R_{粮}=(0.3\quad 0.23\quad 0.27\quad 0.2\quad 0\quad),$$
$$R_{经}=(0.1\quad 0.27\quad 0.23\quad 0.3\quad 0.1\ ),$$
$$R_{畜}=(0.25\quad 0.3\quad 0.15\quad 0.2\quad 0.1\ ),$$
$$R_{工}=(0.2\quad 0.15\quad 0.15\quad 0.24\quad 0.26).$$

于是，可得对粮食型各因素相对评价矩阵：

$$R=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.23 & 0.27 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.27 & 0.23 & 0.3 & 0.1 \\ 0.25 & 0.3 & 0.15 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.15 & 0.15 & 0.24 & 0.26 \end{pmatrix}$$

亦即
$$R=(R_{粮}\quad R_{经}\quad R_{畜}\quad R_{工})^T$$

其次，由于评议人员的着眼点不尽一致，例如干部(A_1)、专家(A_2)、生产者(A_3)、消费者(A_4)对各因素往往各有所侧重．这就需要为他们赋“权”．“权”值的确定，至关重要，可以请若干各类权威人士提出赋权要求，然后再取其期望值．此处，我们对各类人士赋予相应权重如表2．

表 2

因	素	粮　食	经　作	畜　牧	工　副
权	A_1	0.5	0.15	0.25	0.1
	A_2	0.55	0.05	0.24	0.16
	A_3	0.4	0.2	0.3	0.1
重	A_4	0.58	0.1	0.27	0.05

以上各行构成相应人士的权重集合，从而构成权重矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.15 & 0.25 & 0.1 \\ 0.55 & 0.05 & 0.24 & 0.16 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.58 & 0.1 & 0.27 & 0.05 \end{pmatrix},$$

即
$$A=(A_1\quad A_2\quad A_3\quad A_4)^T.$$

第三，相对综合评价结果设为矩阵B．$B=A\circ R$．根据矩阵的复合运算法则，R确定了一个映射，它把已知因素集U上的一个子集A映射到评价集V上的一个子集B．A是映射的原像，B是映射的像．于是实质上相对综合评价就是已知原像(权分配行矩阵)和映射(单因素评价矩阵)去求像(综合评价的结果)的问题，借助矩阵的合成运算，不难实现．

式中A，R均为已知的矩阵；“$\circ$”表示矩阵乘法运算．这里矩阵乘法运算步骤与普通矩阵乘法类似，不同的是并非先两项相乘后相加，而是先取小而后取大．就是先“与”再“或”先求属于若干集合的“与集”的隶属度，规定为属于各集中的最小值；再求属于“或集”的隶属度，取各集中的最大值．故$A\circ R$，要求出

$$B=(B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_m),$$

其中某一行的

$$B_j=\max_K \min(A_{iK},\ R_{Kj})=\bigvee_K (A_{iK}\wedge R_{Kj})$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

再将 B 归一化，使得 $\sum B_j=1$. 统一标准，得 $A\circ R=\frac{1}{\sum B_j}B$. 此处运算结果：

$$B_1=A_1\circ R=(0.26\quad 0.21\quad 0.23\quad 0.17\quad 0.13),$$

$$B_2=A_2\circ R=(0.26\quad 0.2\quad 0.23\quad 0.17\quad 0.14),$$

$$B_3=A_3\circ R=(0.24\quad 0.24\quad 0.2\quad 0.11\quad 0.11),$$

$$B_4=A_4\circ R=(0.24\quad 0.22\quad 0.22\quad 0.16\quad 0.16).$$

取上述各集中相应因素之期望值构成 $\bar{B}$. 此处 $\bar{B}=(0.25\quad 0.22\quad 0.22\quad 0.16\quad 0.15)$. 这就是说各界人士评估结果是：甚满意者占 25%，满意的 22%，可以的 22%，欠满意 16%，不满意 15%. 因此得

满意度 M(粮型)=(甚满意)+(满意)=47%,

可行度 G(粮型)=(满意度)+(可以)=69%.

由以上讨论，我们有结论：粮食型是可行的，国家指令计划完成好，经济、社会、生态诸效益尚可. 只是由于产出投入比仅为 2:1，经济效益欠缺一点.

接着，运用上述方法再对综合型作相对综合评价. 于此，亦作单因素评价，得矩阵为：

$$R=\begin{pmatrix} 0.35 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.15 & 0.15 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

再对各界人士赋以相应权重，可得权重矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.35 & 0.25 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

经集合复合求出 $B=A\circ R$，进行归一化，取均值，得到相对综合评价集

$$\bar{B}=(0.29\quad 0.23\quad 0.21\quad 0.12\quad 0.15).$$

因此得　　满意度　M(综型)=0.29+0.23=52%,

　　　　　可行度　G(综型)=0.52+0.21=73%.

同理，对种养型进行综合评价，可得：

$$\bar{B}=(0.33\quad 0.22\quad 0.25\quad 0.11\quad 0.09),$$

故　　满意度　M(种养加型)=0.33+0.22=55%,

　　　可行度　G(种养加型)=0.55+0.25=80%.

综合以上结果，我们得到：

M(粮食型)$<M$(综合型)$<M$(种养型),

G(粮食型)$<G$(综合型)$<G$(种养型).

兼农型的工副业比重很大，一般不属于农场．效益虽高，但随市场导向而变，稳定度更低，尤其国家实行治理整顿以来，市场竞争剧烈，质量要求提高，有的经济效益下跌，因而此处暂不讨论．

根据上述的相对综合评价，不难得出以下结论：

(1) 粮食型、综合型、种养型的结构效益的阈值 T 均为 1，都是可行的；

(2) 为了提高整体效益，在保证国家关于粮食和其他重要农产品计划指令的前提下，小农场结构型发展的趋势是：

粮食型⇒综合型(过渡型)⇒种养型．

就是说从低层次的一维结构向高层次的多维结构，从低效益的向高效益的发展演变．事实上，年终纯收益，粮食型、综合型、种养型分别为 5497 元，6875 元，8202 元，证明了上述论断．

又据另外三个县 37 家小农场 1987 和 1988 两年生产结构调整跟踪考察的结果(见表 3)，可以进一步证明上述结论的成立．

表 3

年份	场数	净收益	各因素比重 (%)			
			粮食	经作	畜牧	工副
1987	37	8235	48.6	20.4	12.8	18.2
1988	37	9555	34.3	28.7	16.8	20.2
1988 比 1987+%		+16.03		+8.3	+4.0	+2.0
1988 比 1987−%			−14.3			

以上相对综合评价向我们启示了小农场结构优化的方向．可以为政府的决策和科技兴农、健全农业技术服务体系提供参考．这种评价方法也可运用到农业生产乃至经济管理上去．