測繪通報

1956

測繪通報

（季刊）

1956年 合訂本

編輯者	測繪通报編輯委員会（南京九华山50号）
出版者	科学出版社（北京朝陽門大街117号）
印刷者	冶金工業出版社印刷厂
發行者	新华書店

印数 1—1,260　　1957年10月出版

定价：2.00元

測繪通报第二卷分类总目

一、一 般 論 述

二、大 地 測 量

三、天 文 測 量

四、重 力 測 量

五、航 空 測 量

六、平 差 計 算

七、地 形 測 量

八、水 准 測 量

九、工 程 測 量

十、制 圖 学

十一、仪 器 学

十二、中国古代的測繪科学

十三、測 量 教 学

十四、測 繪 法 令

十五、測 繪 消 息

十六、書 刊 介 紹

發展我國測繪事業 为今後的經済建設創造更有利的条件

方　俊

（中國科学院地理研究所）

發展我國國民經济的第一个五年計劃已經勝利地進入了第四个年度了。在过去的三个年度中，由於党和政府的正確領導，由於全國人民的勤奋努力和苏联大公無私的帮助，我們在各方面都取得了輝煌的成就。全國人民都为这种成就所鼓舞，信心百倍地为完成和超額完成今後的任务而奋鬥。

第一个五年計劃是实現國家在过渡時期總任务的重大步驟，以後我們还要通过第二个、第三个以及以後一系列的五年計劃把我們的祖國逐步建成一个高度工業化的强大社会主义國家。我們的任务是光荣的，同時也是十分艰鉅的。只有全國人民在党的正確領導之下，团結一致，努力工作，不断地提高劳動生產率，努力学習，特别是学習苏联的先進理論和經驗，才能使我們的事業達到理想的目标。

大家知道，社会主义的經济建設是規模宏大的事業，它的內容是十分複雜的，如果对於國家資源的分佈沒有相当的了解，就很难制訂出一个合理的方案。第一个五年計劃的編制化了很長的時間，直到計劃执行兩年以後才編制完畢，主要原因之一就是因为國家对於資源的調查和統計資料掌握得不够，为了使我們今後的建設事業做得更好，使我們第二个和第三个五年計劃拟訂得更为合理和切合实际，我們就必須在進行第一个五年計劃同時，進行一系列的調查和勘測工作，其中有地質普查，有荒地勘測，以及水利、林業等調查工作，这都是保証今後建設事業順利推行的重要措施。

在進行普查和勘測工作中所面臨的一个嚴重問題就是直到現在我們还沒有一套完整的全國基本地圖。現在各部門所应用的地圖大部分是國民党所遺留下來的 1:50000，1:100000，1:200000，1:500000比例尺地形圖。这种地圖有許多錯誤，並且也彼此不相衔接，在兩省交接之处，同一地點的平面位置可以差到幾十公里，高程可以相差幾百公尺，这是远远不能滿足今後的調查和勘測的要求的。但是就是这种不合标準的地圖也不是全國都有的。我們如果想在西北或西南人烟稀少的地區進行調查，則連一幅比較可靠的 1:500000 比例尺地圖也不可得。有些部門为了急於解决用圖的困难，就不得不自己組織龐大的測量隊進行測繪。这样就大大地增加了調查工作的負担，同時也拖長了調查的時間。不但如此，由於各部門所進行的測繪都具有它特殊的目的性，所以所測繪出來的地圖往往不能供給其他部門之用，因而常常在同一地區，由不同的机關進行重複的測量。

沒有準確的地圖不但使調查工作遭遇困难，同時也將使我們的許多計劃無从拟訂。我們已經說过，社会主义的經济建設事業是十分龐大而複雜的。每一个計劃的拟訂都是經过反復研究，反復的比較方才得出一个較为合理的最後方案。在進行研究和比較之時，很多的數据是从地圖上得來的。因此，地圖的可靠与否就將直接地影响到我們方案的合理性。我們可以用黃河的綜合開發問題來說明这點。黃河的綜合開發是我們社会主义建設中改造自然的偉大事業之一。这个計劃实現之後將使幾千年來为我國人民帶來無窮災难的害河变为为人民服务的利河。从鄧子恢副總理的“關於根治黃河水害和開發黃河水利的綜合規劃的報告”中我們

可以体会到整个規劃的內容是在河流上建築一系列的水庫來控制河水，使河水不再泛濫，同時可以利用它來發电、灌漑以及航运之用。但是这幾方面是存在着一定的矛盾的。因此，必須作出不同的方案來作比較，然後就中选擇一个可以使彼此能够互相配合的方案。在比較之時，就必須有準確的地圖作为依据。例如水庫应設在何地，水壩应築多高方能以最小的淹沒面積來達到最大的庫容，以及灌漑溝渠系統应如何規劃，使每一滴河水都得到合理的利用等問題都必須根据地圖來研究和分析，方能得出合理的方案。自从中華人民共和國成立以後，就对黄河進行了勘測和研究工作，幾年以來已經測量了85000多平方公里的地圖。也就在这个基礎上，我們才有可能來進行黄河綜合開發的規劃工作。但是对於具体設計來說，还是远远地不够的，同時部份地圖的精度也不符合要求。黄河規劃工作曾为此遭遇到不少困难。黄河規劃只不过是一个輪廓，它的具体工程項目中的許多地點數字还有待於進一步的研究和確定。这都說明了準確地圖对於經济建設的重要性。

所謂國家基本地圖就是統一的根据最精密方法所測量出來的地圖。它是由國家的統一測繪机構來执行的。在測繪这种地圖之時，必須先在全國範圍以內佈置精密的天文-大地控制網，然後以这种天文-大地控制網为基礎，应用航空測量或其他方法來測繪地形。整个过程是十分複雜的，同時所需的時間也是比較長的。这种工作必須由全國統一的測繪机構來進行，因为只有这样的机構才能从整体上來考慮全國的測繪事業。苏联在十月革命勝利以後的第二年即成立了統一的測繪机構，三十多年來，進行了很多的測繪工作，保証了幾个五个計劃中所需要的精密地圖。在衛國战爭以前，他們已經完成了全國的 1:100000 比例尺的基本地圖，这不但对於國家的經济建設，同時对於衛國战爭都起了極大的作用。战爭結束以後，他們立即从事全國的 1:25000 比例尺基本地圖的測繪，以滿足战後第五个五年計劃中各項巨大工程建設以及改造自然偉大事業的規劃和設計之用。現在全國的 1:25000 基本地圖已經接近完成，並且更提高一步開始了比例尺 1:10000 基本地圖的測繪工作。由此可見，在社会主义的建設走向共產主义社会的过程中，國家对於測繪事業的要求是逐步提高的。我們必須及早地打下基礎，方能逐步地改進，以滿足國家在建設中对於地圖日益提高的要求。

对於我國目前的迫切需要來說，我們应該及早地開始 1:100000 基本地圖的測繪，並採取一切措施使其早日完成。1:100000 比例尺地圖可以滿足我國在今後幾个五年計劃中的各种規劃及初步設計之用。例如，具备了这种地圖，則今後的地質普查、森林農業的調查以及水利的勘察都有了可靠而準確的依据，不但可以加速調查的速度，更可以提高調查結果的準確性；而每年还可以節省下來很多的臨時測繪費用。比例尺1:100000地圖可以作为鉄路和公路室內初步定線之用，可以用於河流規劃的初步設計之用。此外，我們知道这种地圖是用航空測量得來的，如果將比例尺較大的航測底片和地圖配合应用，則很多科学上的問題都可以从圖上得到解決。最後，这种地圖也是國防建設中所不可缺少的。

但是全國性的基本地圖的測繪是十分費時的，它必須从全國的基本測量開始，也就是說，必須先將全國的天文-大地控制網建立起來，然後应用航空測量方法來施測地形。我們知道，苏联的測繪事業是十分發達的，他們的成就和工作速度是任何的資本主义國家望塵莫及的。但是他們也經歷了二十多年的時間才基本上完成了全國的基本測量和全國的1:100000比例尺基本地圖。我國測繪事業远远的落後於苏联的水平，虽然我國的國土只有苏联的一半大小，但要完成全國十万分之一地圖的測圖工作，估計需要十五年左右時間。如果我們暫時不考慮边远地區，按照國家的需要有重點地來進行測繪，就可能及時地供应每个五年計劃所需的地圖。

基本測量是一个全國性的事業，所以必須

有一个統一的測繪机構來領導，根据統一的計劃，按照統一的規範和标準來進行。任何的事業机關的測繪部門都不可能來执行这个任务，因为各事务机關对於測繪工作都有他們特殊的要求，而任务又極迫切，他們决不能放棄自己目前的迫切任务來考慮或進行全國性的長远事業。在过去的幾年中，政府在測繪事業上的投資已不在少數，所耗費的人力物力也極为可观，但是直到現在我們仍舊沒有一份完全合乎規格的成圖，其主要原因就是因为沒有統一的測繪領導机構，以致各測繪部門都各自为政，彼此不相联系，沒有統一的測量标準和地圖符号，同時人力分散，所以費力多而成效少。而最嚴重則是这种測繪都是以迅速成圖为目的，所以对於精度要求不高，並且也沒有从大地測量開始，这样就使誤差累積，越远而越大，終致成圖無法拼接。

过去我國的地形測量都是採用人工測量方法的，这种方法是十分緩慢的。如果要想提高速度就必須降低精度。在解放初期所測地圖的質量之所以低劣的一个主要原因就是由於过度地重視速度而忽視精度所致。近年以來，各部門鑑於人工測繪的緩慢，以及精度不能提高，都在大力展開航測工作。航空測量原是最迅速、經済和準確的測圖方法，但是航空測量必須有地面上的控制測量作为依据，如果不先在地面上展開精密的天文-大地測量，則將來由航測所製成的地圖仍舊要產生無法拼接的弊病。並且，航空測量是一个有高度集中性的工作，只有在集中使用之下，才能發揮其迅速、經济和準確的作用。如果大家都來办，則必致人才不够分配，儀器不够应用，徒然使國家耗費大量的外匯，而不能收到所希望的效果。

現在國务院已經决定提請全國人民代表大会常务委員会批准設立一个直屬於國务院的國家測繪總局。这个局成立以後必能使我國的測繪事業由分散的局面逐渐走向集中，上述各种矛盾也必能逐一得到解决。这是值得我們慶幸的事。

但是根据苏联的經驗，測繪總局在成立之初决不能立刻就收到集中之效。在開始幾年中，各業务部門的測繪机構仍舊十分龐大，業务仍舊十分繁重。測繪總局在那个時候的任务是一方面進行全國的基本測量，一方面領導各部門的測繪机構，審查他們的計劃，以及測量成果和成圖，务使各机構的測量工作能符合國家地圖的标準，使他們極力避免同一地區的重複測量。然後，逐漸將主要業务，特别是有關全國性的和永久性的測繪業务集中在總局以內，同時逐漸集中人才，並大力培养新生力量，使總局的能力逐漸加强。總局除了执行全國的基本測量及地圖測繪以外，还可以有很大的力量替其他業务部門進行工作。这是苏联在集中和發展測繪事業所走的道路，对於我們是完全可以適用的。

其次，我們应当大力培养新生力量。現在高等教育部已在武漢設立了武漢測量製圖学院，將來大批測量製圖人才即可由該校源源培养出來。当然，有些專業由於師資的關係还不能馬上開办，但是在苏联專家的大力協助之下，在該院教師的努力之下，这种局面是不会很長久的。五、六年以後，我們測繪力量就可以大大的增强，使我們測繪事業的發展得到更有力的保障。

測量製圖的科學研究是測繪事業不可分割的一环。沒有研究則事業的水平無法提高；苏联測繪事業的空前發展实推動了測量製圖科学的前進，而測量製圖科学研究的很多成就也大大地提高了事業的水平和工作的速度。苏联的大地、天文以及航測等工作都有一套適合於本國环境的方法以及適宜於本國条件的儀器。这都是幾十年來，測量製圖科学工作者所研究出來的成果。苏联在人跡難到的地區進行控制測量及地形測繪時有很多先進的方法。但是如果將这种方法应用到我們的某些地區，則往往因条件不同而不能完全適用。例如，西藏地區平均海拔在 4000 公尺以上，交通运輸皆極困難。無論在建立大地控制網或在進行地形測繪之時，都必須有一套特殊的方法和一套特殊的裝备。又如我們現在所採用的測繪規範都是苏联

的規範。苏联的測繪規範是經过苏联測量製圖工作者三十多年的实踐，經过嚴密的科学研究所制訂出來的，所以是十分合理的。用在中國，大体上是沒有問題的。但是也有一些地方是不很適合的。所以也必須根据中國的測繪經驗來分析研究，制訂出一部完全符合我國条件的規範。其他如測繪儀器的改進，長度檢定室的建立，適合我國地區的参考橢球面的研究，以及其他一系列的理論研究工作，皆須投入很多人力進行研究。中國科学院地理研究所的大地測量組已成立數年，过去曾做了一些工作，但是由於人力單薄，所以所進行的工作極少。今後必須和新成立的測繪總局以及武漢測量製圖学院取得密切的合作，努力学習苏联的測繪理論和經驗，大量培养測繪科学人才，方能逐步地將我國的測繪科学提高到國际水平。

最後，我們还須大力地發展測繪儀器的製造事業。我國过去的測繪儀器幾乎全部依賴國外，每年消耗的外匯为數甚多。隨着測繪事業的發展，对於儀器的要求必定与日俱增，如果仍舊依靠進口，則不但每年要付出大量的外匯，並且國外也不可能及時地供給我們的需要。何況有很多工作必須要有適合我國条件的儀器方能充分地發揮工作的效能。因此，及時地發展測繪儀器製造事業是十分必要的。中國科学院儀器館已初具規模，仿製外國儀器亦已收到一些成效。應該在人力和設备上充实它，使它能製造出更多和更適合於我國測繪工作的儀器。

一卷二期至四期的更正表

頁	行	誤	正
35	左倒 13	漢代算学家刘徽	三國時魏算学家刘徽
35	右 13	$\sin a=\sin c\cos A$	$\sin a=\sin c\sin A$
35	右 14	(2)　$\sin c=\cdots$	(2)　$\sin b=\cdots$
40	左 10	(T观＋T收)	(T观－T收)
42	右 18	$=k_1^2+\frac{k^2}{V^2G^2}$	$=k_1^2+\frac{k_2^2}{V^2G^2}$
43	左 1	$p=\frac{K}{k_1^2+\frac{h_2^2}{V^2G^2}}=\frac{KG^2}{k_1^2G^2+\frac{h_2^2}{V^2}}$	$p=\frac{K}{k_1^2+\frac{k_2^2}{V^2G^2}}=\frac{KG^2}{k^2G^2+\frac{k^2}{V^2}}$
44	左倒 15	$l=(z$算$-z_0)$	$l=-(z$算$-z_0)$
47	右倒 7	$\pm\sqrt{(0.02\sqrt{2})^2+\cdots}$	$\pm\sqrt{(0.22\sqrt{2})^2+\cdots}$
50	左 28	如标定每塊	但标定每塊
63	右倒 2	其矩离为 l	其距离为 l
70	右 4	…是著名的。H. Я. 辛格尔及 Д.	…是著名的 H. Я. 辛格尔及 Д.
80	左倒 9	外角的圖形數目 R	外角的圖形數目 K
82	表	在表中第一行与第二行之間需加一橫線	
84	表	在表中第一行与第二行之間需加一橫線	
99	左倒 11	而引起改正	而引起的改正
106	左倒 3	A. A. 伊索托夫天文-大地網	A. A. 伊索托夫从天文-大地網
106	右 8	國測量平差	角測量平差
106	右 10	一种三角主網	一等三角主網
111	左 18	上海市房產管理局	上海市房地產管理局
116	右 10	在任何情形不	在任何情形下
117	右 8	每地形點	每个地形點
117	左 8	$(m-90)$	$m\cdot 90$
118	表	(天頂距)	天頂距

郭守敬球面割圓術

李　儼

（中　國　科　学　院）

古代印度三角函數表內的正弦函數表曾随九执曆輸入中國。此表係分一象限为 90°，1° 为 60′。

又因　周天　$$2\pi r = 360 \times 60, \quad \pi = 3.1416.$$

故　半徑，　$$r = \frac{360 \times 60}{2\pi} = 3438.$$

此項函數表和三角計算法未被廣用，到元代郭守敬（1231—1316）則另行創造，郭守敬

令　周天　$$2\pi r = 365\frac{1}{4}, \quad \pi = 3.$$

故　全徑　$$d = 121.75, \quad 半徑 \quad r = 60.8750,$$

一象限为 91°.31。

所算係用古代割圓弧矢術的公式，故「黃赤道相求弧矢諸率立成❶上」，所列

$$\begin{array}{llll}
\alpha = 1^\circ & \sin 1^\circ = 1.0000, & \text{vers } 1^\circ = 0.0082, \\
24^\circ & \sin 24^\circ = 23.8070, & \text{vers } 24^\circ = 4.8482, \\
44^\circ & \sin 44^\circ = 41.7454, & \text{vers } 44^\circ = 16.5682, \\
91^\circ.31 & \sin 91^\circ.31 = 60.8750, & \text{vers } 91^\circ.31 = 60.8750.
\end{array}$$

和現代三角函數表校对有出入，而原理則相同。現就明史所引大統曆法❷內［法原］加以說明，最後說明球面三角形的算法在郭守敬時期已被应用。

古代割圓術弧矢公式有以下各种：

$$A = \frac{1}{2}(cb + b^2), \qquad 出九章算術 \tag{1}$$

$$d = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b} + b, \qquad 出九章算術，句股章 \tag{2}$$

$$a = \frac{2b^2}{d} + c, \qquad 出宋沈括（1030—1094）夢溪筆談 \tag{3}$$

---

❶ 編者註：古時的曆家將日月五星在天上运行時的盈縮遲疾之數，預先为它排定立表，以便推步時取用，这种數表就叫做「立成」。为了某某用的，就叫做「××立成」，如「黃赤道相求弧矢諸率立成」等等。「立成」用現在的話來說就是「計算用表」。

❷ 編者註：大統曆法係明初刘基等所編纂的一种曆法。这个曆法幾乎全部以元郭守敬的授時曆为藍本，僅僅作了少許的变更。据明史所載分为：法原，立成，推步三編。法原和推步又各分为七目。此篇所討論的係法原中（三）黃赤道差和（四）黃赤道內外度等兩目。

宋楊輝，詳解九章算法（1261）由（1）（2）式算得

$$-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0, \qquad (4)_1$$

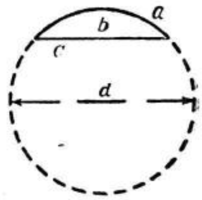

圖 1❶

元郭守敬（1231—1316）由（2）（3）式算得

$$b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\frac{a^2d^2}{4}=0. \qquad (4)_2$$

元郭守敬（1231—1316）首論球面割圓術，並算好三角函數表，称做『黃赤道相求弧矢諸率立成上』，『黃赤道相求弧矢諸率立成下』等，其割渾圓即算弧三角法。茲引有黃道積度求赤道積度及赤道內外度，又实測二至黃赤道內外半弧背二十四度［所測就整］❷。

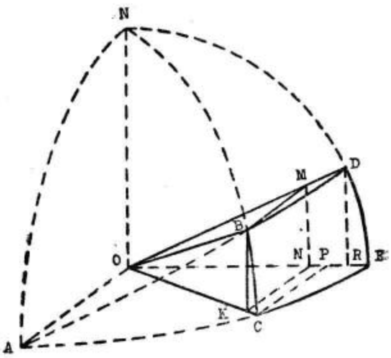

圖 2❸

如圖 2 所示：A 为春分點；D 为夏至點。

AD 为黃道象限弧；

AE 为赤道象限弧。

今有 BD 为黃道積度，求（1）赤道積度 CE，（2）赤道內外度 BC。

自 D 作 DR 線与 OE 正交，自 B 作 BM 線与 OD 正交。

郭守敬因周天 $\pi d=365\frac{1}{4}$，$\pi=3$，故全徑 $d=121.75$，半徑 $r=60.875$，一象限$=91°.31$。

据明史卷三十二，志第八，曆二：大統曆法一上［法原］。（三）『黃赤道差。求黃道各度下赤道積度術。	（以下係說明） 已知 BD 弧求 CE 弧。从（二）『弧矢割圓』知 全徑，　$d=2r=121.75$ 半徑，　$r=60.875$	（以下係据明史內資料補註） 「如黃道半弧背 1 度，求赤道積度。如以半弧背 1 度求矢度。」 因　$\frac{a}{2}=1$ （为黃道半弧背）。 由　$b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\frac{a^2d^2}{4}=0 \qquad (4)_2$

❶ 編者註：上列各式中的罗馬字母，如圖 1 所示：a 是弓形（古時称为弧矢形）的弧（古時称为弧背，折半之称为半弧背），c 是弓形的弦（古時称为弧弦，折半之称为半弧弦），b 是 a 弧中點和 c 弦中點的連線（古時称为矢，亦称弧矢），d 是直徑（古時称为全徑），A 是弓形的面積。弓形的一半古時称为半弧矢形，弓形的弧与弦之差折半称为半背弦差。

❷ 編者註：「黃道積度」即为現在的「黃經的餘角」；「赤道積度」即为現在的「赤經的餘角」；「赤道內外度」即为現在的「赤緯」；「二至黃赤道內外半弧背」即現在的「黃赤交角」。

当年郭守敬將周天分为 $365\frac{1}{4}$ 度，所以实測「黃道交角」得約 24 度（經过湊整），現在我們都是將周天分为 360°，实測「黃赤交角」約为 23°27′。

❸ 編者註：古時称大圓之半徑为大弦，其相应的句、股称为大句，大股。比半徑小的線段（大圓半徑上任一點至圓心的距离）为小弦，其相应的句、股称为小句，小股。如圖 2 所示，OD 为大弦，則 DR 为大句，OR 为大股；OM 为小弦，則 MN 为小句，ON 为小股。

此外古時称 $\sin\alpha$（正弦）为「×半弧弦」，称 $\operatorname{vers}\alpha$（正矢）为「×矢度」，称某道上的角度为「×道積度」。

BD 弧 $\left(即 \frac{a}{2} = 1^\circ\right)$

用
$$b^4 + d^2 b^2 - a d b^2 - d^3 b + \frac{a^2 d^2}{4} = 0 \qquad (4)_2$$
式，在 BDM 半弧矢形（就中弧 $a = 2BD$，矢 $b = MD$，弦 $c = 2BM$）算得黄道矢度：$MD = b = 0.0082$，或檢「黄赤道相求弧矢諸率立成上」，亦得 $MD = b = 0.0082$。

式，因 $\frac{a}{2} = 1$，則 $\frac{a^2}{4} = 1$

$$d = 121.75$$
$$d^2 = 14823.0625$$
$$d^3 = 1804707.859375$$
$$a d = 2 \times 121.75 = 243.50$$
即
$$b^4 + 14823.0625\, b^2 - 243.50\, b^2 - 1804707.859375\, b + 14823.0625 = 0$$
$$b = 0.0082.$$

置周天半徑，內減去黄道矢度，餘为黄赤道小弦。

$$r - b = OM$$
（为黄赤道小弦）。

$$OM = r - b = 60.875 - 0.0082 = 60.8668$$
（为黄赤道小弦）。

置黄赤道小弦，以黄赤道大股乘之。[大股見割圓]为实，黄赤道大弦[半徑]为法，实如法而一❶，为黄赤道小股。

又在 DER 半弧矢形（就中弧 $a_1 = 2DE$，矢 $b_1 = RE$，弦 $c_1 = 2DR$）因在 $\triangle OMN$，ODR 相似正三角形中，有下式：
$$\frac{OM \times OR}{OD} = ON$$
（为黄赤道小股）。

又
$$\frac{60.8668 \times 56.0268}{60.875} = \frac{3410.1720\,3024}{60.875} = 56.0192 = ON$$
（为黄赤道小股）。

就中：黄赤道大股
$$OR = r - RE = 60.875 - 4.8482 = 56.0268.$$
又 $RE = 4.8482$ 黄道矢度，係檢查「黄赤道相求弧矢諸率立成上」对照 $\operatorname{vers} \alpha = \operatorname{vers}\ 24$ 得來。

置黄道矢自乘为实，以周天全徑为法，实如法而一，为黄道半背弦差。

將沈括公式
$$a = \frac{2b^2}{d} + c, \qquad (3)$$
改書为：
$$\frac{b^2}{d} = \frac{a - c}{2} = \frac{1}{2}\left(\overline{2BD} - \overline{2BM}\right)$$
（为黄道半背弦差）。

$$\frac{b^2}{d} = \frac{\overline{0.0082}^2}{121.75} = 0.00000055$$
（为黄道半背弦差）。

❶ 編者註：此地所謂「实」即相当於現在的「被除數」，所謂「法」即相当於現在的「除數」，「实如法而一」就是以除數去除被除數而求得商的意思。

以差去減黃道積度［即黃道半弧背］，餘为黃道半弧弦。

「置黃道半弧背 1 度，內減黃道半背弦差，餘为半弧弦。因差在微以下，不減，即用 1 度为半弧弦」，即：

$$\frac{a}{2}-\frac{b^2}{d}=\frac{c}{2}=BM$$

（为黃道半弧弦）。

由 $\frac{b^2}{d}=\frac{a-c}{2}$，

得：

$$\frac{a}{2}-\frac{b^2}{d}=\frac{c}{2}=BM=1-\frac{\overline{0.0082}^2}{121.75}$$

$$=1-0.00000055=1$$

（为黃道半弧弦）。

置黃道半弧弦自之为股冪，黃赤道小股自之为句冪，二冪並之，以開方法除之，为赤道小弦。

「置黃道半弧弦 1 度自之得 1 度为股冪，黃赤道小股 56.0192 自之得 3138.15076864 为句冪。二冪併之得 3139.15076864 为弦实，平方開之得 56.0281（为赤道小弦）。」

$$\sqrt{\overline{BM}^2+\overline{ON}^2}=\sqrt{\overline{KN}^2+\overline{ON}^2}=$$

$$\sqrt{1^2+\overline{56.0192}^2}=\sqrt{3139.15076864}$$

$$=56.0281=OK$$

（为赤道小弦）。

置黃道半弧弦，以周天半徑［亦为赤道大弦］乘之为实，以赤道小弦为法而一，为赤道半弧弦。

因 $BM=KN$，$OE=OC$；又在 $\triangle OKN$，OCP 相似正三角形中，有下式

$$\frac{(KN=BM)\times OC}{OK}=\frac{c_2}{2}=CP$$

（为赤道半弧弦）。

因

$$KN=BM=1$$

$$OC=r=60.875$$

$$OK=56.0281$$

$$\frac{60.875\times 1}{56.0281}=1.0865$$

（为赤道半弧弦）。

置黃赤道小股［亦为赤道橫小句］以赤道大弦［即半徑］乘之为实，以赤道小弦为法而一，为赤道橫大句。

又在 $\triangle OKN$，OCP 相似正三角形中，有下式

$$\frac{ON\times OC}{OK}=OP$$

（为赤道橫大句）。 $(5)_1$

又因 $ON=56.0192$

$$\frac{56.0192\times 60.875}{56.0281}$$

$$=\frac{3410.1688}{56.0281}=60.8653$$

（为赤道橫大句）。

以減半徑，餘为赤道橫弧矢。

$$b_2=r-OP$$

$$=PE$$

（为赤道橫弧矢）。

在 CEP 半弧矢形（就中 $a_2=2CE$，$b_2=PE$，$c_2=2CP$）

因 $r=60.875$，$b_2=r-OP=PE$

$=60.875-60.8653=0.0097$

（为赤道橫弧矢）。

橫弧矢自之为实，以全徑为法而一，为赤道半背弦差。

如前例求「黃道背弦差」例：

$$\frac{\overline{PE}^2}{d}=\frac{b_2^2}{d}=\frac{a_2-c_2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{2CE-2CP})$$

（为赤道半背弦差）。

$$\frac{b_2^2}{d}=\frac{\overline{0.0097}^2}{121.75}=0.00000077$$

（为赤道半背弦差）。

以差加赤道半弧弦为赤道積度。』

$$\frac{c_2}{2}+\frac{a_2-c_2}{2}=\frac{a_2}{2},$$

或

$$CP+\frac{(r-OP)^2}{d}=CE$$

(为赤道積度)。

赤道半弧弦:

$$CP=\frac{c_2}{2}=1.0865,$$

赤道半背弦差

$$\frac{a_2-c_2}{2}=\frac{b_2^2}{d}=0.00000077$$

$$\frac{c_2}{2}+\frac{a_2-c_2}{2}=1.0865=\frac{a_2}{2}$$

(为赤道積度)。

在圖 2, 如算弧三角形 ABC, 令 BC 弧 $=a$, AC 弧 $=b$, AB 弧 $=c$, 又 $\angle BAC=\angle A$, 則由

$$OP=\frac{ON\times OC}{OK} \qquad (5)_1$$

$$=\frac{OM\times OR}{\sqrt{ON^2+BM^2}}=\frac{OM\times OR}{\sqrt{\frac{OM^2\times OR^2}{OD^2}+\overline{BM}^2}},$$

可得

$$\sin b=\frac{\sin c\cos A}{\sqrt{\sin^2 c\cos^2 A+\cos^2 c}}. \qquad (5)_2$$

就中

$$\sin b=\frac{OP}{OC},\quad \sin c=\frac{OM}{OB},\quad \cos A=\frac{OR}{OD},\quad \cos c=\frac{BM}{OB},$$

$$r=OA=OB=OC=OD=OE.$$

(四)『黄赤道内外度。推黄道各度距赤道内外(度)…。

置半徑内減去赤道小弦, 餘为赤道(大小)二弦差[又为黄赤道小弧矢, 又为内外矢, 又为股弦差。]

置半徑内減去黄道矢度餘为黄赤道小弦。

以二至黄赤道内外半弧弦乘之为实, 以黄赤道

次已知 BD 弧, 求 BC 弧。

由前已知

$$r-b=OM,$$

和 $OK=\sqrt{(KN=BM)^2+\overline{ON}^2}$

(为赤道小弦)。就中赤道小句, 小股係檢「黄赤道相求弧矢諸率立成上」表。

同前例, 在 BCK 半弧矢形(就中弧 $a_3=2BC$, 矢 $b_3=CK$, 弦 $c_3=2BK$)中,

$$r-OK=CK=b_3$$

(为赤道二弦差), (又为黄赤道小弧矢)。

$$r-b=r-MD=OM$$

(为黄赤道小弦)。就中 MD 值檢表得來,

因在 $\triangle OMN$, ODR 相似正三角形, 有

⌊如冬至後 44 度, 求太陽去赤道内外(度)…。⌉

$$r=60.875,$$
$$B=44^\circ.$$

$$OK=\sqrt{41.7454^2+40.7782^2}$$
$$=58.3569$$

(为赤道小弦)。

$$r-OK=60.875-58.3569,$$

或 $\qquad CK=b_3=2.5181$

(为赤道二弦差),

(又为黄赤道小弧矢)。

又 $\qquad r=60.875,$

$$B=44^\circ,$$

$$OM=60.875-16.5682=44.3068$$

(为黄赤道小弦)。

大弦为法［即半徑］除之，为黃赤道小弧弦。［即黃赤道內外半弧弦，又为黃赤道小句。］	$\frac{OM\times DR}{OD}=MN=BK$ $=\frac{c_3}{2}$ (6)$_1$ （为黃赤道小弧弦）。	假定 $A=24^\circ$ 時 $DR=23.71$, $\frac{c_3}{2}=BK=\frac{44.3068\times 23.71}{60.875}$ $=17.2569$ （为黃赤道小弧弦）。前已算出:
置黃赤道小弧矢，自之［即赤道二弦差］以全徑除之，为半背弦差。	改書沈括公式成 $\frac{\overline{CK}^2}{d}=\frac{b_3^2}{d}=\frac{a_3-c_3}{2}$ （为半背弦差）。	因 $CK=b_3=2.5181$, $\frac{\overline{2.5181}^2}{d=121.75}=0.0521$ （为半背弦差）。
以差加黃赤道小弧弦为黃赤道小弧半背，即黃赤道內外度。……』	$\frac{a_3-c_3}{2}+\frac{c_3}{2}=\frac{a_3}{2}=BC$ （为黃赤道內外度）。	$\frac{a_3}{2}=0.0520+17.2569=17.3089$ （为黃赤道內外度）。

如圖 2，如算弧三角形 ABC，令 BC 弧 $=a$，AC 弧 $=b$，AB 弧 $=c$，又 $\angle BAC=\angle A$，則由

$$BK=\frac{OM\times DR}{OD}, \tag{6$_1$}$$

可得

$$\sin a=\sin c\sin A. \tag{6$_2$}$$

就中

$$\sin a=\frac{BK}{OB},\quad \sin c=\frac{OM}{OB},\quad \sin A=\frac{DR}{OD},$$

$$r=OA=OB=OC=OD=OE.$$

有人認为郭守敬球面割圓術不是中國所發現，可能是受國外一部分学者意見的影响，因日本三上义夫曾如此說过。

林科棠譯，三上义夫著，中國算学之特色第六十三頁称:

「授時曆中使用類似球面三角法，恐視为傳阿拉伯之知識，亦無不可。盖古算書中無其痕迹，古曆法中亦無其法。至是乃忽然使用，謂为根据外來知識，原無不合也。故授時曆之受阿拉伯影响，必然無疑，惟其影响至如何程度，实一疑問也。」

可是中算家对於球体早巳有相当的認識。这在祖暅（祖冲之（429—500）子）計算球的体積：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 時，已經可以看到。清梅文鼎（1633—1721）曾寫塹堵測量二卷，來說明球面割圓術。

郭守敬在論述球面割圓術之外，又說到比較隋刘焯（544—616）等間距二次招差術，和唐僧一行（683—727）不等間距二次招差術進一步的三次招差術。郭守敬又創做「立成」算表。郭守敬实在是当時的數学家。所以在未有確实資料之前，不必一定以为球面三角法，非傳自阿拉伯不可。

参 考 文 献

明史卷三十二，志第八，曆二，百衲本二十四史本明史第七册。

梅文鼎塹堵測量卷一及卷二，曆算全書本。

Gauchet, L., Note Sur La Trigonomêtrie Sphérique de Kouo Cheou-King. Toung-Pao, Vol. XVIII. 1917 (pp. 151-174).

日本藪內清，隋唐曆法之研究，第六章內「九执曆之研究」，昭和十九年（1944 年）1 月（第 154 頁）。

李儼，中國古代數学史料內附：古代三角函數表，1954 年 5 月。

三角鎖(網)中角、边条件的校驗

附解析法求距

金揚善

測角有誤差時，在三角鎖（網）中就發生角条件和边条件不能閉合、以至發生基綫和方位角条件不能閉合的情況。就三角鎖（網）的正式平差來說，每种条件的閉合差都影响观測角改正數的大小，从而影响正式平差後測角中誤差的大小；因此，要想精確估計各种閉合差的影响，应当等待正式平差以後。但在有些情況下，例如在外業观測中，需要即時估計各种閉合差的影响，这時不可能把三角鎖(網)正式平差；而且也不必要正式平差，因为可以採用一种簡便而又近似的方法。这种方法，就是仿照大地測量中估計某一誤差影响時所常用的方法。——「討論某一誤差影响某函數時，暫假定或設想沒有其他誤差存在。」在这裏，这个方法就是：

「討論某一条件閉合差的影响時，假定其他条件都不存在。」

第一節　三角形閉合差和菲列罗公式

(甲)　單三角鎖（或網）

設單三角鎖（或網，但假定不存在边条件）共有 n 个三角形，各三角形的角为 a_i、b_i、c_i，閉合差为 $\triangle_i$，各角按角度平差（假定僅存在角条件）後的改正數为 $v_{a_i}, v_{b_i}, v_{c_i}$ 而 $i=1,2,\cdots,n$。各角的改正數应符合於下列的角条件方程式：

$$\left.\begin{array}{l}\text{第 1 三角形 } v_{a_1}+v_{b_1}+v_{c_1}=\triangle_1\\ \text{第 2 三角形 } v_{a_2}+v_{b_2}+v_{c_2}=\triangle_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{第 } n \text{ 三角形 } v_{a_n}+v_{b_n}+v_{c_n}=\triangle_n\end{array}\right\}\quad(1)$$

按平差法中条件观測平差的解法，得各角的改正數为：

$$\left.\begin{array}{l}v_{a_1}=v_{b_1}=v_{c_1}=\frac{1}{3}\triangle_1\\ v_{a_2}=v_{b_2}=v_{c_2}=\frac{1}{3}\triangle_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_{a_n}=v_{b_n}=v_{c_n}=\frac{1}{3}\triangle_n\end{array}\right\}\quad(2)$$

按条件观測平差法，得每观測一角的中誤差 ε 为：

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\sum_1^{3n}(vv)}{r}}\ (r=\text{条件方程式的个數}=n)$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}\left\{3\left(\frac{\triangle_1}{3}\right)^2+3\left(\frac{\triangle_2}{3}\right)^2+\cdots+3\left(\frac{\triangle_n}{3}\right)^2\right\}},$$

故得：

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[\triangle\triangle]}{3n}}.\quad(3)$$

(乙)　完全四邊形鎖

設鎖中共有 m 个完全四边形，三角形的个數应共有 $n=4m$ 个，每一四边中各三角形的角和閉合差 $\triangle$ 如(圖 1) 所示。設每一完全四边形的 12 个角都進行了观測，第 i 个四边形各角平差後（設僅存在角条件）的改正數为

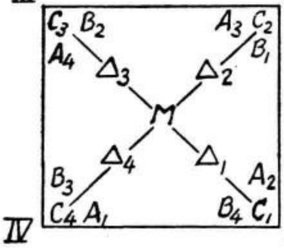

圖 1

$(v_{A_1}\cdots v_{A_4},\ v_{B_1}\cdots v_{B_4},\ v_{C_1}\cdots v_{C_4})_i$*。現採用一个四边形和兩个⌊扭四边形⌉的角条件，並按角度平差，則得四边形鎖的角条件方程式：

$$\left.\begin{aligned}(v_{C_1}+v_{C_2}+v_{C_3}+v_{C_4})_i&=(\triangle_1+\triangle_3)_i\\(v_{A_4}+v_{B_3}-v_{A_2}-v_{B_1})_i&=(\triangle_4-\triangle_1)_i\\(v_{B_2}+v_{A_3}-v_{B_4}-v_{A_1})_i&=(\triangle_3-\triangle_4)_i\\i=1,2,\cdots,m&\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

按平差法中条件观測平差的解法，得各角的改正數为：

$$\left.\begin{aligned}(v_{C_1})_i=(v_{C_2})_i=(v_{C_3})_i=(v_{C_4})_i&=\frac{1}{4}(\triangle_1+\triangle_3)_i\\(v_{A_4})_i=(v_{B_3})_i=-(v_{A_2})_i=-(v_{B_1})_i&=\frac{1}{4}(\triangle_4-\triangle_1)_i\\(v_{B_2})_i=(v_{A_3})_i=-(v_{B_4})_i=-(v_{A_1})_i&=\frac{1}{4}(\triangle_3-\triangle_4)_i\\i=1,2,\cdots,m&\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

取（5）式各 v 的平方和，得：

$$\left.\begin{aligned}(vv)_i=&4\cdot\frac{1}{16}(\triangle_1+\triangle_3)^2_i+4\cdot\frac{1}{16}(\triangle_4-\triangle_1)^2_i+4\cdot\frac{1}{16}(\triangle_3-\triangle_4)^2_i\\=&\frac{1}{4}\{2(\triangle_1^2+\triangle_3^2+\triangle_4^2)+2\triangle_1\triangle_3-2\triangle_3\triangle_4-2\triangle_1\triangle_4\}\\&i=1,2,\cdots.m\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

但 $$\triangle_2+\triangle_4=\triangle_1+\triangle_3,$$

故 $$\triangle_2^2=\triangle_1^2+\triangle_3^2+\triangle_4^2+2\triangle_1\triangle_3-2\triangle_3\triangle_4-2\triangle_1\triangle_4.$$

代入（6）式，得：

$$\left.\begin{aligned}[vv]_i&=\frac{1}{4}(\triangle_1^2+\triangle_2^2+\triangle_3^2+\triangle_4^2)_i\\&=\frac{1}{4}[\triangle\triangle]_i\\i&=1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

取（7）式 m 个 $[vv]_i$ 的和，得：

$$[vv]=\Sigma_1^m[vv]_i=\frac{1}{4}\Sigma_1^m[\triangle\triangle]_i=\frac{1}{4}[\triangle\triangle].$$

按条件观測平差法，得观測一角的中誤差 ε 为：

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[vv]}{r}}\ (r=\text{条件方程式的个數}=3m)=\sqrt{\frac{1}{3m}\cdot\frac{1}{4}[\triangle\triangle]},$$

因 $4m=$ 三角形个數 $=n$，

故 $$\varepsilon=\sqrt{\frac{[\triangle\triangle]}{3n}}.\quad(8)$$

討論　以上所得的（3）式和（8）式，就是所謂菲列罗公式。有些推演这个公式的方法不同这裏一样。由那些方法的推演过程去看，並看不出在完全四边形中使用菲列罗公式時究竟应当計入幾个三角形。有些人認为⌊完全四边形中只有三个独立角条件，所以只应該（?）計入三个三角形⌉。但完全四边形中包含四个三角形，这四个三角形的閉合差不同，甚至於相差很大；四个不同的閉合差每取三个組合，就有 ${}_4C_3=4$ 种⌊組合⌉情形，每种⌊組合⌉所算得的 $[\triangle\triangle]$ 应不同，而最大可能差至兩倍。在这四种⌊組合⌉中，究竟採用那一种⌊組合⌉呢？因此，在实际使用菲列罗公式時就碰到了疑難。但由（8）式的推演过程來看，可見每一完全四边形应該計入四个三角形；就上面所說計入三

* 註：一般对全組合角观測的完全四边形，測站和網分別平差（較簡便，但不十分嚴密），因而網平差時只採用八个"独立角"。此处为了計及所有角的"直接观測值"对於三角形閉合差从而对於測角中誤差的影响，仍視四边形有十二个"独立观測值"，但"平差時不計入測站条件。

个三角形就要發生疑難的情形來看，計入四个三角形也是应当的。

上面的(5)式，是採用三个"四項的角件"且未顧及測站和边条件所得的結果，这就產生如下的現象：所得改正數不能滿足測站条件和三角形角条件。这一現象的原因，無疑地是由於未加入測站和边条件。未加入这些条件的意义，就等於把三种四边形（前面採用的）或四个三角形看作是互相孤立而不是看作一个完全四边形中的圖形。根据这样的看法，自然可以把完全四边形看作有四个独立的三角形，这样一來，按照（甲）項方法推求測角中誤差的結果，自然也得到菲列罗公式（8）的形式了。

假定边条件和測站条件不存在，对於平差是肯定不合理的；但这裏不是平差，而是估計測角精度；只要所得的測角中誤差（像菲列罗公式所得的）和正式平差（包含边条件）後所得的相差不多，假定这些条件不存在而得出並使用这个測角中誤差算式（菲列罗公式）是沒有什麼不可以的。作者曾就很多实例观察，用菲列罗公式（8）計算完全四边形的測角中誤差和包含边条件平差後所得的測角中誤差相差只有百分之幾秒。

（丙）　三角形和完全四边形混合的三角鎖

前面已經說过：在完全四边形中假定边条件和測站条件不存在而求測角中誤差算式中的 $[\triangle\triangle]$ 時，实际上是等於把四边形中看作有四个独立的三角形；由(7)、(8)式的結果來看，也是得到这样的結論。因此，在三角形和完全四边形混合的三角鎖，在假定边条件不存在而推求測角中誤差時，可以直接把这样的三角鎖看作是單三角鎖（一完全四边形看作四个單三角形），而仍然应用菲列罗公式去求測角中誤差。

我們也可以用下面的方法來說明这个問題：——先把三角形圖形和四边形圖形分開应用（3）和（8）式分別計算其測角中誤差，然後合併，以求混合圖形的測角中誤差。設由 n' 个單三角形算得的測角中誤差是 ε_1，由 m 个完全四边形（共 $4m = n''$ 个三角形）算得的測角中誤差是 ε_2，即

$$\varepsilon_1^2 = \frac{\Sigma_1^{n'}\triangle^2}{3n'}, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{\Sigma_1^{n''}\triangle^2}{3n''}. \tag{9}$$

ε_1^2 是由 n' 个三角形算得，ε_2^2 是 n'' 个三角形算得的。若 n' 大於 n''，則所得的 ε_1^2 自然要比 ε_2^2 精密些；若 n' 小於 n''，則 ε_2^2 要精密些。因此，我們可以認为 ε_1^2 的权數是 n'，ε_2^2 的权數是 n''。求 ε_1^2 和 ε_2^2 的权中數，就得到混合圖形三角鎖的測角中誤差平方 ε^2 为：

$$\varepsilon^2 = \frac{n'\varepsilon_1^2 + n''\varepsilon_2^2}{n' + n''}\,(n' + n'' = n = \text{三角形的總个數})$$

$$= \frac{\Sigma_1^{n'}\triangle^2 + \Sigma_1^{n''}\triangle^2}{3n} = \frac{\Sigma_1^{n}\triangle^2}{3n},$$

故

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\triangle\triangle]}{3n}}. \tag{10}$$

（10）式所表示的測角中誤差公式，仍然是菲列罗公式的形式。

（丁）　尾語

本節寫出的目的，在於說明菲列罗公式如何应用於实际問題，並非嚴格按平差理論推求測角誤差公式。但作者淺陋，所見难免有誤，希能「拋磚引玉」，引出更精闢的見解和更正確的結論，对於解决这一实际問題是非常需要的。

最後还要談談三角形閉合差 $\triangle$ 和三角形球面角超 e 的算式，以便設計实用的計算格式。(4)式是根据下式得出的：

$$\left.\begin{aligned} v_{A_i} + v_{B_i} + v_{C_i} = \triangle_i = 180^\circ + e_i \\ -(A_i + B_i + C_i) \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 A_i、B_i、C_i 为观測值。我們已知：

$$e_i = \frac{\rho''}{2r^2}(2F_i) = m(2F_i), \tag{12}$$

式中 r 为相应於三角形之平均緯度处的地球平均曲率半徑，F_i 为第 i 三角形的面積。由圖 1 按三角学得：