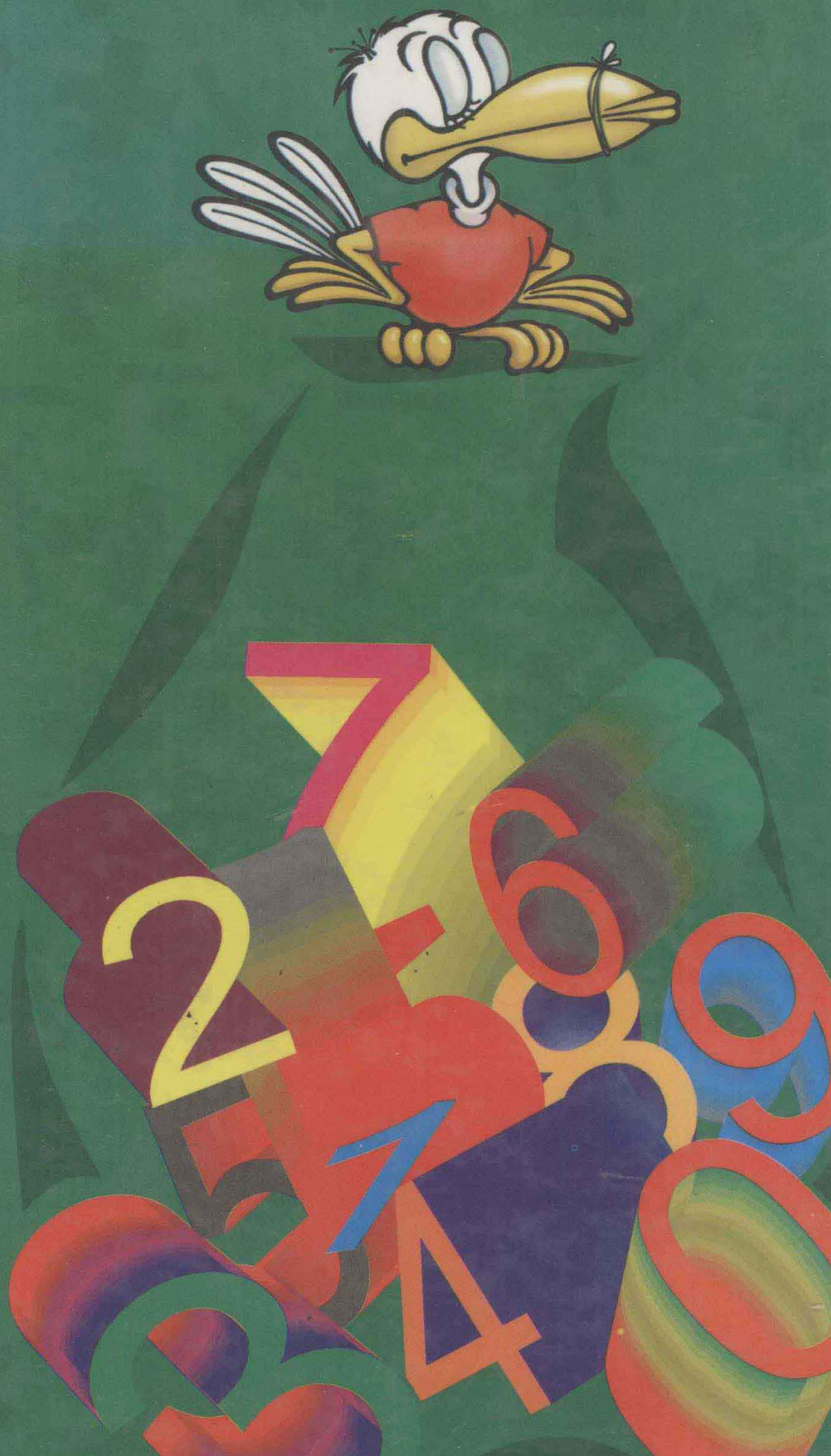
主编／佩捷

数学奥林匹克超级题库

初中版



哈尔滨出版社

数学奥林匹克超级题库

（初中卷）

哈尔滨出版社

丛 书 名:实用中学数学应试丛书

分 册 名:数学奥林匹克超级题库(初中卷)

选题策划:刘培杰

责任编辑:宋玉成

封面设计:王　卓

插图绘制:董　欣

版式设计:刘培杰

校　　对:张秀镁　梁兴昌　刘培杰

出版发行:哈尔滨出版社

激光照排:哈尔滨出版社激光照排中心

印　　刷:哈尔滨地图出版社印刷厂

开本:787×1092mm　1/16　印 张 20　字 数 650千字

版次:1997年1月第一版　1997年1月第一次印刷　印 数 8000套

ISBN 7-80557-957-1/G·204　定价:28.00元

数学奥林匹克超级题库编委会

目　录

代数部分

第一章　实　数 …………………………………………………… (1)
A　十进制整数及表示方法 …………………………………………… (1)
B　整除性，被 2,3,4,5,8,9,11 等数整除的判定 …………………… (12)
C　素数与合数 ……………………………………………………… (21)
D　奇数和偶数，奇偶性分析 ………………………………………… (24)
E　带余除法和利用余数分类 ………………………………………… (29)
F　完全平方数 ……………………………………………………… (30)
G　因数分解的表示法，约数个数的计算 …………………………… (35)
H　有理数的表示法，有理数四则运算的封闭性 …………………… (39)
第二章　式 …………………………………………………………… (45)
A　整式 ……………………………………………………………… (45)
A－a　因式分解 …………………………………………………… (45)
A－b　多项式 ……………………………………………………… (49)
A－c　整式的求值及证明 ………………………………………… (51)
B　分式 ……………………………………………………………… (57)
B－a　有关分式的计算问题 ……………………………………… (57)
B－b　有关分式的证明与化简问题 ……………………………… (59)
C　根式 ……………………………………………………………… (63)
C－a　根式的求值问题 …………………………………………… (64)
C－b　根式的化简及证明问题 …………………………………… (70)
第三章　方程与不等式 ……………………………………………… (76)
A　一元二次方程的解法 …………………………………………… (76)
B　一元二次方程实根的判定 ……………………………………… (79)
C　韦达定理的应用、根的分布及公共根问题 ……………………… (82)
D　根式方程、分式方程、含绝对值的方程及杂题 ………………… (91)
E　列方程解应用题 ………………………………………………… (97)
F　根为整数的方程 ………………………………………………… (105)
G　不定方程的问题 ………………………………………………… (110)
H　含〔x〕的方程 …………………………………………………… (119)
L　方程组的解法 …………………………………………………… (122)

N　不等式问题 …………………………………………………………（128）
第四章　函　数…………………………………………………………（140）
A　一次函数，反比例函数 ………………………………………………（140）
B　二次函数 ………………………………………………………………（142）

几何部分

第一章　角……………………………………………………………（146）
A　角的计算 ………………………………………………………………（146）
B　角之间的关系 …………………………………………………………（151）
C　有关角的杂题 …………………………………………………………（156）
第二章　线　段…………………………………………………………（161）
A　线段的相等问题 ………………………………………………………（161）
B　线段的位置关系问题 …………………………………………………（173）
C　有关线段的计算问题 …………………………………………………（178）
D　有关线段比的问题 ……………………………………………………（185）
E　有关线段的不等式与极值问题 ………………………………………（194）
第三章　三角形与多边形………………………………………………（201）
A　三角形问题 ……………………………………………………………（201）
A－a　特殊三角形问题 …………………………………………………（201）
A－b　三角形杂题 ………………………………………………………（208）
B　多边形 …………………………………………………………………（219）
第四章　圆………………………………………………………………（228）
A　与圆的切线有关的问题 ………………………………………………（228）
B　与四点共圆有关的问题 ………………………………………………（233）
C　与圆有关的其它问题 …………………………………………………（236）
第五章　面　积…………………………………………………………（245）
A　面积的计算 ……………………………………………………………（245）
B　有关面积的等式 ………………………………………………………（253）
C　有关面积的不等式及极值问题 ………………………………………（258）
D　面积杂题 ………………………………………………………………（265）

逻辑推理部分

A　抽屉原则 ………………………………………………………………（271）
B　简单的组合问题 ………………………………………………………（274）
C　逻辑推理问题 …………………………………………………………（285）
D　反证法 …………………………………………………………………（293）
E　简单的极端原理 ………………………………………………………（298）
F　简单的枚举法与计数 …………………………………………………（300）
G　操作与安排、设计问题 ………………………………………………（309）

代　数　部　分

第　一　章　　实数

A　十进制整数及表示方法

A－1　设 x 与 y 皆为两位数字的自然数，且 $x<y$，xy 是一个四位数字的自然数，首位数字是 2. 如果把这个首位数 2 去掉，剩下的数正好是 $x+y$，试求这二数.

解　依题意有

$$xy=2000+x+y$$

分解得：$(x-1)(y-1)=2001=3\times23\times29$. 于是，$(x-1)(y-1)=29\times69$（或 23×87）. 其余部分读者不难完成.

A－2　设 n 是一个正整数且 d 是十进位制中的一个一位数. 若 $n/810=0.d25d25d25\cdots$，求 n.

解　$n/810=d25/999$，

$$n=810\times d25/999=30\times d25/37.$$

$d25$ 应该是 37 的倍数，又是 25 的倍数，至少是 $37\times25=3700\div4=925$. 于是 $d=9$，不能更大. 所以 $n=30\times25=750$.

A－3　求 k 的最大值，使 3^{11} 可表示为 k 个连续正整数之和.

解　即求使 $3^{11}=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k)$ 成立的正整数 k 的最大值（其中 n 是非负整数）. 由右端和 $=\dfrac{k(k+2n+1)}{2}\Rightarrow k\cdot(k+2n+1)=2\cdot3^{11}$. 欲使左边较小的因数 k 尽可能地大，n 又必须非负 $\Rightarrow k=2\cdot3^5=486$.（此时 $n=121$，$3^{11}=122+123+\cdots+607$）

A－4　已知 a 是一个 1988 位的自然数且可被 9 整除，a 的各位数字相加得和为 b，b 的各位数字相加得和为 c，c 的各位数字相加得和为 d，求 d.

解　a 被 9 整除，且为 1988 位数，易知 b、c、d 都被 9 整除，且都大于 0.

$9\leqslant b\leqslant1988\times9=17892$

∴　b 位数不超过 5.

$9\leqslant c\leqslant5\times9=45$

∴　c 位数不超过 2.

$9\leqslant d\leqslant2\times9=18$

∴　$d=9$　或　$d=18$.

若 $d=18$，则 $c=99$，此外 $c>45$，这不可能.

∴　$d=9$.

A－5　设 $x=0.1234567\cdots999$ 中的数字是由依次地写下整数 1 到 999 而得到的，那么小数点右边第 1983 位数字是____.

解　令 a 表示小数点右边第 1983 个数字，则把小数点右边第 1 个数字到 a 这个数分成如下三段：

$$\underbrace{123\cdots9}_{A}\underbrace{1011\cdots99}_{B}\underbrace{100\ 101\cdots a}_{C}$$

其中 A 段中共九个数字，B 段中共 $2\times90=180$ 个数字，C 段中有 $1983-189=1794$ 个数字，而 $1794\div3$ 得商数 598，余数为 0，于是 C 段是从 100 到 999 中前 598 个三位数组成，由于第一个三位数是 100，不是 101，所以第 598 个三位数应是 697，所以 $a=7$.

A－6　将下面除法算式中的"＊"号换成适当的数字

$$\begin{array}{r}
*\ 8\ *\\
**\,\overline{)\,*\ *\ *\ *\ *}\\
-)\ *\ *\ *\\
\hline
*\ *\ *\\
-)\ *\ *\\
\hline
*\ *\ *\\
-)\ *\ *\ *\\
\hline
0
\end{array}$$

解　除数乘以 8 得两位数，可知除数不大于 12. 又由除数乘以商的首位数或末位数均为三位数，可知除数不小于 12.

因此，除数为 12.

而由 12 乘以商的首位数或末位数为三位数，所以其首位数，末位数均为 9，即商为 989.

被除数为　$12\times989=11868$.

A－7　试求所有满足下列条件的六位整数 $\overline{abcdef}$：

$$\overline{abcdef}\times3=\overline{efabcd}.$$

这里 a,b,c,d,e,f 表示不同的数码，且 $a\cdot e\neq0$.

解　令 $\overline{abcd}=x,\overline{ef}=y$.

依题意有

$3(100x+y)=10000y+x$,

即 $299x=9997y$.

从而有

$$\frac{x}{769}=\frac{y}{23}=k,k\in N.$$

于是，$x=769k,y=23k$.

但 $a\neq0$，而 y 为二位整数，故只有 $k=2,3$ 或 4.

即所求六位数为　153846，229769 或 307692.

A－8　计算器上有一个四位数。若把计算器倒放，这个数可看成另一个四位数，但结果比原来的数大了 6873。问原数是多少。

解　若原数是 $ABCD$，倒看后成为 $EFGH$，则有下式。（显然 $A\neq0$）

$$\begin{array}{r}
A\ B\ C\ D\\
+)\ 6\ 8\ 7\ 3\\
\hline
E\ F\ G\ H
\end{array}$$

计算器上数字倒看也能成数的只有 0、1、2、5、6、8、9。由上算式可知 $A\leqslant3$，即 A 只能是 2 或 1。若 A 是 2，则 H 也应是 2，D 就应是 9，而 E 是 6，但 $E>6$，矛盾。故 A 只能是 1，H 是 1，D 是 8，E 是 8。于是得新算式如下。由算式，B 可能是 2、5、6、8、9。

$$\begin{array}{r}
1\ B\ C\ 8\\
6\ 8\ 7\ 3\\
\hline
8\ F\ G\ 1
\end{array}$$

若 B 是 2，则 G 是 $2C$，是 4，但 4 倒看不是数字，故 B 不能是 2。同样可确定 B 不是 5、6、8，只能是 9，这时 G 是 6，C 是 8，F 是 8。算式正确。故原数是 1 988。

A－9　有甲、乙两个四位数. 乙数的常用对数为 $A+\lg B$，其中 A、B 为自然数；甲的千位数字与百位数字之和等于 $5B$，甲数个位数字与十位数字之和等于乙数减去甲数的差再加上 B. 求两数.

解　设甲数为 $xyzu$，（x,y,z,u 均为一位自然数）.

由 $x+y=5B$，用数位数字定域：

$0<x+y\leqslant18$，即 $5B\leqslant18$.

可知 $1\leqslant B\leqslant3$，于是乙数为 $B\times10^A$ 且 $A=3$.

因乙数－甲数 $=z+u-2\leqslant18-2=16$，故甲数千位数字 $x=B-1$，百位数字 $y=9$. 有 $9+(B-1)=5B$，$B=2$，故乙数是 2000. 从而，$x=1,y=9$. 又 $(9-z)\times10+(10-u)=z+u-2$，即 $11z+2u=102$，有 $u=\dfrac{102-11z}{2}$. 由 u 数位定域得：$1\leqslant u\leqslant9$.

所以 $7\leqslant z\leqslant9$.

又 z 必须为偶数，故得 $z=8,u=7$.

最后得甲数为 1987，乙数为 2000.

A－10　已知某三位整数是 5 的倍数，其各位数字和是 20，一位数字与百位数字的和是 3 的倍数，求此整数.

解　设所求的三位整数为

$N=100x+10y+z$.

因为已知 N 是 5 的倍数，所以必有 $z=0$ 或 $z=5$. 又已知 N 的各位数字和是 20，所以

$$x+y+z=20.$$

如果 $z=0$，则 $x+y=20$.　①
由于 $1\leqslant x\leqslant 9$，$0\leqslant y\leqslant 9$，所以 $1\leqslant x+y\leqslant 18$，与①矛盾. 只有 $z=5$，此时 $x+y=15$，$y=15-x\leqslant 9$，$6\leqslant x\leqslant 9$. 又已知 $x+z=x+5$ 是 3 的倍数，所以 $x=7$，于是 $y=8$.

故所求三位整数是 785.

A－11　一个四位数是奇数，它的首位数字小于其余各位数字，第二位数字大于其余各位数字，第三位数字等于首末两位数字的和的两倍。求证：这样的四位数只能是 1983.

证　由于这个四位数是奇数，所以它的末位数字一定是奇数，而首位数字至少应是 1。且由于首位数字小于其余各位数字，因而末位数字应不小于 3。又由于首末两位数字的和的两倍等于第三位数字，即不大于 9，所以首位数字只能是 1，末位数字只能是 3，而第三位数字是 $(1+3)\times 2=8$。再由于第二位数字大于其余各位数字，所以只能是 9。故这样的四位数只能是 1983.

A－12　若一个两位数，加上 2 之后的各位数字之和只有原数字和的一半，求所有这样的两位数.

解　设此两位数为 $A=\overline{xy}$，则

$$A=10x+y.$$

其中 x 从 $\{1,2,\cdots,9\}$ 中取值，y 从 $\{0,1,\cdots,9\}$ 中取值.

依题意 $\overline{xy}+2$ 的数字和比 $\overline{xy}$ 的数字和减少，因而

$\overline{xy}+2=10x+y+2=10(x+1)+(y+2-10)$.

即十位数为 $x+1$，个位数为 $y+2-10$.

则由题意得 $(x+1)+(y+2-10)=\frac{1}{2}(x+y)$.

$\therefore$　　$x+y=14$.

这样所得的两位数可能为 68，86，59，95. 经检验，86，95 均不合题意，于是所求的两位数 68 和 59.

A－13　一个数的末位数字是 7，若将 7 移到头一位上去，其它数字的顺序不动，则所得的新数恰为原数的 7 倍，求该数中的最小者.

解　设原数为 $\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0}$ 并设 $x=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_1}$。

则原数为 $10x+7$，新数为 $7\cdot 10^m+x$.

依题意得　　$7\cdot 10^m+x=7(10x+7)$.

$$7\cdot 10^m=69x+49.$$

于是，数 $700\cdots0$ 被 69 除，遇到第一个余数为 49 的数，即为 x.

计算得　$x=10144927536231884057 9$.
所求的最小数为 1014492753623188405797.

A－14　今有一个三位数，其各位数字不尽相同，如将此三位数的各位数字重新排列，必可得一个最大数和一个最小数(例如，427，经重新排列得最大数 742，最小数为 247). 如果所得最大数与最小数之差就是原来的那个三位数，试求这个三位数.

解　设所求的三位数为 xyz，经过排列所得最大数为 ABC($A\geqslant B\geqslant C$，其中两个等号不能同时成立)，则最小数必为 CBA. 由题意应有 $ABC-CBA=xyz$，由于 $C<A$，则从上式得

$$\begin{cases}10+C-A=z & (1)\\ 10+(B-1)-B=y & (2)\\ (A-1)-C=x & (3)\end{cases}$$

由(2)式得　$y=9\Rightarrow A=9$，代入(1)式得 $z=C+1\neq C\Rightarrow z=B$，$x=C$，代入(3)式得 $x=4\Rightarrow C=4\Rightarrow z=5$，故所求三位数为 495.

A－15　将自然数 N 接写在每一个自然数的右面(例如，将 2 接写在 35 的右面得 352)，如果得到的新数都能被 N 整除，那么 N 称为魔术数. 在小于 130 的自然数中，魔术数的个数为____.

解　任取自然数 P，魔术数为 N. 设 N 为 m 位数，并将接写后的数写作 $\overline{PN}$，

则 $\overline{PN}=P\times 10^m+N$.

$\because \overline{PN}$ 能被 N 整除 $\Rightarrow P\times 10^m$ 能被 N 整除，

$\therefore N$ 为魔术数的条件是 10^m 能被 N 整除.

当 $m=1$ 时，$N=1,2,5$；

当 $m=2$ 时，$N=10,20,25,50$；

当 $m=3$，且 $N<130$ 时，$N=100,125$.

故小于 130 的魔术数有九个.

A－16　令 $\overline{abc}=100a+10b+c$. 在印刷时，将乘式

$$\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}$$

排成一行. 但是活字版散开了，乘式数字移动了，结果把乘积错印成 234235286. 已知 $a>b>c$，乘积的个位数字 6 是正确的. 试求真实的乘积.

解　设 $n=\overline{abc}$，N 是要求的乘积. 如果 $c=1$，那么最大的可能值 n(即 981)给出乘积 $N=159080922$. 但这太小，因此

$$982 \leqslant n \leqslant 987.$$

N 的数字之和为

$$35 \equiv 2 (\bmod 3),$$

所以,n 与 n 的数字颠倒后得到的数被 3 除时都有余数 2. 这就是说,n 或者为 986、或者为 983. 但是只有当 $n=983$ 时,N 的个位数才是 6. 由此得出,正确的排法应是

$$983 \cdot 839 \cdot 398 = 328245326.$$

A－17 求一最小的自然数,使得将这个数的末位数字移到第一位上时,所得到的数是原数的 5 倍.

解 设所求的数为 $\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$. 根据已知条件,得到

$$\overline{a_na_1a_2\cdots a_{n-1}} = 5 \cdot \overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}.$$

则 $a_n \cdot 10^{n-1} + \overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$

$$= 5(\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}} \cdot 10 + a_n),$$

$$a_n \cdot (10^{n-1} - 5) = 49\ \overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}},$$

$$a_n \cdot \underbrace{99\cdots9}_{n-2\text{个}}5 = 49 \cdot \overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}}. \qquad (1)$$

$\because a_n$ 是数字,$\therefore 49 \nmid a_n$,则 $7 \mid \underbrace{99\cdots9}_{n-2\text{个}}5$.

在 $99\cdots95$ 形式的数中,能被 7 整除的最小数是 99995,这时 $n=6$. 这样 (1) 式为 $a_6 \cdot 99995 = 49 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, 即 $a_6 \cdot 14285 = 7 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. 由 $7 \nmid 14285$, 得 $a_6=7$, 且 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=14285$. 所以 142857 为所求之数.

A－18 证明 $\underbrace{11\cdots1}_{1983}\underbrace{22\cdots2}_{1983}$ 是两个连续自然数的积.

证 先考虑一般的情况.

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}} = \underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}} \times 1\underbrace{00\cdots0}_{n-1\text{个}}2$$

$$= \underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}} \times (\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}} + 3)$$

$$= \underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}} \times 3 \cdot (\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}} + 1)$$

$$= \underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}} \times \underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{个}}4.$$

当 $n=1983$ 时,

$$\underbrace{11\cdots1}_{1982\text{个}}\underbrace{22\cdots2}_{1983\text{个}} = \underbrace{33\cdots3}_{1983\text{个}} \times \underbrace{33\cdots3}_{1982\text{个}}4.$$

故原数是两个连续自然数的积.

A－19 求 $S=1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots 1987$ 的值的最后三位数字.

解 我们用 $x \equiv y (\bmod 1000)$ 表示正整数 x、y 的末三位数字相同,易见 $(1000+x)(1000+y) \equiv xy$, $(1000-x)(1000-y) \equiv xy$, $(0<x, y<1000)$, $(\bmod 1000)$. 因此

$$S = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 987)(1001 \cdot 1003 \cdot 1005 \cdot \cdots \cdot 1987)(989 \cdot 991 \cdot 993 \cdot 995 \cdot 997 \cdot 999)$$

$$\equiv (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 987)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 987)(11 \cdot 9)(7 \cdot 5)(3 \cdot 1)$$

$$= (5A)(5A) \cdot 10395 \equiv 25A^2 \cdot 395$$

$$= 125A^2 \cdot 79$$

$$= A^2 \cdot 125(72+7) \equiv A^2 \cdot 125 \cdot 7,$$

$$(\bmod 1000).$$

其中 $A=2B+1$ 为奇数,$A^2=4B^2+4B+1=4B(B+1)+1=8C+1$,$B$,$C$ 为正整数.

$$\therefore\quad S \equiv A^2 \cdot 125 \cdot 7 = 125(8C+1) \cdot 7$$

$$\equiv 125 \cdot 1 \cdot 7 = 875, (\bmod 1000).$$

所以 S 的值的最后三位数字是 875.

A－20 有一个数,它是相继三个奇数的乘积,但其首位数是 4,第二位数是 6,末位数是 3. 试求出此数.

解 三个相继奇数之积的末位数码是 3,则三个奇数的末位数必是 7,9,1,在此情形,它们的积可写成

$$(10n+7)(10n+9)(10n+11)$$

$$= (10n+9)^3 - 4(10n+9).$$

n 只要取得能使 $(10n+9)^3$ 的首两位数码是 4、6,并且取得足够大以使被减数不影响最高位的数码.

因为

$$3.5^3 < 46 < 3.6^3,$$

$$\therefore\quad 350^3 < 46 \cdot 10^6 < 360^3.$$

故知唯一可尝试的是 $n=35$.

$$357 \cdot 359 \cdot 361 = 46266843.$$

经验算满足条件,从这个解显然可知命题有无穷多个解.

A－21 试求:目前已知最大素数 $2^{86243}-1$ 的末四位数字.

解 $2^{86243} = 2^3 \times 2^{10 \cdot 8624}$

$$= 2^3 \times (1025-1)^{8624}$$

$$= 2^3 \times (1025^{8624} - \cdots - 8624 \times 1025 + 1)$$

$$= 2^3(1025^2M - 8624 \times 1025 + 1)$$

由于括号内应是偶数,故 M 应是奇数.

设 $\qquad M = 2k+9$

则　$2^{86243}=2^3[1025^2\times(2k+9)-8624\times1025+1]$

$=2^4\times1025^2k\times2^3\times[(9225-8624)\times1025+1]$

$=1618k\times10^4+8\times616026$

$=1681k\times10^4+4928208$

所以 $2^{86243}-1$ 的末四位数是 8,2,0,7.

A－22　从十个英文字母 A,B,C,D,E,F,G,X,Y,Z 中任选五个字母(字母允许重复)组成一个"词"。将所有的可能的"词"按"字典次序"(即英汉辞典中英语词汇排列的次序)排列,得到一个词表:

$AAAAA$, $AAAAB$, $AAAAC$, …, $AAAAZ$, $AAABB$, $AAABB$, …, $DEGXY$, $DEGYA$, …, $ZZZZY$, $ZZZZZ$.

设位于词 $CYZGB$ 与 $XEFDA$(这两词本身除外)之间的词的个数是 K,试写出表中第 K 个词,并加以说明。

解　为了研究方便,将十个英文字母 A,B,C,D,E,F,G,X,Y,Z 依次对应十个数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,则"词表"可改写如下的"五位数表":

00000, 00001, 00002, …, 00009, 00010, 00011, …, 00009, 00010, 00011, …, 34679, 34680, …, 99998, 99999。(注:把"00000","00015"等看作"五位数",这与普通五位数概念不同。)

因此 $CYZGB$ 对应 28961, $XEFDA$ 对应 74530,这两个词之间的词的个数,就等于五位数 28961 与 74530 之间的五位数的个数,即 $K=(74530-1)-28961=45568$. 由于 00000 是改写的"五位数表"中的第一个数,所以该数表中的第 K 个"五位数"是 $45568-1=45567$,它对应原词表中第 K 个词应是 $EFFGX$.

A－23　求一个四位数,它的逆序排列后的数 4 倍恰好等于这个原数.

解　假定拟求的四位数 $\overline{xyzt}$ ($x\neq0$, y,z,t 是整数)存在. 此时

$$4\cdot\overline{xyzt}=\overline{tzyx}. \tag{1}$$

由于 $4\cdot\overline{xyzt}\geqslant4x\cdot1000$,

$\overline{tzyx}<(t+1)1000$,从而推出 $4x<t+1$,又因 $t\leqslant9$,所以 $4x<10$,即 $x=1$ 或 $x=2$. 但 $x=1$ 是不可能的,因为此时等式(1)的右边是奇数,要与左边相等,必须被 4 整除. 因此只有唯一的可能 $x=2$. 当 $t>7$ 时,有 $t=8$ 或 $t=9$. 但 $t=9$ 是不能的,因为此时(1)式左边末位数是 6,而右边是 2,不能使(1)式成立. 因此 $t=8$.

将 $x=2$, $t=8$ 代入方程(1),经过简单的变换得到 $40y+4z+3=10z+y$,即 $13y+1=2z$. 因 $z\leqslant9$,推出 $13y\leqslant17$,即得 $y=0$ 或 $y=1$. 当 $y=0$ 时显然不可能,而当 $y=1$ 时 $z=7$. 因此所求的数是 2178.

检验: $4\cdot2178=8712$.

A－24　试求这样的自然数,它的末位数码移到首位数码后所构成的数等于原数的二倍.

解　设 n 位数 N 满足命题的条件, a 为末位数码, m 为其余下数码组成的数,由条件, $2(10m+a)=10^{n-1}a+m$,或

$$19m=(10^{n-1}-2)a.$$

计算 10^k 除以 19 的余数,在 $0\leqslant k<18$ 的情形下, 10^k-2 只有当 $k=17$ 时可被 19 整除. 通过计算还可指出,只有 10^{18} 除以 19 时给出余数为 1. 现若 $10^{n-1}-2$ 可被 19 整除,且 $n-1=18q+r$,其中 $0\leqslant r<18$,则

$10^{n-1}-2=(10^{18})^q10^r-2=(19s+1)\cdot10^r-2=10^r-2+19s\cdot10^r$,由此 10^r-2 被 19 整除,推出 $r=17$, $n=18q+18$.

因此得到

$$N=10\cdot\frac{10^{18q+17}-2}{19}+a.$$

($2\leqslant a\leqslant9$, $q\in N$). ($a\neq1$,因为在相反情形下, N 是由数码比 $2N$ 小的最小数组成).

A－25　某两位数,它的各位数字之和的立方等于它的平方,这样的两位数是____.

解　注意到平方数的尾数为 0,1,4,5,6,9,设两位数各位数字之和为 S,则 $1\leqslant s\leqslant18$.

(1)设 s^3 的尾数为 0,则 $s=10$, $s^3=1000$,但 $\sqrt{1000}$ 非整数;

(2)设 s^3 的尾数为 1,则 $s=1$ 或 11(质数,不合条件);

(3)设 s^3 的尾数为 4,则 $s=4$ 或 14, $\sqrt{4^3}=8$ 非两位数, $\sqrt{14^3}$ 非整数,不合条件;

(4)设 s^3 的尾数为 5,则 $s=5$ 或 15, $\sqrt{15^3}$ 均非整数,不合条件;

(5)设 S^3 的尾数为 6,则 $S=6$ 或 16, $\sqrt{6^3}$ 非整数; $\sqrt{16^3}=64$,但 $6+4\neq16$,不合条件;

(6)设 s^3 尾数为 9,则 $s=90$, $\sqrt{9^3}=27$. 又 $2+7=9$.

故这样的两位数是 27.

A－26 从 1 开始，依自然数的顺序写：1234567891011…2021…，一直写到 2222，试问共写了多少个 0。

分析 就“0”所处的位数可分三种情形，个位数上的“0”；十位数上的“0”；百位数上的“0”，千位数上显然无“0”。

解 ①计算个位数上的“0”的个数：由于前 9 个数 1，2，3，…9 无个位 0，去掉这 9 个数还剩 2222－9＝2213 个数，从 10 开始，每隔 10 个数有一个个位 0。因为 2213＝221×10＋3，故有 222 个个位数 0；

②计算十位数上的“0”的个数：从 99 开始，由于头 99 个数（即 1，2…99）无十位数“0”，剩下的 2222－99＝2123 个数每 100 个数中有 10 个十位数“0”（如 100，101，…109 中有 10 个十位数“0”），由于 2123＝21×100＋23，故十位数“0”共 220 个；

③计算百位数上的“0”的个数：仿上，开头 999 个数无百位数“0”，剩下的 1223 个数中每 1000 个数中有 100 个百位数“0”，而且在头 100 个数，由于 1223＝1000×1＋223，故百位数“0”共 200 个（因为要写到 2222）。

综上可知，所求的“0”的个数为 642 个。

A－27 求出所有的正整数 x. 它的各位数字之积为 $x^2-10x-22$.

解 设 x 为 n 位数，若 $n\geqslant 3$，则其数字的积$\leqslant 9^n$，而

$x^2-10x-22=x(x-10)-22$

$\geqslant 10^{n-1}(10^{n-1}-10)-22>10^{n-1}\times(100-10-1)>9^2\times 10^{n-1}>9^{n+1}$.

因此，$n\leqslant 2$. 若 $n=1$，则

$$x^2-10x-22<x(x-10)<0$$

因此，$n=2$ 设 x 的十倍数字为 a、个位数字为 b，若 $a\geqslant 2$，则

$x^2-10x-22=x(10a+b-10)-22$

$>x(10+b)-22>x(8+b)>ab$

因此 $a=1$，由 $b=(10+b)b-22$.

解得 $b=2$，因此 $x=12$.

A－28 一个七进制的三位数，若以九进制表示，则其数字的顺序恰与原数相反，求此数.

解 在七进制中，令此数的三个数字顺序为 x，y，z，则根据题意可得

$$49x+7y+z=81z+9y+x,$$

即 $24x-y-40z=0$,

$$y=8(3x-5z).$$

由于 y 一定小于 7，且 $3x-5z$ 为整数，因此，$y=0$，$3x-5z=0$ 才能使上式成立. 从而 $\frac{x}{5}=\frac{z}{3}=k$，即 $x=5k$，$z=3k$. 又 x，z 都小于 7，所以 $k=1$，故得 $x=5$，$y=0$，$z=3$.

A－29 某数为三个质因数之积. 这三个质因数的平方和为 2331，有数 7560 小于此数且与之为互质数，又其约数（1 及本身在内）之积为 10560. 求此数.

解 设 a，b，c 为此数的因子，则

$$a^2+b^2+c^2=2331. \qquad ①$$

另外，我们知道，小于此数且与之互质的整数为

$$abc\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right),$$

即 $(a-1)(b-1)(c-1)=7560.$ ②

再据题意可知

$$(a+1)(b+1)(c+1)=10560. \qquad ③$$

从②、③相加相减得：

$$abc+a+b+c=9060. \qquad ④$$

和 $$bc+ca+ab+1=1500. \qquad ⑤$$

从①与⑤式得

$$(a+b+c)^2=5329.$$

故 $a+b+c=73$.

再从④式可得

$$abc=8987=11\cdot 19\cdot 43.$$

A－30 设 1987 可以在 b 进制中写成三位数 $\overline{xyz}$，且 $x+y+z=1+9+8+7$. 试确定出所有可能的 x，y，z 及 b.

解 由题设有

$$xb^2+yb+z=1987 \quad (x\geqslant 1) \qquad (1)$$

故 $b^3>1987$. 又 $b^2<1987$，所以 $12<b<45$.

再由题设，有

$$x+y+z=25 \qquad (2)$$

(2)－(1)得

$$(b-1)(bx+y)=1962,$$

所以 $(b-1)\mid 1962=2\times 9\times 109$,

因 $12<b<45$，所以 $b-1=2\times 9=18$，再由下边算式可知 $1987=5\times 19^2+9\times 19+11$,

所以 $x=5$，$y=9$，$z=11$.

$$\begin{array}{r|l l}
19 & 1987 & \\
\hline
19 & 104 & \cdots 11 \\
\hline
 & 5 & \cdots 9
\end{array}$$

A－31 已知由 6 个数组成的和(不重复)给出 63 个连续自然数,试求这 6 个数.

解 我们按不减次序把未知数排列成:$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_6$. 由数 $x_1,\cdots,x_6$ 中一些数组成的和可表示成

$$\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_6x_6, \qquad (1)$$

其中 $\varepsilon_i=0,1,\varepsilon_i$ 中至少有一个不为 0. 形如(1)的表达式恰好有 $2^6-1=63$ 个. 按照题目的条件,它们可以改写成:$x_0+1,x_0+2,\cdots,x_0+63$. 这就是说,所有的表达式(1)都不一样. 于是 $x_1<x_2<\cdots<x_6,x_0+1=x_1,x_0+63=x_1+x_2+\cdots+x_6,x_0+62=x_2+\cdots+x_6$. 比较最后两个等式,得 $x_1=1$. 于是 $x_0=0,x_2=2,x_1+x_2=3,x_3=4$. 假设数 $x_1,\cdots,x_k(k\leqslant5)$已被求出,表达式 $\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_kx_k$(其中 k 满足以前的限制)给出数 $1,2,\cdots,2^k-1$. 于是 $x_{k+1}=2^k$,并且在 ε_i 取那些值时,表达式 $\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_{k+1}x_{k+1}$ 给出全部数 $1,2,\cdots,2^{k+1}-1$. 从而依次求出:$x_4=2^3,x_5=2^4,x_6=2^5$.

A－32 把各位数字均不超过 5 的自然数称为"好数",证明:对于任意的自然数 x,在半开区间 $\left[x,\frac{9}{5}x\right)$ 内一定有一个好数.

证 设 n 是一个好数,又设在大于 n 的好数中,m 是最小的,即 m 是在 n 后面出现的第一个好数,下面考虑比值$\frac{m-1}{n}$的大小.

记 $n=\overline{a_ra_{r-1}\cdots a_0}$,其中 r 为非负整数,$a_0,a_1,\cdots,a_r\in\{0,1,2,3,4,5\}$且 $a_r\neq0$.

(i)存在某个 $a_i<5,o\leqslant i<4$;

由于 $a_i+1\leqslant5$,所以 $n'=\overline{a_r\cdots(a_i+1)\cdots a_0}$也是好数,从而$\frac{m-1}{n}<\frac{n'}{n}=1+\frac{10^i}{10}\leqslant1+\frac{1}{10}<\frac{9}{5}$;

(ii)$n=\overline{a_r55\cdots5},a_r<5$,

这时 $n'=\overline{(a_r+1)55\cdots5}$也是好数,从而

$$\frac{m-1}{n}<\frac{n'}{n}=1+\frac{10^r}{n}<1+\frac{10}{15}<\frac{9}{5};$$

(iii)$n=\underbrace{\overline{55\cdots5}}_{r\text{ 个 }5}$,从而由 $m=10^{r+1}$有

$$\frac{m-1}{n}=\frac{\overbrace{99\cdots9}^{r\text{ 个}}}{\underbrace{55\cdots5}_{r\text{ 个}}}=\frac{9}{5}$$

综上所述,$\frac{m-1}{n}\leqslant\frac{9}{5}$

因此在半开区间$\left[x,\frac{9}{5}x\right)$内一定有一个好数.

A－33 求一个最小自然数,使得当将这个数的末位数字移到第一位上时,所得的数是原数的五倍。

解 设所求的数为$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$,其中的 a_i 表示第 i 位数字。按已知有

$$\overline{a_na_1a_2\cdots a_{n-1}}=5\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}.$$

上式可以改定为

$$a_n\cdots10^{n-1}+\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$$
$$=5[\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\times10+a_n],$$
$$a_n(10^{n-1}-5)$$
$$=49\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}},$$
$$a_n\cdot\underbrace{99\cdots9}_{n-2\text{ 个}}5=49\cdot a_1a_2\cdots a_{n-1}, \qquad (1)$$

因 a_n 是一个数字,不可能被两位数的 49 整除,所以 $7|99\cdots95$。而在 $99\cdots95$ 形式的所有 $n-2$ 个数中,能被 7 整除的最小数是 99995,这时 $n=6$. 又因 99995 不能被 49 整除,故由(1)知 $a_n=7$. 于是(1)式化为

$$7\times99995=49\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_5}. \qquad (2)$$

由(2)解得

$$\overline{a_1a_2\cdots a_5}=14285.$$

A－34 用十进位制表示时,整数 a 由 1985 个 8 组成,而整数 b 由 1985 个 5 组成。问整数 $9ab$ 的十进位表示式中各位数字之和是多少?

(A)15880; (B)17856; (C)17865;

(D)17874; (E)19851.

解 由于 $9ab$ 的末位是一个零,所以它的数字和与数 $N=\frac{9ab}{10}$的数字和相同。另外,若数 M 是由 k 个数字 d(d 为阿拉伯数码)排成一行而成的数,则

$$M=\underbrace{ddd\cdots d}_{k\text{ 个}}=\frac{d}{9}(\underbrace{999\cdots99}_{k\text{ 个}})$$
$$=\frac{d}{9}(10^k-1).$$

$$\text{于是},N=\frac{9ab}{10}$$
$$=\frac{9}{10}\left[\frac{8}{9}(10^{1985}-1)\right]\cdot\left[\frac{5}{9}(10^{1985}-1)\right]$$
$$=\frac{4}{9}[10^{2\cdot1985}-2\cdot10^{1985}+1]$$
$$=\frac{4}{9}[(10^{2\cdot1985}-1)-2(10^{1985}-1)]$$
$$=\frac{4}{9}(10^{2\cdot1985}-1)-\frac{8}{9}(10^{1985}-1)$$
$$=P-Q.$$

其中 P 由 $2\cdot1985$ 个 4 组成,Q 由 1985 个 8 组成。将此两数相减,可看出 N 是由 1984 个 4,1 个 3,

1984 个 5，1 个 6 组成，于是 N 的数字和是 $1984(4+5)+3+6=1985\times 9=17865$.　　(C)真.

A－35　已知数列

$$x_n=\underbrace{aa\cdots a}_{n}\underbrace{abb\cdots b}_{n}b+1,n=1,2,\cdots$$

试求出 a,b,c 的值，使对于所有的自然数 n 均有

$$\underbrace{aa\cdots aa}_{n}\underbrace{bb\cdots bb}_{n}+1=(\underbrace{cc\cdots cc}_{n}+1)^2$$

成立，这里 a,b,c 代表 0，1，2，…，9 中的数字。

解　设对于所有的自然数 n，有

$$\underbrace{aa\cdots aa}_{n}\underbrace{bb\cdots bb}_{n}+1=(\underbrace{cc\cdots cc}_{n}+1)^2$$

即　$a\times\underbrace{11\cdots 11}_{n}\times 10^n+b\times\underbrace{11\cdots 11}_{n}+1$

$=(c\times\underbrace{11\cdots 11}_{n}+1)^2$，

令

$\underbrace{11\cdots 11}_{n}=m$，则 $10^n=9\times\underbrace{11\cdots 11}_{n}+1=9m+1$，

∴　$m(9m+1)a+mb+1=m^2c^2+2mc+1$，

$(9m+1)a+b=mc^2+2c$　　(1)

因(1)对于所有的自然数 n 均成立，故

令 $n=1$(此时 $m=1$)，有 $10a+b=c^2+2c$，

令

$n=2$(此时 $m=11$)，有 $100a+b=11c^2+2c$，　　(3)

(3)－(2)

$90a=10c^2$，∴　$c=\sqrt{9a}=3\sqrt{a}$　　(4)

由于 $a,b,c\in\{0,1,\cdots,9\}$，故在(4)中 a 只能为平方数，即

$a=0,1,4$ 或 9，

由(4)、(2)得对应的 c,b 为

$c=0,3,6$ 或 9，$b=0,5,8$ 或 9.

故 a,b,c 的值为：

(0，0，0)，(1，5，3)，(4，8，6)，(9，9，9).

A－36　计算：

①$\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}\times\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}+\underbrace{199\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}$

②$\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{2n\text{位}}-\underbrace{22\cdots\cdots 2}_{n\text{位}}}$

解

①　$\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}\times\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}+\underbrace{199\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}$

$=\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}\times\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}$

$+\underbrace{100\cdots\cdots 0}_{n\text{位}}+\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}$

$=\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}\times(\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}+1)+10^n$

$=\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}\times 10^n+10^n$

$=10^n\times(99\cdots\cdots 9+1)$

$=10^n\times\underbrace{100\cdots\cdots 0}_{n\text{位}}$

$10^n\times 10^n=10^{2n}$.

②　$\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{2n\text{位}}-\underbrace{22\cdots\cdots 2}_{n\text{位}}}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}\underbrace{000\cdots\cdots 0}_{n\text{位}}+\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}-\underbrace{22\cdots\cdots 2}_{n\text{位}}}$

$\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}\times 10^n+(\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}-\underbrace{22\cdots\cdots 2}_{n\text{位}})}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}\times 10^n-\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}\times(10^n-1)}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}\times\underbrace{99\cdots\cdots 9}_{n\text{位}}}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}\times\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}\times 9}$

$=\sqrt{9\times(\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}})^2}$

$=3\times\underbrace{11\cdots\cdots 1}_{n\text{位}}$

$=\underbrace{33\cdots\cdots 3}_{n\text{位}}$.

A－37　从 1 开始顺次写出一切自然数，构成数 $N=12\cdots 910\cdots 99100\cdots 9991000\cdots 999910000\cdots$ 试问在 N 中从左向右第 32454 个位置上是个什么数字？

解　易知 N 中共有：9 个一位数；$99-9=90$ 个两位数；$999-99=900$ 个三位数；……；$9\times 10^{n-1}$ 个 n 位数。且所有的一位数共占 9 个位置；所有的二位数

共占 $2\times90=180$ 个位置；所有的三位数共占 $3\times900=2700$ 个位置；所有四位数共占 $4\times9000=36000$ 个位置，因 $9+2\times90+3\times900=2889<32454<2889+36000$ 可见第 32454 个位置上的数字一定属于某个四位数中的数字

又因 $32454-2889=29565=4\times7391+1$ 可见，数 N 中在第 32454 个位置上恰是四位数区段：100010011002……9999 中第 7391 个四位数的“后继四位数”的最高数位上的数字，再由等差数列，可求出在四位数区段中第 7391 个四位数为

$$a_{7391}=100+(7391-1)\cdot1=8390$$

因之，第 7391 个四位数的“后继数”为 8391，所以，数 N 中第 32454 个位置上的数字为 8.

A－38 已知四个正整数 a,b,c,d 满足 $c<d<a<b$，两两相加得和为 26，29，35，93，99，102.

求 $100a+b,100c+d$.

解法一 由已知可得

$$c+d=26, \quad ①$$

$$c+a=29, \quad ②$$

$$d+b=99, \quad ③$$

$$a+b=102, \quad ④$$

$$a=d=30 \text{ 或 } a+d=93 \quad ⑤$$

由①、②得 $a-d=3$.

若 $a+d=35$，则 $a=19,d=16$；

若 $a+d=93$，则 $a=48,d=45$，这与已知不符，所以 $a+b\neq93$.

∴ $a=19$、$b=16$.

将 $d=16$ 代入①、③得 $c=10,b=83$.

∴ $a=19,b=83,c=10,d=16$.

∴ $100a+b=1983,100c+d=1016$.

解法二 ∵ $c<d<a$，

∴ $b+c<b+d<a+b$.

又 $d<a<b$

∴ $c+d<a+c<b+c$.

故 $c+d<a+c<b+c<b+d<a+b$.

这里只少 $a+d$.

∵ $c<d$，

∴ $a+c<a+d$.

又 $a<b$，

∴ $a+d<b+d$.

∴ $a+d$ 与 $b+c$ 都介于 $a+c,b+d$ 之间.

可知 $c+d=26,a+c=29,b+d=99,a+b=102$.

如设 $a+d=93$，则 $b+c=35$.

解得 $c=-19$(不合题意)，故 $a+d\neq93$.

∴ $a+d=35,b+c=93$.

解得 $a=19,b=83,c=10,d=16$.

∴ $10a+b=1983.10c+d=1016$.

A－39 一个八位数 19□□□□83 能被 1983 整除，求这个八位数.

解 设 $A=19□□□□83=19abcd83$，其中 a,b,c,d 分别是 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 中的某一数字.

$$\frac{A}{1983}=\frac{19000083+abcd00}{1983}$$

$$=9581+\frac{960+abcd00}{1983}$$

$$=9581+\frac{10(96+abcd0)}{1983}.$$

由题意，$1983\mid10(96+abcd0)$，而 $(10,1983)=1$，可知 $1983\mid(96+abcd0)$.

设 $\frac{96+abcd0}{1983}=k$，则 $abcd0=1983k-96$.

只有当 k 的个位数字是 2 时，$1983k-96$ 的个位数才是 0，不难算得

当 $k=2$ 时，$abcd=0387$；

当 $k=12$ 时，$abcd=2370$；

当 $k=22$ 时，$abcd=4353$；

当 $k=32$ 时，$abcd=6336$；

当 $k=42$ 时，$abcd=8319$；

当 $k\geqslant52$ 时，$abcd=10000$ 不合题意.

由此可知，原题有五解，即所求的八位数是：19038783，19237083，19435383，19633683，19831983.

A－40 求出一个三位数，使它适合条件：把这个三位数平方后的数从右至左每隔三位截断，然后把截断后所得的几个数相加，其和恰为原来的数.

分析 因为每一个三位数平方后，在 10000 与 998001 之间. 显然把一个三位数平方后从右至左每隔三位截断，只能得到两个数.

解 设所求数平方后从右至左每三位截断，得到的数依次为 y 和 x. 即所求数的平方为 $1000x+y$，且 x 是正整数，y 是一个非负整数，由题意有：

$$(x+y)^2=1000x+y$$

即 $x^2-2(500-y)x+y^2-y=0 \quad (1)$

由求根公式得 $x=500-y\pm\sqrt{250000-999y}$，因为 x 是正整数，故 $250000-999y$ 必为平方数. 令 $250000-999y=t^2$，t 为一个非负整数 (2)

即 $(500+t)(500-t)=37\times27y$

由上式知：$(500+t)(500-t)$是 37 的倍数，但 37 是质数，故 $500+t$ 与 $500-t$ 中必有一个为 37 的倍数.

又 $y\geqslant 0$，得 $0\leqslant t\leqslant 500$.

(i)当 $500+t$ 为 37 的倍数，而 $0\leqslant t\leqslant 500$，故 t 可取 18,55,92,129,166,203,240,277,314,351,388,425,462,499. 将 t 之值代入(2)式，只有当 $t=203$ 和 499 时，y 是整数值，分别为 209,1.

当 $y=209$ 时，代入(1)式得 $x=494,88$.

当 $y=1$ 时，代入(1)式得 $x=998$.

(ii)当 $500-t$ 为 37 的倍数，而 $0\leqslant t\leqslant 500$，故 t 可取 463,426,389,352,315,278,241,204,167,130,93,56,19. 将 t 的这些值代入(2)式，得出的 y 均不是整数，故这些值不满足条件.

因此方程(1)只有三组合乎条件的解.

$$\begin{cases}x=494\\y=209\end{cases}\quad\begin{cases}x=88\\y=209\end{cases}\quad\begin{cases}x=998\\y=1\end{cases}$$

故所求的三位数为 703,297 与 999.

A－41 用 1 到 8 这 8 个数字组成两个四位数，使相乘后所得的乘积最大. 求这两个数.

分析 因为用 1 到 8 这 8 个数字组成两个四位数共有 $\frac{1}{2}\cdot 8!=20160$ 种不同的方式，显然要逐一地进行比较是非常麻烦的，考虑极端情形，要使乘积最大，大的数字应放在最高位. 因此，8 和 7 应作为千位上的数字. 同理，6 和 5 应作为百位上的数字. 这时可能有 i)86 * * 和 75 * * ;ii)85 * * 和 76 * * 两种情形，哪种情形乘积较大呢？我们考察一般情形.

解 设 A,B 为自然数，且 $A>B$，现将数码 c,d(设 $c>d$)分别添在 A,B 后面组成新数，这时有两种可能情形：i) $\overline{Ac}=A\times 10+c$ 与 $\overline{Bd}=B\times 10+d$，ii) $\overline{Ad}=A\times 10+d$ 与 $\overline{Bc}=B\times 10+c$. 现比较这两组数乘积的大小.

$$\begin{aligned}&\overline{Ac}\times\overline{Bd}-\overline{Ad}\times\overline{Bc}\\&=(A\times 10+c)(B\times 10+d)-(A\times 10+d)(B\times 10+c)\\&=10(Ad+Bc-Ac-Bd)\\&=10(A-B)(d-c)<0\end{aligned}$$

于是 $\overline{Ac}\times\overline{Bd}<\overline{Ad}\times\overline{Bc}$. 可见 $\overline{Ad}$ 与 $\overline{Bc}$ 的乘积较大. 这就是说，在组成两位数时，将 c,d 中较小的数添在 A,B 中较大的后面，将 c,d 中较大的数添在 A,B 中较小的后面，这样组成的两个数的乘积较大.

由此不难得到所求的两个四位数是 8531 与 7642.

A－42 已知 a 是自然数，且 $20000<a<30000$，a 的各位数字之和是 A，求 $\frac{a}{A}$ 的最小值

解 设 $a=20000+1000b_1+100b_2+10b_3+b_4$，则

$$\begin{aligned}\frac{a}{A}&=\frac{20000+1000b_1+100b_2+10b_3+b_4}{2+b_1+b_2+b_3+b_4}\\&=1+\frac{19998+999b_1+99b_2+9b_3}{2+b_1+b_2+b_3+b_4}\\&\geqslant 1+\frac{19998+999b_1+99b_2+9b_3}{2+b_1+b_2+b_3+9}\\&=1+\frac{19899+999b_1+99b_2+b_3}{11+b_1+b_2+b_3}\\&=10+\frac{19899+990b_1+90b_2}{11+b_1+b_2+b_3}\\&\geqslant 10+\frac{19899+990b_1+90b_2}{11+b_1+b_2+9}\\&=10+\frac{19899+990b_1+90b_2}{20+b_1+b_2}\\&=100+\frac{18099+900b_1}{20+b_1+b_2}\\&\geqslant 100+\frac{18099+900b_1}{20+b_1+9}\\&=100+\frac{18099+900b_1}{29+b_1}\\&=100+\frac{900(29+b_1)+18099-900\times 29}{29+b_1}\\&=1000-\frac{8001}{29+b_1}\\&\geqslant 1000-\frac{8001}{29+0}=724\frac{3}{29}\end{aligned}$$

易见：当且仅当 $b_4=b_3=b_2=9,b_1=0$，即 $a=20999$ 时，上述各处不等号中的等号成立，故 $\frac{a}{A}$ 的最小值是 $724\frac{3}{29}$。

A－43 已知存在正整数 n 能使 $\underbrace{11\cdots 11}_{n}$ 能被 1987 整除，求证：数

$$p=\underbrace{11\cdots 11}_{n\text{个}}\underbrace{99\cdots 99}_{n\text{个}}\underbrace{88\cdots 88}_{n\text{个}}\underbrace{77\cdots 77}_{n\text{个}}$$

和

$$q=\underbrace{11\cdots 11}_{n+1\text{个}}\underbrace{99\cdots 99}_{n+1\text{个}}\underbrace{88\cdots 88}_{n+1\text{个}}\underbrace{77\cdots 77}_{n+1\text{个}}$$

都能被 1987 整除.

证 为方便起见，设 $\underbrace{11\cdots 11}_{n\text{个}}=A$，则 $9A=\underbrace{99\cdots 99}_{n\text{个}}$，于是 $9A+1=10^n$.

$$p=A\cdot 10^{3n}+9A\cdot 10^{2n}+8A\cdot 10^n+7A$$

$=A(10^{3n}+9\cdots10^{2n}+8\cdot10^{n}+7)$

因为 A 能被 1987 整除，所以 p 能被 1987 整除.

由于 $\underbrace{11\cdots11}_{n+1\text{个}}=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}0+1=10A+1$，所以

$q=(10A+1)\cdot10^{3(n+1)}+9(10A+1)\cdot10^{2(n+1)}+8(10A+1)\cdot10^{n+1}+7(10A+1)$

$=10A\cdot10^{3(n+1)}+90A\cdot10^{2(n+1)}+80A\cdot10^{n+1}+70A+1000\cdot10^{3n}+900\cdot10^{2n}+80\cdot10^{n}+7$

$=A[10\cdot10^{3(n+1)}+90\cdot10^{2(n+1)}+80\cdot10^{n+1}+70]+1000(9A+1)^3+900(9A+1)^2+80(9A+1)+7$

由于 $(9A+1)^3$，$(9A+1)^2$，$(9A+1)$ 都是 A 的倍数加 1，所以也是 1987 的倍数加 1. 所以可把 q 写成以下形式

$$q=A\cdot N+1987$$

这里 N 为某整数，所以 q 能被 1987 整除.

A－44　设有数 1，2，…，1988，1989，把它们顺次排成一行，得一数 1234…19881989，我们首先把第一个数字乘以 2 加上第二个数字，再把所得的和乘以 2 加上第三数字，如此做下去，直到加上最后一个数字而得出一个新的数. 然后对所得到的新的数照样办理，并且把这一过程继续进行到底，最后得到一个一位数. 试求这个一位数.

解　设 $S_1=1234\cdots19881989$，并记 S_1 的位数为 $k+1$ 位，则可把它写成：

$S_1=1\times10^k+2\times10^{k-1}+3\times10^{k-2}+\cdots+8\times10+9$.

对 S_1 按题目的要求办理，逐步可得

$1\times2+2$；

$(1\times2+2)\times2+3=1\times2^2+2\times2+3$；

$(1\times2^2+2\times2+3)\times2+4$

$=1\times2^3+2\times2^2\times3\times2+4$；

……

进行到第 k 步时，可得

$S_2=1\times2^K+2\times2^{K-1}+3\times2^{K-2}+\cdots+8\times2+9$.

又　$S_1-S_2=1\times(10^K-2^K)+2\times(10^{K-1}-2^{K-1})+\cdots+8\times(10-2)$.

由于对任意的 n，10^n-2^n 被 8 整除，故 $8\mid S_1-S_2$，即 S_1 与 S_2 对 8 同余.

设 S_2 是一个 $l+1$ 位数，并设

$S_2=a_0\times10^l+a_1\times10^{l-1}+\cdots+a_{l-1}\times10+a_l$

对 S_2 按题目要求，由上面的推导可知，进行到第 l 步时，可得

$a_0\times2^l+a_1\times2^{l-1}+a_2\times2^{l-2}+\cdots+a_{l-1}\times2+a_l$.

$S_2-S_3=a_0\times(10^l-2^l)+a_1\times(10^{l-1}-2^{l-1})+\cdots+a_{l-1}\times(10-2)$.

于是 S_2 与 S_3 对 8 同余，亦即 S_3 与 S_1 对 8 同余.

如此下去，最后必得一个一位数，设这个一位数是 S，由此可知

$$S\equiv S_1(\mathrm{mod}8).$$

但 $S_1=1000M+989$，其中 $M=123\cdots19881$，而 $8\mid1000M$，989 被 8 除余 5，

故　$S_1\equiv5(\mathrm{mod}8)$. 因而 $S\equiv5(\mathrm{mod}8)$

但 S 是一位数，被 8 除余 5，故 $S=5$.

A－45　试问 999999999 乘以什么正整数时，可以得到仅有数码 1 所组成的数？

解　令所求数为 A，则

$999999999\times A=1000000000\times A-A$

$=111\cdots111$

∴　$A=1000000000A-111\cdots1111$

由 A_1 的求法，易知它满足题设要求. 如若把 $1000000000\cdot A_1$ 作被减数，重复计算上述步骤又可得到 $A_1=A_1\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}}A_1$，显然，它也满足题设要求. 循环往复，继续进行上述步骤. 我们可得

$A_n=A_1\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}}A_1\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}}A_1\cdots\cdots0A_1\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}}A_1$，　（＊）

它给出了满足题设要求之数的一般形式. 显然，满足题设要求的最小数应是 A_1.

容易看出，上式右端第一项的最后九位数字等于零，所以由式可以求出 A 的最末九位数字，把这最末九位数字代回＊式，又求出九位数字，此过程继续进行下去，先逐次九位九位地解决 A，若此过程进行至某一步，所得 A 的九位数字等于 1，那么过程可以停止. 此时，我们实际上得到了满足题设要求的最小数.

现在用竖式计算逐步确定 A，过程如下：

$$\begin{array}{r}\cdots000000000\\ -)\ 111\cdots111\\ \hline \cdots\underbrace{888\cdots}_{8\text{个}}889\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\cdots888\cdots889000000000\\ -)\ 111\cdots111111\cdots111\\ \hline \underbrace{777\cdots777}_{9\text{个}}\underbrace{888\cdots889}_{8\text{个}}\end{array}$$