MBA备考成功之路

MBA联考数学考前冲刺

主　编　北京大学　范培华
清华大学　李永乐
中国人民大学　袁荫棠
北京19中学　段发善

北京市社科赛斯MBA培训中心组织策划

中国计量出版社

MBA联考数学
考前冲刺

主　编　北 京 大 学　　范培华
　　　　清 华 大 学　　李永乐
　　　　中国人民大学　　袁荫棠
　　　　北 京 1 9 中　　段发善
总策划　北京市社科赛斯MBA培训中心

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

MBA 联考数学考前冲刺/范培华等主编 .—北京:中国计量出版社,2002.11

ISBN 7-5026-1696-9

Ⅰ.M... Ⅱ.范... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 082755

内 容 提 要

本书根据 2003 年 MBA 联考新大纲的变化,结合 MBA 数学考试特点编写而成。给出了各章节中常考知识点,同学们易错、易混淆之处,并配有典型题型。最后紧密结合 2003 年联考数学的特点,精心编制了 8 套模拟试题。本书特别适合 MBA 考生强化训练或考前冲刺。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话 (010)64275360

E-mail jlfxb@263.net.cn

北京法大印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 17 字数 412 千字

2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷

*

印数 1—3000 定价:30.00 元

前 言

2003年MBA考试大纲有不少重要的修改和变化，例如考试科目作了调整，将原来的数学、语文与逻辑合并为综合能力考试，满分为200分，其中数学占100分，语文与逻辑各为50分，考试时间是180分钟。对于数学，其考试要求是：掌握学习MBA课程必备的数学基础知识，并能综合运用所学知识分析和解决经济和管理的有关问题。同时考试题型发生重大变化，改为问题求解和条件充分性判断，全部为客观题，这些新变化考生要密切关注和适应。

不论是数学基本理论的建立，还是作数学运算或逻辑推理，无一不是以明确、清晰的概念为基础。考生要重视对概念的复习，应当从不同的角度，不同的面进行思考，准确地把握住概念的内涵，注意相关概念的联系与区别，否则解题时思维上就会出现疑惑与混乱，方法上也就有种种谬误。

数学的基础知识是进一步深造的基础，MBA历来重视对三基的考查，如果基本的数学方法没掌握，定理公式不熟悉，不仅速度上不来，而且在知识点的衔接与转换上也会有各种障碍，势必影响到综合题的解答。

数学离不开计算，不论是问题求解还是条件充分性判断，通过计算来求解都是一个重要的方法，因此提高运算能力、提高计算的准确性要引起考生足够的重视，不能华而不实、眼高手低。

与其他学科相比，考生的数学成绩相差历来较大，希望考生认真踏实地做每一套题，心态要平和，戒浮燥；要勤思考多动手，不断积累，步步提高。

编 者

2002年10月15日

目　录

第一部分　初等数学

第二部分　微积分

第三部分　线性代数

第四部分　概率论

第五部分 模拟试题及参考答案

第一部分　初等数学

第一章　绝对值　平均值　比和比例

一、内容提要

1. 充分条件

定义: 如果条件 A 成立,那么就能推出结论 B 成立,即 $A \Rightarrow B$,这时,我们就说 A 是 B 的充分条件.

例如: 如果一个三角形有两个角相等,那么这个三角形是等腰三角形.

在这个命题中,“有两个角相等”是“三角形是等腰三角形”的充分条件.

一般来说,如果一个命题是真命题,那么这个命题的条件一定是其结论的充分条件.

[注] 也有所谓必要条件的概念.例如:如果两个三角形的面积不相等,那么这两个三角形一定不全等,这说明“两个三角形的面积相等”是“这两个三角形全等”不可缺少的条件,可是面积相等的两个三角形(同底等高)又不一定全等,所以,“两个三角形面积相等”是“这两个三角形全等”的必要而不充分条件.

一般来说,原命题为真而逆命题为假,则原命题的条件是结论的充分不必要条件.

原命题为假而逆命题为真,则原命题的条件是结论的必要不充分条件.

原命题为真,逆命题也为真,则原命题的条件是结论的充分且必要条件.

原命题为假,逆命题也为假,则原命题的条件是结论的既不充分也不必要条件.

将原命题的条件记为 A,结论记为 B,则上面所说内容可简述为:

若 $A \Rightarrow B$,则 A 是 B 的充分不必要条件;

若 $A \Leftarrow B$,则 A 是 B 的必要不充分条件;

若 $A \Leftrightarrow B$,则 A 是 B 的充要条件;

若 $A \not\Leftrightarrow B$,则 A 是 B 的既不充分又不必要条件.

在本书中将有一类题叫做条件充分性判断,这里所说的充分性就是定义所述概念.在这类题中有五个选项,规定为:

(A) 条件(1) 充分,但条件(2) 不充分;

(B) 条件(2) 充分,但条件(1) 不充分;

(C) 条件(1) 和(2) 单独都不充分,但条件(1) 和(2) 联合起来充分;

(D) 条件(1) 充分,条件(2) 也充分;

(E) 条件(1) 和(2) 单独都不充分,联合起来也不充分.

以上的规定全书都适用,以后不再重复说明.

[例题] 等式 $x = y$ 成立(x, y 是实数),

(1)$x^2 = y^2$;

(2)x 和 y 同号.

[答案](C)

[分析] 由 $x^2 = y^2$ 可得 $x = y$ 或 $x = -y$,这说明条件 $x^2 = y^2$ 不是 $x = y$ 的充分条件,即条件(1) 不充分;又 x 和 y 同号时,x 与 y 不一定相等,这说明条件(2) 也不充分;但是,把条件(1) 和条件(2) 联合起来,$x^2 = y^2$ 且 x 与 y 同号,则必然推得 $x = y$,这说明条件(1) 和(2) 联合起来充分,故选(C).

2. 绝对值

(1) 定义:实数 a 的绝对值 $|a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$

(2) 性质:$|a| \geqslant 0$;　$|a| = |-a|$;　$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(3) 几何意义:实数 a 的绝对值就是数轴上与 a 对应的点到原点的距离,如图 1-1 所示.

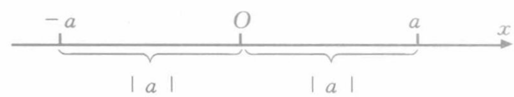

图 1-1

(4) 运算法则:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|};(b \neq 0)$$

$$|a| \leqslant b(b > 0) \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b;$$

$$|a| > b(b > 0) \Leftrightarrow a < -b \text{ 或 } a > b;$$

$$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

3. 平均值

(1) 算术平均值:几个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

简记为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(2) 几何平均值:n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何平均值为

$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$,简记为

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

4. 比和比例

(1) 比的定义:两个数相除,又叫做这两个数的比.把 a 与 $b(b \neq 0)$ 的比记为 $a : b$,

$a:b=\frac{a}{b}$，$\frac{a}{b}$的值叫做a比b的比值.

(2) 比的性质：

$$a:b=ma:mb\quad(m\neq 0);$$
$$a:b=t\Leftrightarrow a=tb.$$

(3) 百分比：把比值表示成分母为100的分数，这个分数称为百分比或百分率. 如

$$1:2=50\%$$

(4) 比例的定义：两个比相等的式子叫做比例. 比例可写成

$$a:b=c:d\text{ 或 }\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.\text{(其中各字母均不为零)}$$

在上面的比例中，a,d叫做比例外项，b,c叫做比例内项. 如果$b=c$，比例成为

$$a:b=b:d\text{，即 }b^2=ad$$

那么，b叫做a和d的比例中项.

(5) 比例的性质：对于比例$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，有下列性质

①$ad=bc$（内项积等于外项积）；

② $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$（互换内项或互换外项，等式仍成立）；

③ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$（合比定理）；

④ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$（分比定理）；

⑤ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$（合分比定理）.

(6) 正比例和反比例：

正比例定义：若变量x和y适合$y=kx(k\neq 0)$，则称x和y成正比例，k为比例系数.

反比例定义：若变量x和y适合$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，则称x和y成反比例，k为比例系数.

二、基础题解析

[例1] 已知：$|a|=5$，$|b|=7$，且$a\cdot b<0$，求：$|a-b|$的值.

[解] 由$|a|=5$得$a=\pm 5$，由$|b|=7$得$b=\pm 7$，因为$a\cdot b<0$，当$a=5$时，$b=-7$，而当$a=-5$时，$b=7$，所以$|a-b|=12$.

[例2] 已知$\sqrt{(a-20)^2}+|b+30|+(C-40)^2=0$，求$a+b+c$的值.

[解] 因为已知等式的各项均为非负数，且它们的和为零，所以这三个非负数均为零，即

$$\sqrt{(a-20)^2}=|b+30|=(C-40)^2=0,$$

分别解得 $a=20$，　$b=-30$，　$C=40$，故

$a+b+c=20-30+40=30.$

[例3] 分别求适合下列条件的x值：

(1) $|x+2|=5$；

(2) $|x-3|\leqslant 4$；

(3) $|x-3| \geqslant 4$.

[解](1) 由绝对值定义,得 $x+2=\pm 5$,即 $x=3$ 或 $x=-7$.

(2) 由绝对值的几何意义,得 $-4 \leqslant x-3 \leqslant 4$,即 $-1 \leqslant x \leqslant 7$.

(3) 由绝对值的几何意义,得 $x-3 \leqslant -4$ 或 $x-3 \geqslant 4$,即 $x \leqslant -1$ 或 $x \geqslant 7$.

[例4] 公司有职工50人,理论知识考核平均成绩为81分,按成绩将公司职工分为优秀与一般两类,优秀职工的平均成绩为90分,一般职工的平均成绩为75分,求一般职工的人数.

[解] 因为50人的平均成绩为81分,所以50人所得总分是 $50 \times 81 = 4050$ 分,设优秀职工有 x 人,则一般职工有 $50-x$ 人,其中优秀职工所得总分为 $90x$ 分,一般职工所得总分为 $75(50-x)$ 分,这两项相加应该等于全公司所得总分,即

$$90x + 75(50-x) = 4050,$$

$$15x = 300,$$

$$x = 20, \qquad 50 - 20 = 30,$$

答:一般职工有30人.

[注] 应注意到以下事实:全公司50人的考核均分为81,其中20名优秀职工考核均分为90分,30名一般职工考核均分为75分,但是,

$$\frac{90+75}{2} \neq 81.$$

这说明对于一个平均数,必须明确它是哪些数的平均数,全公司50人考核成绩的均分是每个人考核成绩之和除以50所得之商,而优秀职工考核成绩的均分是20名优秀职工每人所得分数之和除以20所得之商.下列等式是正确的:

$$\frac{20 \times 90 + 30 \times 75}{20+30} = 81.$$

[例5] 某班同学在一次测验中,平均成绩为75分,其中男同学人数比女同学多80%,而女同学平均成绩比男同学高20%,求女同学的平均成绩.

[解] 设女同学有 x 人,则男同学有 $1.8x$ 人,因此全班总分为 $(x+1.8x) \times 75$,再设男同学平均成绩为 y 分,则女同学平均成绩为 $1.2y$ 分,因此男同学所得总分为 $1.8xy$,女同学所得总分为 $1.2xy$,男、女同学各自的总分之和等于全班总分,于是有:

$$1.8xy + 1.2xy = (x+1.8x) \times 75,$$

即

$$3y = 2.8 \times 75,$$

$$y = 70, \qquad 1.2 \times 70 = 84,$$

答:女同学平均成绩为84分.

[例6] 一公司向银行借款34万元,欲按 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ 的份额分配给下属甲、乙、丙三个车间进行技术改造,求甲车间应得的款数.

[解] 设甲、乙、丙三个车间应得的款数依次为 $\frac{t}{2}$ 万元, $\frac{t}{3}$ 万元, $\frac{t}{9}$ 万元,于是有

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{9} = 34,$$

解得

$$t = 36, \qquad \frac{t}{2} = 18,$$

答:甲车间应得 18 万元.

[例 7] 设$\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=4:5:6$,求使 $x+y+z=74$ 成立的 y 值.

[解] 由于$\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=4:5:6$,因此设$\frac{1}{x}=4t,\frac{1}{y}=5t,\frac{1}{z}=6t$,则 $x=\frac{1}{4t},y=\frac{1}{5t},z=\frac{1}{6t}$,代入 $x+y+z=74$,

$$\frac{1}{4t}+\frac{1}{5t}+\frac{1}{6t}=74,$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{t}=74$$

解得 $$\frac{1}{t}=120$$

故 $$y=\frac{1}{5t}=\frac{120}{5}=24$$

[注] 根据比的性质$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$,由 $x:y=2:3$ 并不能断定 $x=2,y=3$ 一定成立,因而只能假设 $x=2t,y=3t$,然后由其他条件来确定 t 的值,从而求得 x 和 y 的值.以上两个例题就是依据这个原理来进行相应的设定.

三、题型训练

(一)条件充分性判断

1. $|x|$ 的值是多少?

(1)$x=-x$ (2)$x^2=4$.

[答案](D)

[分析] 由条件(1)知 $2x=0,x=0,|x|=0$,这表明可以求得 $|x|$ 的值,故(1)充分;由(2)知 $x=\pm 2,|x|=2$,也可以求得 $|x|$ 的值,故(2)充分.因此选(D).

2. 每支健齿灵牙膏上涨了百分之几?

(1) 每支健齿灵牙膏上涨了 0.5 元.

(2) 每支健齿灵牙膏上涨为 7 元.

[答案](C)

[分析] 条件(1)只给定了上涨的金额,而没有给定原价是多少,故无法求得上涨的百分比,因此条件(1)不充分.条件(2)只给定上涨后的价格,也没有给定原价或上涨的金额,因此也无法求得上涨的百分比,说明条件(2)也不充分.但是把两个条件联合起来可知:原价为 6.5 元,上涨了$\frac{0.5}{6.5}=\frac{1}{13}\approx 8\%$,因此选(C).

3. 计算某商品销售额增加的百分比.

(1) 某商品销售量增加了五百件

(2) 某商品打八折,使销售量增加了 60%.

[答案](B)

[分析] 条件(1)只给定销售量增加五百件,无法确定原销售额与现销售额的关系,因而不能计算该商品销售额增加的百分比,故条件(1)不充分.对于条件(2),设原单价为 a

元，销售量为 b 件，则原销售额为 ab 元，现在单价为 $0.8a$ 元，销售量为 $1.6b$ 件，销售额为 $0.8\times1.6ab$ 元，即 $1.28ab$ 元，增加的销售额为 $0.28ab$ 元，即销售额增加了 28%．故条件(2)是充分的．应选(B)．

4．英语期末考试全班平均分是多少？

(1)16 名男生的英语总分为 1263 分，12 名女生的英语总分为 1137 分．

(2)男生的英语平均分为 76.4，女生的英语均分为 86.6．

[答案](A)

[分析] 对于条件(1)，全班总分为 2400 分，全班人数为 28，故班平均分为 $\frac{2400}{28}\approx86.9$，条件(1)充分．对于条件(2)，只知男生均分和女生均分，而不知男生人数和女生人数，不能求得班平均分．如果把两个均分相加再除以 2，这种算法是错误的．故条件(2)不充分．由此可知本题应选(A)．

5．确定 x 和 y 的值．

(1) $\sqrt{(x-3)^2}+|y-2|=4$；

(2) $\sqrt{(x-3)^2}-|y-2|=0$．

[答案](C)

[分析] 条件(1)或(2)单独均不充分，但用(1)和(2)组成一个方程组，则可求得 x 和 y 的确定的值．故选(C)．

6．某次会议，每个与会者可免费领到一个背包或一只手表，但不能二者都领，领到手表的人数是多少？

(1)在该会议期间，有 40% 的人领到背包；

(2)在该会议期间，共分发手表和背包 200 份．

[答案](C)

[分析] 条件(1)只给定百分比，而未给定手表、背包的总数．无法求得领到手表的人数，故不充分，条件(2)亦然．但二者联合起来，由 $200\times\frac{60}{100}=120$，知有 120 人领到手表，故选(C)．

(二)问题求解

1．数轴上点 A 的坐标为 -2，动点 B 在数轴上运动，且 B 点与 A 点的距离不超过 5，则 B 点坐标 x 的值应适合

(A) $x\leqslant3$　(B) $x\geqslant-7$　(C) $|x-2|\leqslant5$　(D) $|x+2|\leqslant5$

(E) $|x+2|<5$

[答案](D)

2．若 $|x-4|=4-x$，则 x 的取值范围是

(A) $x<0$　(B) $x=4$　(C) $x\leqslant4$　(D) $x\geqslant4$

(E) $x<4$

[答案](C)

3．设 $|a+2|\leqslant1$，$|b+2|\leqslant2$，则正确的不等式是

(A) $|a-b|\leqslant3$　(B) $|a-b|\leqslant2$　(C) $|a-b|\leqslant1$

(D) $|a+b|\leqslant 7$　　(E) $|a+b|\leqslant 1$

[答案](A)

[分析] 根据不等式的性质 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$,得

$$|a-b|=|(a+2)-(b+2)|\leqslant|a+2|+|b+2|\leqslant 3.$$

另一个方法是:由 $|a+2|\leqslant 1$ 得 $-3\leqslant a\leqslant -1$,由 $|b+2|\leqslant 2$ 得 $-4\leqslant b\leqslant 0$,即 $0\leqslant -b\leqslant 4$,从而 $-3\leqslant a-b\leqslant 3$,即 $|a-b|\leqslant 3$,故应选(A).

4. 某校今年的毕业生中,本科生和硕士生人数之比为 5 : 2,据 5 月份统计,本科生有 70%、硕士生有 90% 已经落实了工作单位,此时,尚未落实工作单位的本科生和硕士生人数之比应是

(A)35 : 18　(B)15 : 2　(C)8 : 3　(D)10 : 3　(E)7 : 4

[答案](B)

[分析] 设本科生有 $5a$ 人,则硕士生有 $2a$ 人,本科生未落实工作单位的有 $5a\times 0.3$ 人,硕士生未落实工作单位的有 $2a\times 0.1$ 人,故所求之比为 $1.5a : 0.2a = 15 : 2$.

5. 已知 a,b,c 是三个正整数,且 $a>b>c$,若 a,b,c 的算术平均值为 $\frac{14}{3}$,几何平均值是 4,且 b,c 之积恰为 a,则 a,b,c 的值依次为

(A)6, 5, 3　(B)12, 6, 2　(C)4, 2, 8　(D)8, 2, 4　(E)8, 4, 2

[答案](E)

[分析] 根据已知条件得下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{14}{3}\\ \sqrt[3]{abc}=4,\\ a=bc.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=8,\\ b=4,\\ c=2.\end{cases}或\begin{cases}a=8,\\ b=2,\\ c=4.\end{cases}$$

但因已知 $a>b>c$,故舍去后一组解,选(E).

本题也可以用验算的方法,逐一验算各选项所给的值是否合乎已知条件而得到正确的结果.

6. 某厂生产的一批产品经产品检验,一等品与二等品的比是 5 : 3,二等品与三等品的比是 4 : 1,则该批产品的合格率(合格品包括一等品和二等品)为:

(A)90%　(B)91.4%　(C)92.3%　(D)93.1%　(E)94%

[答案](B)

[分析] 把 5 : 3 和 4 : 1 化为连比,即一等品 : 二等品 : 三等品 = 20 : 12 : 3,因此,合格品的百分比为 $\frac{20+12}{20+12+3}=\frac{32}{35}=91.4\%$,故选(B).

7. 某商品单价上调 15% 后,再降为原价,则降价率为

(A)15%　(B)14%　(C)13%　(D)12%　(E)11%

[答案](C)

[分析] 设该商品原价为 a,上调 15% 后的单价为 $1.15a$,若下调百分比为 x,降为原价,则应有 $1.15a(1-x)=a$,　$1-x=\frac{1}{1.15}$,　$x=1-\frac{1}{1.15}=13\%$.

8. 某商品的销售量相对于进货量的百分比与销售价格成反比例,已知销售单价为 8

元时,可售出进货量的80%,又销售价格与进货价格成正比例,已知进货价格为5元时,销售价格为8元,在以上的比例系数不变的情况下,当进货价格为6元时,可售出进货量的百分比为

(A)78%　　(B)76%　　(C)74%　　(D)70%　　(E)67%

[答案](E)

[分析] 设该商品销售量相对于进货量的百分比为 A,销售价格为 B,进货价格为 C,由已知

$$A = \frac{k_1}{B},\quad B = k_2 C,\quad k_1, k_2 \text{ 是比例系数},$$

又有 $$80\% = \frac{k_1}{8},\quad 8 = k_2 \cdot 5,$$

求得 $$k_1 = 6.4,\quad k_2 = 1.6,$$

故 $$A = \frac{6.4}{B},\quad B = 1.6C,$$

当 $C = 6$ 时, $B = 1.6 \times 6 = 9.6$, $A = \dfrac{6.4}{9.6} \approx 0.67 = 67\%$.

9. 一艘轮船发生漏水事故,堵塞漏洞后开始抽水,现有1,2,3号三台抽水机.已知单独用一台抽水机抽完积水,1号用4小时,2号用3小时,3号用2小时,现在先用1号和2号抽水30分钟,然后关闭1号而开启3号,则抽完积水还需

(A)51分钟　　(B)55分钟　　(C)59分钟

(D)60分钟　　(E)63分钟

[答案](A)

[分析] 由已知:1、2、3号抽水机每分钟的抽水量依次为 $\frac{1}{240}$、$\frac{1}{180}$、$\frac{1}{120}$,其中1表示船舱中的全部积水,设关闭1号抽水机,开启3号抽水机后还需 t 分钟抽完积水,则有

$$30\left(\frac{1}{240} + \frac{1}{180}\right) + t\left(\frac{1}{180} + \frac{1}{120}\right) = 1,$$

$$\frac{1}{72}t = 1 - \frac{7}{24},$$

$$t = 51.\qquad \text{故选(A)}.$$

10. 给出下列定义:对于任意大于1的正整数 n, n 的"长度"是指乘积为 n 的素数(不必不同)的个数.如 $50 = 2 \times 5 \times 5$,则50的长度为3.

根据以上定义解下列两题:

(1) 以下哪个正整数的长度是3

(A)3　　(B)15　　(C)60　　(D)64　　(E)105

(2) 小于1000的正整数的长度最大可能是

(A)10　　(B)9　　(C)8　　(D)7　　(E)6

[答案](1)(E) $\because 105 = 3 \times 5 \times 7$;　　(2)(B) $\because 2^9 = 512$.

第二章 整式和分式

一、内容提要

1. 整式

(1) 整式的定义：只含有数字和字母的有限次加、减、乘、乘方运算的式子叫做整式. 如：$x, a+b, \frac{1}{2}a^2+b^2, \sqrt{3}+1, \sqrt{5}a^2b$ 都是整式.

(2) 整式的加减运算：n 个整式相加减时，如有括号则先去括号，然后再合并同类项.

如：$2x^2-9x+11+(3x^2+6x+4)-(-2x^2+7x-10)$

$=2x^2-9x+11+3x^2+6x+4+2x^2-7x+10=7x^2-10x+3.$

(3) 整式的乘法运算：

① 幂的运算法则

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　$(ab)^n=a^nb^n$；　$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$；

$a^m\div a^n=a^{m-n}$；$(a\neq 0)$　$a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq 0)$；　$a^0=1(a\neq 0)$.

② 乘法公式

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；　$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

③ 单项式乘以单项式，把系数相乘，把相同底数的幂相乘，如 $3a^2b\cdot(-4a^3b^2)=-12a^5b^3$.

④ 单项式乘以多项式，用单项式去乘多项式的每一项，把所得结果相加. 如：$2a^2(3ab+2b^2)=6a^3b+4a^2b^2$.

⑤ 多项式乘以多项式，先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加. 如：$(2a^2-3b^2)(3a^2-4b^2)=6a^4-17a^2b^2+12b^4$.

(4) 整式的除法运算

① 单项式除以单项式，把系数、同底幂分别相除. 如：$4a^2b^3\div 2ab^2=2ab$.

② 多项式除以单项式，把多项式的每一项除以单项式，再把所得结果相加，如：

$$(4a^3b^2-3a^2b^3)\div 5ab=\frac{4}{5}a^2b-\frac{3}{5}ab^2.$$

③ 多项式除以多项式，把两个多项式都按降幂排列，然后用竖式格式进行，如：

求：$$(x^4-8x^2+16)\div(x+2)$$

解：

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x^3-2x^2-4x+8 \\
x+2 \big) & \overline{x^4+0-8x^2+0+16} \\
 & \underline{x^4+2x^3\qquad\qquad\qquad} \\
 & -2x^3-8x^2\qquad\quad \\
 & \underline{-2x^3-4x^2\qquad\quad} \\
 & -4x^2+0\qquad \\
 & \underline{-4x^2-8x\qquad} \\
 & 8x+16 \\
 & \underline{8x+16} \\
 & 0
\end{array}$$

故 $$(x^4-8x^2+16)\div(x+2)=x^3-2x^2-4x+8.$$

2. 分式

(1) 分式的定义：若用 A、B 表示两个整式，如果 B 中含有字母，则 $\frac{A}{B}$ 的式子叫做分式. 在分式中，分母不能为零.

(2) 分式的基本性质：分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不为零的整式，分式的值不变. 即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot m}{B\cdot m},\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div m}{B\div m},(m\text{ 是不等于零的整式})$$

(3) 分式的加减运算：两个分式相加或相减，如果分母不同，首先要通分，然后把分子合并同类项，最后整理、化简.

如：$\frac{2a+3b}{a+b}-\frac{a^2+3ab+b^2}{a(a+b)}=\frac{2a^2+3ab-a^2-3ab-b^2}{a(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{a(a+b)}=\frac{a-b}{a}.$

(4) 分式的乘法和除法运算

两个分式相乘，将两个分子相乘得分子，将两个分母相乘得分母，然后整理约简.

两个分式相除，将除式颠倒相乘，然后按乘法进行运算.

如：$\frac{a^2-2ab+b^2}{4a^2-b^2}\div\frac{a-b}{2a+b}=\frac{(a-b)^2}{(2a+b)(2a-b)}\times\frac{2a+b}{a-b}=\frac{a-b}{2a-b}.$

(5) 部分分式：分式的加减实际上是经过通分合成一个分式. 反之，也可以把一个分式化成几个分式的和. 这时，就说把一个分式化成了部分分式.

如：$\frac{3x^2-7x+4}{x^2-x-6}=\frac{3x}{x+2}+\frac{2}{x-3}.$

二、基础题解析

[例 1] 化简：

1. $(x+y-2z)^2-(y-2z)^2-(x+y)(x-y)-2x(y-2z)$;

2. $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right).$

[解] 1. 原式 $=x^2+y^2+4z^2+2xy-4yz-4xz-y^2+4yz-4z^2-x^2+y^2-2xy+4xz=y^2$;

2. 原式
$$=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot\frac{b^2-ab+a^2}{a^2b^2}\cdot\frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}$$
$$=\frac{(b+a)(b-a)(b^2+a^2+ab)(b^2+a^2-ab)}{(a^2b^2)^3}$$
$$=\frac{(b^3+a^3)(b^3-a^3)}{a^6b^6}$$
$$=\frac{b^6-a^6}{a^6b^6}.$$

[例 2] 当 x 取何值时，分式 $\frac{x^2+2x-3}{|3x-2|-1}$ 的值为零？

[解] 当分式的分子为零而分母不为零时，分式的值为零. 由 $x^2+2x-3=0$ 得 $x=-3$ 或 $x=1$，当 $x=1$ 时，$|3x-2|-1=0$，而当 $x=-3$ 时，$|3x-2|-1\neq0$，故当 $x=-3$ 时，分式的值为零.

[例 3] 已知：$x^3+6+\frac{1}{x^3}=2(x+\frac{1}{x})^2$，求：$x+\frac{1}{x}$ 的值.

[解] 由于 $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$，故原等式化为

$$(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})+6=2(x+\frac{1}{x})^2,$$

即 $$(x+\frac{1}{x})^3-2(x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})+6=0,$$

$$(x+\frac{1}{x})^2(x+\frac{1}{x}-2)-3(x+\frac{1}{x}-2)=0,$$

$$(x+\frac{1}{x}-2)\cdot[(x+\frac{1}{x})^2-3]=0,$$

得 $$x+\frac{1}{x}=2 \text{ 或 } (x+\frac{1}{x})^2=3,$$

即 $$x+\frac{1}{x}=2 \text{ 或 } x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{3}.$$

[例 4] 把分式 $\frac{x+3}{x^2-x-6}$ 化为部分分式.

[解] 因为 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$，所以设

$$\frac{x+3}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2},$$

把等式右边通分，得

$$\frac{x+3}{x^2-x-6}=\frac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6},$$

等式两端的分母相等，因此，两端的分子也应相等，即 $x+3=(A+B)x+2A-3B$，等式两端的 x 的系数和常数项应当对应相等，即 $\begin{cases}A+B=1,\\2A-3B=3.\end{cases}$

解这个方程组，得 $B=-\frac{1}{5}, A=\frac{6}{5}$，于是

$$\frac{x+3}{x^2-x-6}=\frac{\frac{6}{5}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{5}}{x+2}=\frac{6}{5(x-3)}-\frac{1}{5(x+2)}.$$

[例 5] 化简繁分 $\dfrac{x+\dfrac{y-x}{1+xy}}{1-x\left(\dfrac{y-x}{1+xy}\right)}$.

[解] 原式 $=\dfrac{\dfrac{x+x^2y+y-x}{1+xy}}{\dfrac{1+xy-xy+x^2}{1+xy}}=\dfrac{y(x^2+1)}{x^2+1}=y.$

[例 6] 某工程甲独干需 a 天完成，乙独干需 b 天完成，则甲乙合干需几天完成？

[解] 设工程的总工作量为 1，则甲、乙一天可完成总工作量的 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$，因此，甲乙合干所需天数为 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{ab}{a+b}$.