



# 数学建模思路简析

美国数学建模竞赛试题讨论

王期千 刘深泉 著

广东省出版集团

广东科技出版社

广州

图书在版编目(CIP)数据

数学建模思路简析：美国数学建模竞赛试题讨论/王期千，刘深泉著.  
—广州：广东科技出版社，2012.9

ISBN 978-7-5359-5765-8

I. ①数… II. ①王…②刘… III. ①数学模型 IV. ①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 198092 号

数学建模思路简析：美国数学建模竞赛试题讨论

SHUXUE JIANMO SILU JIANXI: MEIGUO SHUXUE JIANMO JINGSAI SHITI TAOLUN

策划编辑：莫志坚

责任编辑：林雁

责任校对：盘婉薇 罗美玲

责任印制：任建强

封面设计：王期千

出版发行：广东科技出版社

(广州市环市东路水荫路 11 号 邮政编码：510075)

<http://www.gdstp.com.cn>

E-mail: [gdkjyxb@gdstp.com.cn](mailto:gdkjyxb@gdstp.com.cn) (营销部)

E-mail: [gdkjzbb@gdstp.com.cn](mailto:gdkjzbb@gdstp.com.cn) (总编办)

经 销：广东新华发行集团股份有限公司

排 版：王期千

印 刷：佛山浩文彩色印刷有限公司

(南海区狮山科技工业园 A 区 邮政编码：528225)

规 格：787mm×1092mm 1/16 印张 14.5 字数 270 千

版 次：2012 年 9 月第 1 版

2012 年 9 月第 1 次印刷

定 价：30.00 元

如发现因印装质量问题影响阅读，请与承印厂联系调换。

# 前 言

## 本书主旨

从最早开始动笔写这本书到现在，一字一句地琢磨，已近两年。如果把准备的时间算进去，则可说是个漫长的过程。纵然如此，我们亦不能说本书的内容有多么充分，因为数学建模本身实在太过于宽泛，而美国数学建模竞赛问题更是紧跟时代发展。

很多时候，人们并不知道数学能为自己和社会提供些什么。在如今的世界里，小到菜市场的价格，大到国家的项目决策，如果要获取足够的效率，有利于全社会快速、均衡地发展，都是不能离开数学模型的。平时你们工作的单位可能会做一些绩效考核，这实际上是生产力问题在现实中的一种简化的应用；当你驾车出行时，导航仪为你指明合适的路线，实际上是解决了一个路径选择的问题。诸如此类的例子很多，数学不单只存在于数学家的稿纸上，也存在于宇宙中遨游的飞船里，更融入到了寻常百姓家日常生活中——只不过在很多时候，我们不知道，或者没有留意到罢了。

在生活中，我们常常能感觉到缺失了数学给社会带来的问题。当你走在街道上意图横穿马路时，却发现依照红绿灯的指示实在难以成行；当不寻常的资金流动可能给金融市场带来危害的时候，我们却无法有效地识别，也不能准确地评估它的影响；国内产业形成了自我围困的局面，产业升级只能是一个苍白

无力的口号。你可能会想，如果更多的机构懂得数学模型，并能把它的思想和方法运用在实践当中，也许社会能向好的方向更进一步。提到这些情形并非是要责难什么，而只是从反面看待数学在现实中的功用。

于接下来的内容中，我们将共同展开一段数学建模的旅程。在开始这段旅程之前，我们首先总括地谈谈将会遇到的事情。

本书依托美国数学建模竞赛的一些有代表性的选题，简略地谈谈建模的思路问题。这些选题肯定无法覆盖整个数学模型的类型，但在实际应用中，仍具有较典型的意义。我们并不会把完整的模型具体地写出，因为这不是我们写此书的目的。本书只对重要的部分加以分析，把模型的大纲写下，并记录一些相关的方法。

当然，本书的分析以及相关的内容可能会超过原本题目的要求；同时有一部分要求，我们会跳过去不谈。因为我们希望通过这些题目，讨论更有普遍性的问题。每一道题目都会有侧重性地偏向一个议题，作为整体内容中的一部分。这些议题的选择，是对典型建模方法的涵盖，也是对一些常见而有代表性的行业的关注。整本书中，讨论的问题可归结到两点：

- 数学建模要做什么？
- 到底应该如何去做？

掌握这两点，就几乎掌握了本书的所有内容。

## 要做什么

在最开始的时候，大家也许会问：数学建模究竟是要做什么？

这个问题显然不是一两句话能讲得清楚的，也没有一定的答案，需要你在实践中自己去感悟。事实上，笔者也不敢说自己真的能正确地回答这个问题。但有一些基本概念是不会有很大争议的：模型是对现实的抽象；建模并不狭隘地理解为模型的建立，它还涵盖了建立模型的方法；而数学建模，自是指以数学的方法进行建模。

人们曾使用数学的方法，解读事物的规律，预测未来的现象。既得之，便以为是数学的功绩，而数学则是造物者的法旨。但究其事实，根据过往千百年来的经验，已经得到了它的一些真义。数学作为一项研究客观规律的工具，如语言之于文艺，不过执行了人的思想，是它付诸实现的依托，而非根本本身——在大多数的情况下，它们只是对人的思路的数量化“翻译”罢了。

在研究不同领域的问题时，我们往往会发现，建模的数学原理或者数学形式是相似或者相通的。人口模型可以进入到广告学中，物理学的方法可能被引入到犯罪学中，电化学的原理亦被引入到神经科学里面。不同学科的发展，各自建立起了自己的数学描述，而这些描述的形式往往是类似的，或者本身便有相通的地方。于是这些学科的概念便通过数学的桥梁联系起来，成为了相通的概念。

## 如何去做


如何去开展数学建模，实在是一个见仁见智的问题。我们只能依据自己的经验，谈谈一般性的方法。通常我们总是从最简单、最常见的概念开始，逐步完成复杂的建模工作。

简单的概念，往往是解决问题的开门钥匙；而简单的数学原理，往往是数学模型的基石。然而，基石并不是一个建筑的全部。比如直接的比例关系是很多模型的根本，但它并不总是足够。

另外，对于实际的问题，我们还要做一些转换，将它引入可以进行数学建模的范畴中来。比方说我们常会遇到选择问题，它往往需要你做一个关于选择的先后排列，可选和不可选之间也没有一个十分明显的划分。很多时候可以得到的，只是适合于选择的程度。比如对于不同方案的选择，需要你们去设计一个评价的标准；根据这个标准计算得到对方案的评价，最后进行选择。又比方说，对于预测犯罪嫌疑人出现的区域，你很难说他必然出现在什么地方，或者必然不出现在什么地方，只能估计犯罪嫌疑人在不同区域出现的概率，这同样需要你首先给出一个概率评估的模型。

如果旧的模型不适用新的情况，就有了改进的必要。在数学建模中，并不一定要完全改变模型的面貌来达到改进的目的。很多时候，只要给其中部分量以新的内涵，就可以赋予模型新的生命，得到更完善的模型。这正是数学模型的一种魅力。这一部分，待你们读完本书后，应当能有些理解——也许在此之前很多读者便已有不浅的认识。

数学模型是一种极为具体的模型。一般来说，一个问题给出的条件和所作的要求越是简单，它的建模就越是困难，因为我们很难从一个不具体的问题得到一个具体的模型。但从另一个角度看，问题的要求越是简单，就留给你越大的空间，以发挥你的创造力。

 计算能力

在建模的时候，我们不得不考虑到计算能力的问题。

严格来说，为了求解而设计的算法，并不能算作是模型的一部分。你的模型在实践中是否能解决问题，除了模型本身的因素以外，还受算法设计的限制。当算法确定下来，计算机的计算能力就是最后的决定性因素。如果模型超出了你的计算能力，那么你就不能得到这个模型在实际应用中的计算结果，以至于无法实现解决问题的初衷了。

于是我们常会对要解决的问题添加若干用于化简的规定，这是为了建模求解难度的降低。这种化简是被动的<sup>[1]</sup>。但是，随着计算机计算能力的提升，过去的一些问题已经不再是问题，某些化简也就不是必要的了。因此，在实际问题的解决方案中，随着计算机的发展，被动的化简总是越来越弱。我们所要讨论的，也许是过去提出的问题，但也是放在解放了的环境当中的——即以新时期的技术考量旧时期的问题。

在正文开始之前，我们还要不厌其烦地再向大家强调：本书并不打算去教授什么具体模型，因为模型是千变万化的；也不曾希望教会大家具体的建模方法，因为建模是没有一定方法的。若本书能给你们带来一些建模思路上的启发，事实上这正是本书写作的主旨，则笔者的目的便可算完全达到了。

于是，在本书较前的内容中，讨论会简单些，把焦点放在建模思路的主干上；随着书的进程，后面的内容会逐渐具体，也更发散些。

兹感谢陈嘉茵女士为本书题目所做的翻译工作和我们的编辑林雁女士的辛勤劳动。

作者

2012年7月

---

[1] 有的时候，为了建立更能描述现实本质的模型，也会引入适当的化简，这种化简是主动的。

# 目 录

<b>第1章 动物数量问题 Animal Populations (1985A)</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 问题：如何可持续地捕获 . . . . .	1
1.2 分析 . . . . .	2
1.2.1 建模的首要工作 . . . . .	2
1.2.2 建立第一个模型 . . . . .	2
1.2.3 模型与现实接轨 . . . . .	3
1.2.4 建立模型的目的 . . . . .	4
1.2.5 关于模型的验证 . . . . .	5
1.3 纲要 . . . . .	5
1.3.1 自然生长 . . . . .	5
1.3.2 人为捕猎 . . . . .	6
1.3.3 经济效益 . . . . .	6
1.4 思考：设计你自己的函数 . . . . .	7



<b>第2章 战略储备管理 Strategic Reserve Management (1985B)</b>	<b>9</b>
2.1 问题：买与卖，安全与利润	9
2.2 分析	11
2.2.1 题的解读	11
2.2.2 问题本质	12
2.3 纲要	12
2.3.1 稳定	12
2.3.2 利润	13
2.3.3 规划	14
2.4 思考：如何制订科学的指标	15
<b>第3章 海道测量数据 Hydrographic Data (1986A)</b>	<b>17</b>
3.1 问题：复原海底的地貌	17
3.2 分析：样条方法的适用	18
3.3 纲要	19
3.3.1 样条设计	19
3.3.2 优劣评判	20
3.3.3 航行威胁	21
3.4 扩展：水流密度的计算	21
3.5 思考：提取有效特征值	22
<b>第4章 应急设施选址 Emergency-Facilities Location (1986B)</b>	<b>25</b>
4.1 问题：确定应急设施的位置	25
4.2 分析	26
4.2.1 当前情况	27
4.2.2 项目条件	27
4.2.3 参数影响	27
4.2.4 具体目标	28

4.2.5 假设提出 . . . . .	28
4.3 纲要 . . . . .	28
4.3.1 需求密度分布 . . . . .	28
4.3.2 网络最短路径 . . . . .	29
4.3.3 交通堵塞概率 . . . . .	30
4.3.4 化为规划问题 . . . . .	31
4.4 思考：关于需求的几种讨论 . . . . .	32
<b>第5章 停车场设计 Parking Lot Design (1987B)</b> . . . . .	<b>33</b>
5.1 问题：停车场设计与它的效益 . . . . .	33
5.2 分析 . . . . .	34
5.2.1 变量与限制 . . . . .	34
5.2.2 矛盾与目标 . . . . .	34
5.3 纲要 . . . . .	35
5.3.1 半径一路径 . . . . .	35
5.3.2 路径一占用区域 . . . . .	36
5.3.3 车位划分一难度 . . . . .	36
5.3.4 难度一开销 . . . . .	37
5.3.5 划分一收益 . . . . .	38
5.4 思考：停车半径与难度的关系 . . . . .	38
<b>第6章 飞机排队 Aircraft Queuing (1989A)</b> . . . . .	<b>41</b>
6.1 问题：如何安排起飞顺序 . . . . .	41
6.2 分析 . . . . .	42
6.2.1 模型的本质问题 . . . . .	42
6.2.2 模型的立足点 . . . . .	43
6.2.3 模型解决什么问题 . . . . .	44
6.3 纲要 . . . . .	44

6.3.1 乘客的不满意度 . . . . .	44
6.3.2 关于转机的问题 . . . . .	45
6.3.3 两种不满意度的统一 . . . . .	46
6.3.4 排队与等候问题 . . . . .	47
6.4 思考：规划以减少不满意 . . . . .	48
<b>第7章 脑内的药物分布 The Brain-Drug Problem (1990A) . . . . .</b>	<b>51</b>
7.1 问题：根据样本估计实际情况 . . . . .	51
7.2 分析 . . . . .	53
7.2.1 模型的本质问题 . . . . .	53
7.2.2 模型的切入点 . . . . .	54
7.2.3 模型的构建元素 . . . . .	55
7.3 纲要 . . . . .	56
7.3.1 被动扩散 . . . . .	56
7.3.2 易化被动扩散 . . . . .	56
7.3.3 主动转运 . . . . .	57
7.3.4 药物消除 . . . . .	58
7.3.5 浓度随时间的变化 . . . . .	59
7.3.6 三维空间上的拓展 . . . . .	59
7.3.7 空间边界条件 . . . . .	60
7.3.8 拟合的方法 . . . . .	60
7.4 思考：对过程的精细数学刻画 . . . . .	62
<b>第8章 扫雪问题 Snowplow Routing (1990B) . . . . .</b>	<b>65</b>
8.1 问题：设计一条最好的扫雪路径 . . . . .	65
8.2 分析 . . . . .	66
8.2.1 模型的本质问题 . . . . .	66
8.2.2 模型要素分析 . . . . .	67

8.3 纲要 . . . . .	68
8.3.1 地图与数学的图 . . . . .	68
8.3.2 速度与流量 . . . . .	70
8.3.3 扫雪对流量的影响 . . . . .	71
8.3.4 方案 . . . . .	72
8.3.5 成效 . . . . .	73
8.3.6 从方案到成效 . . . . .	74
8.4 思考：有关道路流量的计算问题 . . . . .	75
<b>第9章 空管雷达功率 Air-Traffic-Control Radar Power (1992A) . . .</b>	<b>77</b>
9.1 问题：雷达信号的发射、传播及接收 . . . . .	77
9.2 分析 . . . . .	79
9.2.1 总体目标 . . . . .	79
9.2.2 具体要求 . . . . .	79
9.2.3 给定参数 . . . . .	79
9.3 纲要 . . . . .	80
9.3.1 抛物面和雷达天线 . . . . .	80
9.3.2 雷达和电磁波 . . . . .	82
9.3.3 电磁波的密度 . . . . .	82
9.3.4 电磁波的吸收 . . . . .	83
9.3.5 电磁波的散射（一） . . . . .	83
9.3.6 从一点出发的电磁波（一） . . . . .	86
9.3.7 电磁波的散射（二） . . . . .	88
9.3.8 从一点出发的电磁波（二） . . . . .	94
9.3.9 点光源的边界条件 . . . . .	95
9.3.10 反射和完全模型 . . . . .	98
9.4 思考：在飞机表面发生了什么 . . . . .	100

<b>第 10 章 应急电力恢复 Emergency Power Restoration (1992B)</b>	<b>103</b>
10.1 问题：资源调配及其产生的效益	103
10.2 分析	105
10.2.1 模型的入口	105
10.2.2 模型的目标	106
10.2.3 数据项的意义	107
10.2.4 移动的工作人员	108
10.2.5 工作人员条件	109
10.2.6 关于取得一个更好的结果	110
10.2.7 附加的假设与数据项	111
10.3 时间与费用	112
10.4 损失和影响	115
10.4.1 个人损失	116
10.4.2 影响与公司损失	118
10.5 方案和效益	121
10.5.1 描述一个计划	122
10.5.2 计算方案效益	123
10.6 思考：劳动力和损失的衡量方法	124
<b>第 11 章 分数膨胀 Grade Inflation (1998B)</b>	<b>125</b>
11.1 问题：如何计分才更加科学	125
11.2 区分度的问题	127
11.3 排名的问题	128
11.4 如何才公平	130
11.4.1 成绩分布符合某种规律	130
11.4.2 单科成绩的类型标准化	131
11.4.3 最终的排名	132

11.5 思考：不能避免的极端情况 . . . . .	133
<b>第 12 章 空间交通管制 Air Traffic Control (2000A) . . . . .</b>	<b>135</b>
12.1 问题：路线冲突的自动判断 . . . . .	135
12.2 目标 . . . . .	136
12.3 算法所能依赖的信息 . . . . .	138
12.3.1 信息来自何处 . . . . .	138
12.3.2 信息的格式 . . . . .	138
12.4 关于飞机轨迹的预测 . . . . .	139
12.4.1 速度和方向 . . . . .	139
12.4.2 轨迹和误差 . . . . .	141
12.5 最终的指标及其复杂度 . . . . .	142
12.5.1 最终的指标 . . . . .	142
12.5.2 复杂度问题 . . . . .	145
12.5.3 自动预告 . . . . .	146
12.6 思考：如何去度量一个冲突 . . . . .	147
<b>第 13 章 风和喷水池 Wind and Waterspray (2002A) . . . . .</b>	<b>149</b>
13.1 问题：水珠在风中如何运动 . . . . .	149
13.2 风的作用（一） . . . . .	150
13.3 风速与风力 . . . . .	151
13.3.1 风力的产生 . . . . .	151
13.3.2 减速的过程 . . . . .	151
13.3.3 微小的空气块 . . . . .	152
13.4 风的流动 . . . . .	153
13.5 惯性与扩散 . . . . .	154
13.5.1 惯性气流 . . . . .	155
13.5.2 扩散气流 . . . . .	155

13.6	风的作用 (二)	156
13.6.1	力的产生	156
13.6.2	速度变化	156
13.6.3	相对风压	157
13.7	风压与流	158
13.8	风和喷泉	158
13.8.1	喷泉里的水	160
13.8.2	流动的空气	161
13.8.3	落在地面上的水	162
13.9	思考: 边界条件的数学设计	163
<b>第 14 章</b>	<b>更快的快速通过系统 Faster QuickPass System (2004B)</b>	<b>165</b>
14.1	问题: 给游客以更好的体验	165
14.2	问题的根结	167
14.3	快通系统工作方式	168
14.4	评价系统	170
14.5	公平度量	171
14.6	排队时间和等待时间	172
14.6.1	快通时间的分配	172
14.6.2	等候队列和等候时间	173
14.6.3	排队时间估算	173
14.7	时间分配算法	174
14.7.1	算法的优劣衡量	174
14.7.2	离散的游客和连续的游客流	176
14.7.3	决策的依据	176
14.8	思考: 有关流量计算的问题	178
<b>第 15 章</b>	<b>犯罪学问题 Criminology (2010B)</b>	<b>181</b>

15.1	问题：嫌疑人究竟藏在哪里	181
15.2	我们要做什么	183
15.3	变造了的质心	184
15.3.1	物理学科中的质心	184
15.3.2	概率与质量的关联	184
15.3.3	实际预测中的使用	185
15.4	几个存在的问题	185
15.5	关于图的若干事项	187
15.5.1	图基础设置	187
15.5.2	常用的方法	188
15.6	城镇的布局	190
15.6.1	从“质心”到“可能性”分布	190
15.6.2	结合道路长度的新“可能性”	193
15.6.3	变造了的“长度”	194
15.7	关于时间的轨迹	195
15.7.1	基于马尔可夫链的人口移动	196
15.7.2	特定人士特定情形	199
15.7.3	扩展的马尔可夫链	200
15.8	思考：历史轨迹与未来轨迹	201
<b>第16章</b>	<b>数学建模的力量</b>	<b>203</b>
16.1	离散数学建模的思路	204
16.2	连续数学建模的思路	206
16.3	数学建模的创新	208
16.3.1	六度分离问题	208
16.3.2	装箱承载问题	212
16.4	计算方法的实现	213
16.5	数学建模的意义	214



# 第 1 章

## 动物数量问题

Animal Populations (1985A)

我们要做什么

### 1.1 问题：如何可持续地捕获

试选择一种鱼类或者哺乳类动物，用恰当的数据精确地建立模型。首先根据环境的重要参数，描述分布在各个组的动物的数量水平，从而建立动物与周围环境的自然交互作用模型。然后调整模型，采用与捕获动物的实际方法一致的表格形式来描述捕获量。模型要包含所有受食物、空间制约的外界因素，这些因素都得到了数据支持。考虑所涉及的各种数量的价值，捕获的数量及动物数量的自身规模，从而得出可以代表捕获总价值的数据。通过长期实践，根据动物数量的规模和时间得到最优捕获价值下的捕获方案。最后在环境条