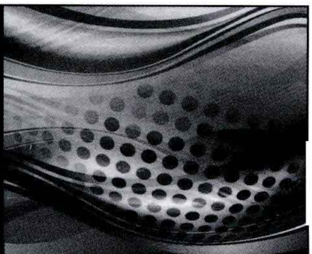
大学数学系列教材

线性代数与解析几何



◆ 大连理工大学数学科学学院
◆ 代万基　廉庆荣　王颖　冯红　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

线性代数与解析几何

Xianxing Daishu yu Jiexi Jihe

大连理工大学数学科学学院

代万基　廉庆荣　王　颖　冯　红　编

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是为高等学校非数学类专业编写的数学教材，它将线性代数与解析几何有机结合建立起新体系，在内容的选材和处理上有很多独到之处。主要内容有：矩阵及其初等变换，方阵的行列式，可逆矩阵及 $n \times n$ 型线性方程组，空间的平面与直线，向量组的线性相关性与矩阵的秩，线性方程组，向量空间及向量的正交性，方阵的特征值与相似对角化，二次型与二次曲面，线性空间及其线性变换。配有适当的应用举例、思考题、习题和提高题。

本书以矩阵的理论和运算为主线，充分利用分块矩阵来表达和论证问题。叙述简练、思路清晰、重点突出、通俗易懂、易教易学。

本书可用于本科生“线性代数与解析几何”课程教学，去掉解析几何部分也可用于本科生“线性代数”课程教学，还可供考研学生、自学者和广大科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何/代万基等编. --北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-035537-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①代… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 179151 号

策划编辑 李 茜　责任编辑 李 茜　封面设计 李卫青　版式设计 杜微言
插图绘制 尹文军　责任校对 金 辉　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	14	版 次	2012 年 8 月第 1 版
字 数	250 千字	印 次	2012 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	21.00 元

物 料 号 35537-00

前　言

线性代数与解析几何是高等学校非数学类专业大学生的重要数学基础课之一。它不仅是学习多元微积分、概率统计、计算方法和矩阵分析等工科数学课程的基础，而且在理工科各专业都有着广泛的应用。

线性代数具有较强的逻辑性和抽象性，解析几何具有较强的直观性，将二者有机地结合不仅使得解析几何的研究更简便更深入，而且使得线性代数的抽象知识有直观的理解。学习本书不仅要掌握其主要知识及相互间的联系，而且也要从中学到科学的思想方法，培养良好的抽象思维、逻辑推理、空间想象及数学表达与概括能力，以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书具有以下特色：

(1) 线性代数部分以矩阵及其运算为主线，把行列式看作矩阵的一个数值特性，突出矩阵的三个数值特性（行列式、秩和特征值）在线性代数中的作用，将向量组、线性方程组、二次型及线性变换与矩阵建立联系，重点对矩阵进行研究，然后用矩阵理论来解决相关问题。

(2) 将初等变换作为线性代数的主要计算工具。本书中求矩阵的逆、行列式、矩阵的秩、特征向量、线性方程组解的判别和求解、求向量组的秩和极大无关组等运算都是用初等变换来完成的，虽然有的问题也可用别的方法来解决，但是用初等变换的方法更简便易行，适用面宽且便于用计算机实现。

(3) 充分利用代数的方法研究几何问题，使得某些几何问题的研究更深入、更简捷。

(4) 尽量用矩阵的形式进行表达和计算，充分利用分块矩阵来研究问题，在内容的选材和处理上有很多独到之处，使得叙述简练，论证简洁，且便于学习和掌握。

(5) 注意介绍主要概念和主要问题产生的历史背景，并尽可能地给出其直观解释；对于主要结论均给出了严格证明；对于主要计算问题，均有详细的方法介绍，并配有合适的例题和习题。为了培养读者解决实际问题的能力，提高读者学习的兴趣，本书在线性代数部分给出了一定量的应用实例。为了加深读者对基本概念和主要知识的理解和掌握，本书配备了适量的思考题，这些思考题是根据作者多年教学实践构造出来的。

本书是大连理工大学“线性代数与解析几何”课程多年教学实践与改革的结晶。在本校原《线性代数与解析几何》和《线性代数》两本书的基础上，借鉴并吸

收了国内外相关优秀教材的优点编写而成。

作者在编写本书时力求站在读者的角度，将理论知识阐释得通俗易懂，并充分考虑到当前全国硕士研究生入学统一考试的需要，其难易程度符合理工科“线性代数”及“线性代数与解析几何”课程和《全国硕士研究生入学统一考试大纲》的要求。本书可作为56学时“线性代数与解析几何”课程教材，去掉解析几何部分后也可作为48学时“线性代数”课程教材。

本书正文带“*”号的部分及某些章节后面的附录为拓宽与加深的内容，任课教师可根据学时和教学的实际情况酌情处理。此外，提高题的习题偏难，不宜留作习题，可供有潜力的学生练习。

王颖参加了第1—3章的编写，冯红参加了第5章的编写，其余部分由代万基和廉庆荣编写，全书由代万基统稿。

在本书编写过程中，得到了大连理工大学教务处和“线性代数与解析几何”课程组全体任课教师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！

由于作者的水平所限，错误和不妥之处在所难免，恳请同行和读者批评指正。

编 者

2012年6月

目　录

第 1 章　矩阵及其初等变换

矩阵是线性代数的主要研究对象，是研究线性方程组和其他相关问题的有力工具，在自然科学和工程技术的许多领域中有着广泛应用.线性代数研究问题的主要思想是：将所研究的主要问题转化为矩阵形式，重点对矩阵进行研究，最后将所研究的问题作为矩阵理论的应用加以解决.

本章主要讲述矩阵及其运算，向量与分块矩阵，矩阵的初等变换与初等矩阵.

1.1　矩阵及其运算

矩阵的直观表现形式为一个矩形的数表.在科学研究和日常工作中经常使用这样的数表，为了对用矩阵所描述的事物作进一步的研究，在线性代数中定义了矩阵之间的运算.

1.1.1　矩阵的概念

定义 1-1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 所排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**.

通常用黑体大写英文字母表示矩阵，上面的矩阵可简记为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

注　矩阵可以用方括号来表示，也可以用圆括号来表示.

数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 列的相交处，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元.

只有一行的矩阵

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

称为**行矩阵**.为了避免元素间的混淆，通常记作 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

只有一列的矩阵

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

称为**列矩阵**.

$n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$一般称为 n **阶矩阵或** n **阶方阵**. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 中自左上角至右下角的连线叫做$\boldsymbol{A}$ 的主对角线,自右上角至左下角的连线叫做 $\boldsymbol{A}$ 的副对角线,位于主对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 叫做$\boldsymbol{A}$ 的对角元.

元素都为零的矩阵称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}$. 如果需要指出其行数和列数,则用$\boldsymbol{O}_{m\times n}$表示 $m\times n$ 零矩阵.

形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的方阵分别称为**对角矩阵**、**上三角形矩阵**和**下三角形矩阵**,统称为**三角形矩阵**. 其中,对角矩阵可记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

对于三角形矩阵,为了方便,对角线上(下)方全为零的部分也可省去不写,例如,上面的对角矩阵也可记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

对角元都为 1 的对角矩阵叫做**单位矩阵**,专用 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$ 表示. 如果需明确其阶数,则用$\boldsymbol{E}_n$ 或$\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同且列数也相同,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,并且它们对应的元素都相等,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

元素都是实数的矩阵叫做实矩阵,元素是复数的矩阵叫做复矩阵. 本书主要在实数范围内讨论问题,如果不作说明,所讨论的矩阵均指实矩阵. 所有 $m\times n$ 实矩阵的集合记作$\mathbf{R}^{m\times n}$.

1.1.2 矩阵的线性运算

定义 1-2 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$,规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n},$$

即两个矩阵的加法就是把它们对应的元素相加.

令 $-B=[-b_{ij}]_{m\times n}$,矩阵的减法规定为 $A-B=A+(-B)$.

事实上,A 减去 B 就是将 A 与 B 的对应元素相减.

注意 只有两个同型的矩阵才能进行加法和减法运算.

定义 1-3 数 k 与矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的乘积规定为

$$kA=Ak=[ka_{ij}]_{m\times n},$$

即数 k 与矩阵 A 相乘就是把数 k 与矩阵 A 的每个元素相乘.

矩阵的加法和数与矩阵的乘法这两种运算统称为**矩阵的线性运算**.

例如,$\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&-1\\1&-2\\0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-2\\2&-4\\0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\4&1\\3&0\end{bmatrix}$.

设 A,B,C,O 为同型矩阵;k,l 为数.容易证明,矩阵的线性运算满足下列八条性质:

(1) $A+B=B+A$;

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) $A+O=A$;

(4) $A+(-A)=O$;

(5) $1A=A$;

(6) $(k+l)A=kA+lA$

(7) $k(A+B)=kA+kB$;

(8) $k(lA)=(kl)A$.

1.1.3 矩阵的乘法

定义 1-4 设 $A=[a_{ij}]_{m\times k}$,$B=[b_{ij}]_{k\times n}$,规定矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=[c_{ij}]_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{l=1}^{k}a_{il}b_{lj},$$

记作 $AB=C$.

注意 (1) 只有当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时,才能作乘法运算 AB;

(2) 乘积 AB 的行数等于 A 的行数,乘积 AB 的列数等于 B 的列数;

(3) 乘积 AB 的 (i,j) 元等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和.

例 1-1 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times2+1\times3 & 1\times3+2\times2+1\times1\\0\times1+3\times2+1\times3 & 0\times3+3\times2+1\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8&8\\9&7\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&11&4\\2&10&4\\3&9&4\end{bmatrix}.$$

例 1－2 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

下面我们来研究矩阵乘法的运算法则.

首先注意,矩阵乘法的运算法则与数的乘法的运算法则有如下区别:

(1) 矩阵的乘法不满足交换律,即一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

在进行矩阵的乘法运算时,应注意不要随意调换矩阵的前后位置,否则会出错.

$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 的原因有三个:

① $\boldsymbol{AB}$ 可相乘时,$\boldsymbol{BA}$ 不一定可相乘;

② $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都可相乘时,其结果的类型不一定相同(见例 1－1);

③ 即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 的类型相同,它们的对应元素还不一定相同(见例 1－2).

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **可交换**.

由矩阵乘法的定义可以证明,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可交换的必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵.至于何时两个矩阵相乘可交换,没有一般性的结论,但是在后面会讲到一些可交换的特殊情况.

(2) 矩阵乘法不满足消去律,具体表现为:

① $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 一般得不到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$(见例 1－2);

② 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 一般得不到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$(见例 1－2);

③ $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都不是零矩阵时，$\boldsymbol{AB}$ 有可能为零矩阵.

矩阵的乘法虽然不满足交换律和消去律，但满足结合律和分配律（假设运算都可行）：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$，其中 k 为数；

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

(4) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

从矩阵相等的定义出发容易证明(2)、(3)、(4)，在本节附录中给出了(1)的证明.

对于单位矩阵，容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n},$$

这和数 1 在数的乘法中的作用类似.

有了矩阵的乘法，我们可以定义矩阵的幂.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为正整数，把 k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积叫做 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作$\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个}.$$

由矩阵乘法的结合律可以证明：当 k 和 l 为正整数时，有

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}.$$

因为矩阵的乘法一般不满足交换律，所以对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，一般 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

注意 很多关于数的涉及乘法的运算公式，如果把数换成矩阵，只有矩阵可交换时才成立. 例如，只有当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可交换时，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 和 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 才成立. 由于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 与同阶方阵相乘时都可交换，所以如果上面的公式中有一个为单位矩阵，则等式成立.

例 1-3 设 $\boldsymbol{A}=[1,2,3]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 和$(\boldsymbol{BA})^{30}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=[1,2,3]\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}=7,$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}[1,2,3]=\begin{bmatrix}3&6&9\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{BA})^{30}&=(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\cdots(\boldsymbol{BA})\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

$$=(\boldsymbol{AB})^{29}(\boldsymbol{BA})$$

$$=7^{29}\begin{bmatrix}3 & 6 & 9\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}.$$

注意 当两个矩阵相乘的结果为 1×1 矩阵时,结果写成一个数即可.

在定义 1-4 中,c_{ij} 也可写成

$$c_{ij}=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{kj}\end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积.

例 1-4 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$ 都是上三角形矩阵,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,证明 $\boldsymbol{C}$ 也是上三角形矩阵,并且 $\boldsymbol{C}$ 的对角元 $c_{ii}=a_{ii}b_{ii}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

注 方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为上三角形矩阵 $\Leftrightarrow$ 当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$.

证明 由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是上三角形矩阵可知,当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0,b_{ij}=0$. 当 $i\geqslant j$ 时,通过计算可得

$$c_{ij}=[0,0,\cdots,0,a_{ii},a_{i,i+1},\cdots,a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{jj}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{cases}a_{ii}b_{ii}, & i=j,\\ 0, & i>j,\end{cases}$$

因此结论成立.

类似地,可以证明:

(1) 两个同阶下三角形矩阵的乘积仍为下三角形矩阵;

(2) 两个同阶对角矩阵的乘积仍为对角矩阵,并且两个同阶对角矩阵相乘时,只需将对角元对应相乘.

根据上面的结论可得

$$\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}a_{11}^k & & & \\ & a_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^k\end{bmatrix}$$

1.1.4 线性方程组的矩阵形式

为了方便后面的讨论,我们在这里给出线性方程组的概念及其矩阵表示.

含有 m 个一次方程 n 个未知数的方程组称为 $m\times n$ **型线性方程组**，简称 $m\times n$**型方程组**.

$m\times n$ 型线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

若令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则方程组(1.1)可表示成矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

这里的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别称为方程组(1.1)的**系数矩阵**和**常数向量**. 由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 合起来所构成的矩阵

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

叫做方程组(1.1)的**增广矩阵**.

增广矩阵$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$与方程组(1.1)一一对应，可用增广矩阵$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$代替方程组(1.1)来进行方程组的研究和运算.

当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，方程组(1.1)称为**齐次线性方程组**；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，方程组(1.1)称为**非齐次线性方程组**.

注 线性代数起源于线性方程组的研究，矩阵是由研究线性方程组的需要而产生的，线性代数中的很多概念也都是由研究线性方程组的需要而产生的，认识到这一点能帮助我们理解后面讲到的一些概念.

1.1.5 矩阵的转置

定义 1-5 把 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列的位置互换所得到的 $n\times m$ 矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

由定义 1-5 可知，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元为 $\boldsymbol{A}$ 中的(j,i)元 a_{ji} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

例如，$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

矩阵的转置具有下列运算性质(其中 k 是数)：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

前三个性质容易证明，我们仅给出性质(4)的证明.

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times k}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{k\times n}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times m$ 矩阵；由于$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $k\times m$ 矩阵，所以$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是 $n\times m$ 矩阵，故$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 同型.

下面我们来证明$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对应元素相等.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\text{ 的}(i,j)\text{元}&=\boldsymbol{AB}\text{ 的}(j,i)\text{元}\\&=[a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jk}]\begin{bmatrix}b_{1i}\\b_{2i}\\\vdots\\b_{ki}\end{bmatrix}\\&=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jk}b_{ki}.\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行为$[b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{ki}]$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为$\begin{bmatrix}a_{j1}\\a_{j2}\\\vdots\\a_{jk}\end{bmatrix}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{ 的}(i,j)\text{元}&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\text{ 的第 }i\text{ 行乘 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{ 的第 }j\text{ 列}\\&=[b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{ki}]\begin{bmatrix}a_{j1}\\a_{j2}\\\vdots\\a_{jk}\end{bmatrix}\\&=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jk}b_{ki}.\end{aligned}$$

可见

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\text{ 的}(i,j)\text{元}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{ 的}(i,j)\text{元},$$

故$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

性质(4)可以推广到有限个矩阵相乘的情况：