概率论与数理统计讲义

颜 景 珂 编

连云港市教育学院

概率论与数理统计讲义

颜 景 珂 编

连 云 港 市 教 育 学 院

前　言

本讲义根据全国高等师范专科学校二、三年制概率论与数理统计大纲，参照现有教材，结合师专特点进行了遴选，在试用的基础上经过修订完成的。它既可以作为师专、高师函授的教材，也可作为中学数学教师进修或自学之用。

为体现师范性，本讲义选取的内容，首先注意了基础理论和联系实际，也适当照顾了后继课的需要；文字叙述力求简明通顺，层次清晰，前后连贯，便于自学；习题难易适度，由浅入深，同教材内容相互补益。

本讲义附有※号的各节，可以作为选学内容，也可以省略。

这本讲义在选编的过程中，参考了许多概率统计书籍和教材，从中受到很大教益，不再一一列举，于此一并致谢。

由于水平所限，书中的缺点错误难免，热切希望读者批评指正。

编　者

1983年5月

目　　录

第一章　随机事件和概率

§1　概率论研究的对象

人们在自己的实践活动中，所观察到的现象一般可分成两类：一类现象是确定性的，例如，“在标准大气压下，纯水加热到100°C时必然会沸腾”，“向上抛一石子必然下落”，“同性电荷必不相互吸引”等等。这种在一定条件下有确定结果发生的现象称为确定性现象或必然现象。

另一类现象是随机性的，例如，“在相同条件下抛一枚硬币，其结果可能是正面向上也可能背面向上，并且不论怎样控制抛掷条件，在每次投掷之前无法肯定抛掷的结果是什么”；“用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，并且不论怎样控制射击条件，在每次射击以前无法予测弹着点的确切位置”。这种在一定条件下具有多种可能发生的结果，而在每次观察和试验以前无法预言确切结果的现象称为随机现象或偶然现象。

是不是这些偶然现象都没有规律可寻呢？事实并非如此，人们通过长期地反复观察和实践发现，这类现象虽然就每次试验或观察结果来说它具有不确定性，但在相同条件下进行大量地重复试验或观察时却呈现出某种规律性。例如，掷一枚硬币事先我们不能断言出现正面还是反面，但是，连续多次掷一枚硬币，就会发现出现正面的次数大致有半数；同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定的规律分布等等。

这些事例说明随机现象的偶然性和必然性是对立统一的。由于这种规律性是通过对随机现象大量观察或实验后得到的，因此，我们称它为统计规律性。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

概率统计的理论和方法在应用上是十分广泛的。目前它已遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门之中。例如它在自动控制、通讯技术、电子学、纺织、军事、经济、气象、天文、地质、生物医药等部门都获得了日益广泛地应用。

§2 随机事件及其运算、性质

一、随机试验

为了叙述方便，我们对自然现象进行观察或进行一次试验统称为一个试验。下面举一些例子来说明。

试验E_1：抛一枚硬币观察正面、反面出现的情况。

试验E_2：抛一颗骰子观察出现的点数。

试验E_3：记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数。

试验E_4：一口袋中装有红白两种颜色的乒乓球，从袋中任取一只球观察其颜色。

试验E_5：一射击手进行射击，直到击中为止，观察其射击情况。

试验E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

试验E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

上面的例子它们有着共同的特点，例如E_1它有两种可能结果：出现正面或者出现反面，但在投掷之前不能确定出现正面还是出现反面，这个试验可以在相同条件下重复地进行。又如试验E_2，它有六种可能结果即出现点数为1，2，

3，4，5，6中之一，但在投掷之前不能确定会出现哪一点，这个试验也可以在相同条件下重复地进行。再如试验E_6，我们知道灯泡的寿命（以小时计）时间$t \geqslant 0$，但在测试之前不能确定它的寿命有多长，这个试验也可以在相同的条件下重复地进行。概括起来这些试验都具有以下特性：

1、可以在相同条件下重复地进行；

2、每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3、进行一次试验之前不能确定哪一个结果出现。

在概率论中，我们把具有上述三个特性的试验称为随机试验，简称试验。本教材所说的试验都是指随机试验。

二、随机事件，样本空间

（一）随机事件：一个随机试验的所有可能结果事先是可以知道的，但在每次试验之前却不能确定哪个会出现。例如投一枚硬币，“正面向上”这件事情可能发生也可能不发生，但如果重复投掷许多次，就能看出它的发生是具有某种规律性的。

在随机试验中，对一次试验可能发生也可能不发生，而在大量重复试验中却有某种规律性的事情，称为这个随机试验的随机事件，简称事件，记作，A、B、C……。

在一随机试验中，它的每一个可能出现的结果都是一个随机事件，它们是这个试验的最简单的随机事件，我们称这些简单的随机事件为基本事件。

例2.1. 在0—9这十个数字中任意选取一个，“选取一个数是0”，“选取一个数是9”就是基本事件。

除基本事件外还有其它的事件。如“选取一个数是奇数”，“选取一个数是大于4的数”，“选取一个数是3的倍

数”等等，显然它们都是由基本事件组成的。例如：“选取一个数是3的倍数”，它是由“取得一个数是3”、“取得一个数是6”、“取得一个数是9”三个基本事件组合而成的，当且仅当这三个基本事件中有一个发生，“取得一个数是3的倍数”这一事件发生。我们称由若干个基本事件组成的事件叫做复合事件。

在试验中必然发生的事件叫做必然事件，不可能发生的事件叫做不可能事件。

例2.2。从十个同类产品（其中有8个正品，2个次品）中任意抽出3个，那么，A：“三个都是正品”，B：“至少有一个次品”都是随机事件，而“三个都是次品”是不可能事件，记作ϕ。“至少有一个正品”是必然事件，记作Ω。必然事件和不可能事件不是随机事件，但为了讨论方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件。

（二）样本空间

为了便于研究随机试验E，我们将随机试验E的所有基本事件组成的集合叫做E的样本空间或基本空间，记为Ω。Ω中的元素就是试验E的基本事件，基本事件也叫样本点。

下面写出（一）中试验E_k（$k=1,2,3,4,5,6,7$）的样本空间。

试验E_1：有两个基本事件即“正面”或“反面”，所以样本空间$\Omega=\{$（正面），（反面）$\}$。

试验E_2：有六个基本事件即出现“1点”、“2点”、“3点”、“4点”、“5点”、“6点”，所以样本空间$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

试验E_3：有可列无穷多个基本事件即一分钟内接到呼唤次数为“0”次、“1”次、“2”次，……，所以样本

空间为$\Omega=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$。

试验E_4：有两个基本事件即"摸出红球"、"摸出白球"，所以样本空间为$\Omega=\{$红球，白球$\}$。

试验E_5：有可列无穷多个基本事件即"第一次击中"$=\{+\}$，"第二次才击中"$=\{-,+\}$，"第三次才击中"$=\{-,-,+\}$，……这里"+"表示击中，"-"表示没有击中，所以样本空间$\Omega=\{+,-+,--+,\cdots\cdots\}$。

试验E_6：因为在一批灯泡中任取一只测试它的寿命，我们自然把样本空间取为$\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$。

试验E_7：因为记录某地一昼夜的最高温度和最低温度，所以我们设x为最低温度，y为最高温度，并设这个地区的温度不会低于T。不会高于T，于是样本空间为

$$\Omega=\{(x\ y) \mid T_0\leqslant x<y\leqslant T\}。$$

值得注意的是，样本空间的元素是由试验的内容确定的，随着问题的不同，样本空间可以相当简单，也可以相当复杂。例如在试验E_4中，如果将球自1到n编号，(设袋中有n只球)，若试验为：在袋中任取一球观察其号码，那么样本空间不再是{红球，白球}，而是$\{1,2,\cdots\cdots n\}$。

由于随机事件是基本事件或由基本事件组成的。引入样本空间之后，我们把试验E中的事件看作样本空间Ω的子集，而且事件发生当且仅当子集中的一个样本点发生。特别，必然事件就是样本空间Ω，不可能事件就是空集ϕ。

例2.3. 讨论检查n个产品这一随机现象，若我们注意的是产品中的次品个数k，那么它所有可能的基本事件有$n+1$个，即$\omega_0=\{$没有次品$\}$，$\omega_1=\{$有一个次品$\}$，……$\omega_n=\{$有n个次品$\}$。所以，它的样本空间$\Omega=\{\omega_0\omega_1\cdots\cdots\omega_k\cdots\cdots\omega_n\}$。此时任一随机事件A总可以由某些基本事件组

成，如次品数不超过3就是$\{\omega_0\omega_1\omega_2\omega_3\}$，次品数在3至6之间就是$\{\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6\}$。这就是说任一随机事件A总可以表示成$A=\{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\cdots\cdots\omega_{i_k}\}$。

当然，反过来某些基本事件总组成一个随机事件。所以，对这一随机现象来说，它所有的随机事件就是Ω的一切子集，此时共有2^{n+1}个随机事机。

对于一个随机现象，如果能够掌握它的所有的随机事件，并能通过一定规律给出随机事件的概率，那么，我们就认为这一随机现象已被我们掌握了。以后概率的公理化定义还要讲到这一问题。

三、事件间的关系

进行一个随机试验，有许多个随机事件，它们有各种不同的特性，彼此之间又有一定的联系。详细地分析事件之间的关系不仅能帮助我们更深刻地认识事件的本质，而且将有利于今后对它们的概率之间的关系进行研究。

例如，高射炮向敌机连发两弹，这时考虑“命中一弹”、“命中两弹”、“第一弹命中”、“第二弹命中”、“击中了敌机”、“未击中敌机”等事件。显然这些事件是相互联系的。

1．事件的包含与相等

设有事件A及B，如果A发生B必发生，则称事件B包含事件A，记作$A\subset B$或$B\supset A$。

例如，高射炮向敌机连发两弹，若A：“命中一弹”，B：“击中敌机”，C：“命中2弹”，则$A\subset B$，$C\subset B$。

显然，对任一事件A，必有$\Omega\supset A\supset\phi$。

如果$A\subset B$与$B\subset A$同时成立，则称事件A与B相等（或等价），记作$A=B$。

2．事件的和与积。

如果C表示“事件A与B中至少有一个发生”这一事件，则称C为A与B的和，记作 $C=A+B$ 或 $C=A\cup B$。

如果D表示“事件A与B同时发生”这一事件，则称D为A与B的积，记作 $D=AB$ 或 $D=A\cap B$。

例如高射炮向敌机连发两弹，若A：“命中一弹”，B：“命中两弹”，C：“至少命中一弹”，于是有 $C=A+B$，$AC=A$，$BC=B$，$AB=\phi$（不可能事件）。

事件的和与事件的积都可以推广到有限多个事件，即

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n$，表示“$A_1A_2\cdots\cdots A_n$中至少有一事件发生”这一事件。

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$，表示“$B_1B_2\cdots\cdots B_i$同时发生”这一事件。

事件的和与积还可以推广到可列无穷多个事件的情形，即

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad 与 \quad B=\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i。$$

3．事件的差

如果E表示“事件A发生而事件B不发生”这一事件，则称E为事件A与B之差，记作 $E=A-B$。

例如，高射炮向敌机连发两弹，若A：“击中敌机”，B：“命中两弹”，E：“命中一弹”则 $E=A-B$。

4．互不相容事件与对立事件

如果事件A与事件B不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件A与B是互不相容事件（或互斥事件）。

如果A、B满足以下条件：$A+B=\Omega$，$AB=\phi$，也就

是说A、B中必然发生其一，但不能同时发生，则称A与B为对立事件。记作$\overline{A}=B$或$A=\overline{B}$，即$A\overline{A}=\phi$，$A+\overline{A}=\Omega$。

例如，高射炮向敌机连发两弹，若A：“击中两弹”，B：“未击中敌机”，则$AB=\phi$，即A、B是互不相容事件。

“至少击中一弹”与“未击中敌机”是对立事件。

由定义可知，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件并不一定是对立事件。

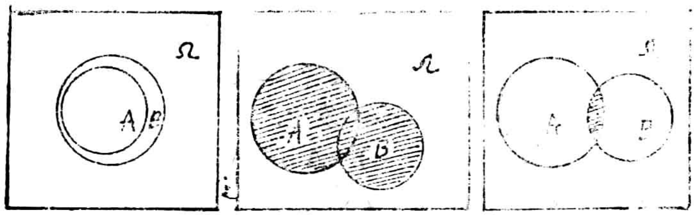
从上面讨论可以看到，概率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系和运算是一致的。为了便于对照，我们列出下面的表格。

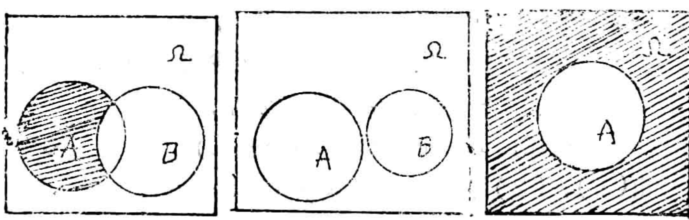
表2.1

符　号	概　　率　　论	集　合　论
Ω	样本空间；必然事件	空间
ϕ	不可能事件	空集
$\omega\subset\Omega$	样本点基本事件	Ω中的点（或元素）
$A\subset\Omega$	事件A	Ω的子集A
$A\subset B$	事件B包含事件A	集合B包含集合A
$A=B$	事件A与事件B相等（或等价）	集合A与集合B相等（或等价）
$A\cup B$	事件A与事件B至少有一个发生（A与B的和）	集合A与集合B的并（或和）
$A\cap B$	事件A与事件B同时发生（A与B的积）	集合A与集合B的交
$A-B$	事件A发生而事件B不发生(A与B的差)	集合A与集合B的差
$A\cap B=\phi$	事件A与事件B互不相容	集合A与集合B没有公共元素
$\overline{A}$	事件A的对立事件	集合A的余集

这样我们常可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的关系来分析事件间的关系。事件间的关系可以用平面上某一矩形中的图形来表示，称为文氏图。

$A \subset B$ $\quad\quad$ $A \cup B$ $\quad\quad$ $A \cap B$





$A - B$ $\quad\quad$ $AB = \phi$ $\quad\quad$ $\overline{A}$

四、事件的运算性质

1．交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$ (2.1)

2．结合律：
$$\left.\begin{aligned}(A+B)+C&=A+(B+C)\\(AB)C&=A(BC)\end{aligned}\right\}\quad(2.2)$$

3．分配律：$A(B+C)=AB+AC$ (2.3)

$A+BC=(A+B)(A+C)$ (2.4)

4．德摩根（De Morgan）定理：

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B} \quad (2.5)$$

对于 n 个事件，甚至对于可列无穷多个事件，德摩根定理也成立。

以上法则证明方法类似，我们只给出分配律和德摩根定理的证明。

证明： $A(B+C)=AB+AC$

证：（1）若 $A(B+C)$发生，

$\Rightarrow A$ 且$B+C$发生，

$\Rightarrow A$发生且B、C中至少有一个事件发生，

$\Rightarrow AB$发生或者AC发生，

$\Rightarrow AB+AC$发生，

所以，$A(B+C)\subset AB+AC$；

（2）反之，若$AB+AC$发生，

$\Rightarrow AB$发生或AC发生，

$\Rightarrow A$发生且B、C中至少有一个事件发生，

$\Rightarrow A$发生且$B+C$发生，

所以，$AB+AC\subset A(B+C)$；

由（1）、（2）得：$A(B+C)=AB+AC$。

证明： $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$

证：（1）若$\overline{A}+\overline{B}$发生，

$\Rightarrow \overline{A}$、$\overline{B}$至少有一个事件发生，

$\Rightarrow \begin{cases}\text{若}\overline{A}\text{发生，则}A\text{不发生} \quad \therefore AB\text{不发生，}\\ \text{若}\overline{B}\text{发生，则}B\text{不发生} \quad \therefore AB\text{不发生，}\end{cases}$

$\Rightarrow \overline{AB}$发生，

所以，$\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{AB}$；

（2）反之，若$\overline{AB}$发生，

$\Rightarrow AB$不发生，

$\Rightarrow A$不发生或B不发生，

$\Rightarrow \overline{A}$发生或$\overline{B}$发生，

$\Rightarrow \overline{A}+\overline{B}$发生，

所以，　　$\overline{AB} \subset \overline{A} + \overline{B}$，

由（1）（2）得，$\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$。

§3 频率与概率

我们知道，随机现象的规律性仅仅通过作一两次少量试验是无法获得的。因此，必须在同一条件下进行多次重复试验，才能对各种随机事件给出客观地、定量地描述。

一、事件的频率

1．频率的定义：设随机事件A在n次试验中发生了m次，则称$\frac{m}{n}$为事件A的频率，记作W(A)。即

$$W(A)=\frac{m}{n} \tag{3.1}$$

我们来看下面"抛硬币"这个随机试验的例子。表中n表示抛硬币的次数、m表示徽花向上的次数，$W=\frac{m}{n}$表示徽花向上的频率。

表3.1

实验序号	n＝5		n＝50		n＝500	
	m	W	m	W	m	W
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上表我们可以看出，抛硬币次数较少时，徽花向上的次数是不稳定的；但是，随着抛掷次数的增多，频率越来越明显地呈现出稳定性。

这种试验从前也有人做过，下表是他们试验的记录。

表3.2

实　验　者	n	m	W
Demorgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从上表更能看出、不管什么人抛，当试验的次数逐步增多时，频率W总是稳定于0.5 附近而偏离0.5 的可能性很小，这个常数是客观存在的，这就为我们定义事件的概率奠定了客观基础。

2．频率的性质

我们可以验证，当试验次数n固定时，事件A发生的频率W（A）有以下的性质：

1．$0\leqslant W(A)\leqslant 1$　　　（3.2）

2．$W(\Omega)=1$，　$W(\phi)=0$　　　（3.3）

3．若A、B互不相容，即$AB=\phi$，则

$$W(A+B)=W(A)+W(B) \tag{3.4}$$