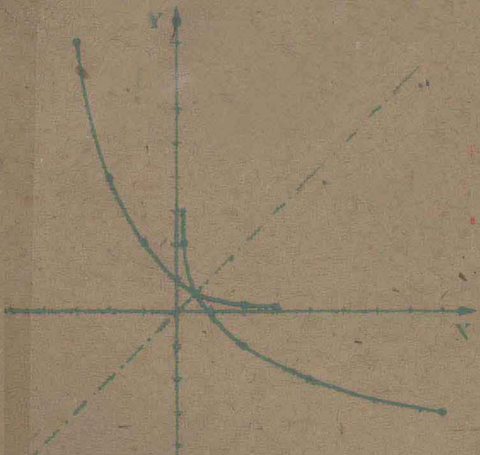
职工业余中等学校課本

代数与初等函数

DAISHU YU CHUDENG HANSHU

第 三 册

(試用本)



上 海 教 育 出 版 社

目　录

第六章　指数函数与对数函数

一　指数函数与对数函数

76．指数函数与对数函数　自变量 x 写在指数位置的函数，如 $y=a^x$ 叫做指数函数．这里自变量 x 可以取一切实数，但 a 必須是一个正的常量．因为 a 如果是一个負数，那末所得到的値就不一定是一个实数．例如，$y=(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$．因此我們研究指数函数时必須除去这种情况．

在指数函数 $y=2^x$ 中，当 $x=1$ 时，$y=2$；当 $x=2$ 时，$y=4$；……这样 x 每取一个值，y 必定有一个唯一的値与它对应．反过来說，y 每取一个値，x 也一定有一个唯一的値与它对应．例如，$y=2$ 时，$x=1$；$y=4$ 时，$x=2$；……这样的函数关系叫做互为反函数．

指数函数 $y=a^x$ 的反函数叫做对数函数，用 $\log_a y=x$ 来表示．习慣上用 x 作自变量，所以一般写成 $\log_a x=y$（x 与 y 互換位置），其中記号 log 表示对数，a 叫做对数的底，x 叫做眞数．y 是以 a 为底 x 的对数．例如，$\log_2 8=3$ 讀做以 2 为底 8 的对数等于 3．又如，

$\log_{10}100=2$ 讀做以 10 为底 100 的对数等于 2.

由以上的定义可知 $a^x=y$ 和 $\log_a y=x$ 两个式子中所表示的 a, x, y 三个数的关系相同，因此我們可以把指数函数 $y=a^x$ 换写成对数函数 $\log_a y=x$，例如，以 4 为底则有：

指数形式	对数形式
$4^1=4$;	$\log_4 4=1$.
$4^2=16$;	$\log_4 16=2$.
$4^0=1$;	$\log_4 1=0$.
$4^{-2}=\frac{1}{16}$;	$\log_4 \frac{1}{16}=-2$.
$4^{\frac{1}{2}}=2$;	$\log_4 2=\frac{1}{2}$.

又如，以 10 为底则有：

指数形式	对数形式
$10^1=10$;	$\log_{10}10=1$.
$10^2=100$;	$\log_{10}100=2$.
$10^0=1$;	$\log_{10}1=0$.
$10^{-2}=\frac{1}{100}=0.01$;	$\log_{10}0.01=-2$.
$10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$;	$\log_{10}0.1=-1$.

利用指数函数与对数函数的关系，我們还可以进行对数、眞数和底数間的互求.

例 1　以 4 为底，8 的对数是什么？

解　設所求的对数为 x，则 $\log_4 8=x$.

即：
$$4^x=8.$$

就是
$$(2^2)^x=8=2^3$$

$$\because\quad 2x=3$$

（要使相同底数 2 的两个冪相等，必須并且只須它們的指数相等.）

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2}.$$

答：底是 4 的时候，8 的对数是$\frac{3}{2}$.

例 2　底是什么数的时候，27 的对数等于 3.

解　設所求的底是 x，

$$\log_x 27=3$$

就是
$$x^3=27;$$

$$\therefore\quad x=\sqrt[3]{27}=3.$$

答：底是 3 的时候，27 的对数等于 3.

例 3　底是 4 的时候，一个数的对数等于 3，求这个数.

解　設所求的眞数为 x，就得，

$$\log_4 x=3;$$

就是
$$4^3=x;$$

$$\therefore\quad x=4^3=64.$$

答：这个数是64.

77．指数函数及对数函数的图象与性质 为了研究方便，我們在同一坐标系，用描点方法作出 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象.

任意取自变量 x 的値，求出对应的 y 値列成下表：

$y=2^x$ → ← $y=\log_2 x$

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…	y
y	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…	x

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ → ← $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…	y
y	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…	x

对数函数是指数函数的反函数，因此将指数函数的图象順着第一象限和第三象限角的平分綫对折，即得到对数函数的图象（图 6-1）．这时观察所作出的图象，我們可以看到，如果把指数函数 $y=2^x$ 或 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象順着第一象限和第三象限角的平分綫对折，就能得到对数函数 $y=\log_2 x$ 或 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象，这就是説 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$；$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 是

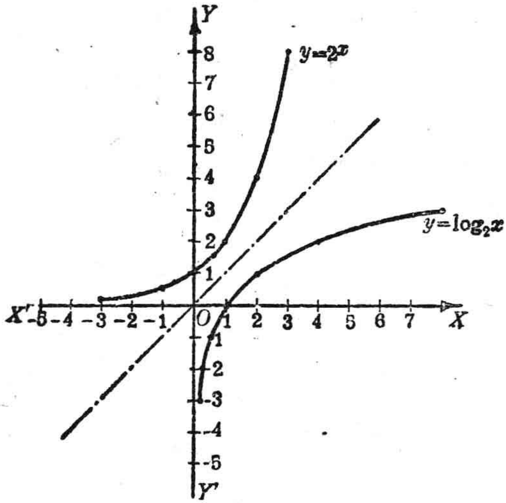


图 6-1

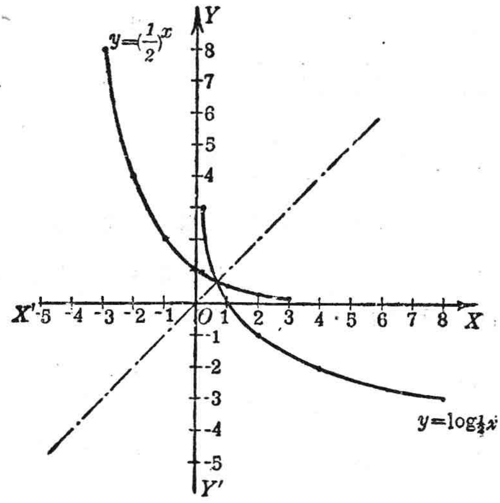


图 6-2

关于直綫 $y=x$ (即一、三象限角的平分綫)为对称的图形(图6-1、6-2). **一般地說,两个互为反函数的图象是关于一、三象限角平分綫的对称形.**

从图象中我們直观地看出和证完第三章所讲的指数的一些性质的正确性;同样我們可以从图象中看出对数函数具有以下的一些主要性质:

(1)对数函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象全部都在 y 軸的右边,并且不与 y 軸相交,所以**負数和零沒有对数**. 同时,这两条曲綫都經过点(1, 0),所以**1的对数永远是等于零.**

(2)在 $y=\log_2 x$ 的图象中,当 $x=2$ 时,y 等于1;在 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象中,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,y 亦等于1,所以**眞数与底数相同的对数等于1.**

习题三十四

1. 把下列指数形式的等式写成对数形式的等式:

(1) $2^3=8$;　　(2) $3^4=81$;

(3) $4^3=64$;　　(4) $6^2=36$;

(5) $10^4=10000$;　　(6) $2^{-1}=\frac{1}{2}$;

(7) $3^{-2}=\frac{1}{9}$;　　(8) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$;

(9) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$;　　(10) $10^{-3}=0.001$.

2. 把下列对数形式的等式写成指数形式的等式:

(1) $\log_2 64=6$;　(2) $\log_3 81=4$;

(3) $\log_5 125=3$;　(4) $\log_7 49=2$;

(5) $\log_2 \frac{1}{4}=-2$;　(6) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$;

(7) $\log_{81}\frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$;　(8) $\log_{\frac{4}{3}}\frac{27}{64}=-3$;

(9) $\log_{10} 0.01=-2$;　(10) $\log_{10} 100000=5$.

3. 求以 10 为底 100 的对数.

4. 底是什么数的时候, 16 的对数是 4.

5. 底是 7 的时候,什么数的对数是 2.

二　积、商、幂的对数

78. 积、商、幂的对数

(1)正因数的乘积的对数,等于各个因数的对数的和.

設　$\log_a x_1=y_1$; $\log_a x_2=y_2$. $(x_1>0,\ x_2>0)$

則　$x_1=a^{y_1}$; $x_2=a^{y_2}$.

$\because$　$x_1\cdot x_2=a^{y_1}\cdot a^{y_2}=a^{y_1+y_2}$,

根据对数的意义得到:

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=y_1+y_2=\log\ x_1+\log_a x_2.$$

这个式子可以推广到許多个因数的乘积,即:

$$\log_a(x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_n)=\log_a x_1+\log_a x_2+\cdots\cdots$$
$$+\log_a x_n.$$

例 $\log(378\times 45.2)=\log 378+\log 45.2.$

(2)**两个正数的商的对数，等于被除数的对数减去除数的对数.**

設 $\log_a x_1=y_1$; $\log_a x_2=y_2$. $(x_1>0,\ x_2>0)$

則 $x_1=a^{y_1}$; $x_2=a^{y_2}$.

$\because$ $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{a^{y_1}}{a^{y_2}}=a^{y_1-y_2}$;

根据对数的意义得到:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=y_1-y_2=\log_a x_1-\log_a x_2.$$

例 $\log\dfrac{2}{3}=\log 2-\log 3.$

(3)**正数的幂的对数，等于幂的底数的对数乘以幂的指数.**

設 $\log_a x=y$, $(x>0)$

則 $x=a^y$.

$\because$ $x^n=(a^y)^n=a^{ny}$,

根据对数的意义得到:

$$\log_a x^n=n\cdot y=n\cdot\log_a x.$$

例 1 $\log 7^3=3\log 7.$

利用上面三个性质，我們可以取任何代数式的对

数.

例 2 設 $x=\frac{2.5\times 7^3}{0.28^2}$, 求 $\log_a x$.

解 $\log_a x=\log_a\frac{2.5\times 7^3}{0.28^2}$

$=\log(2.5\times 7^3)-\log_a 0.28^2$

$=\log_a 2.5+\log_a 7^3-2\log_a 0.28$

$=\log_a 2.5+3\log_a 7-2\log_a 0.28.$

例 3 設 $x=\frac{5ax}{\sqrt[3]{4}}$, 求 $\log_{10} x$.

解 $\log_{10} x=\log_{10}\frac{5ax}{\sqrt[3]{4}}$

$=\log_{10}(5ax)-\log_{10} 4^{\frac{1}{3}}$

$=\log_{10} 5+\log_{10} a+\log_{10} x-\log_{10} 4^{\frac{1}{3}}$

$=\log_{10} 5+\log_{10} a+\log_{10} x-\frac{1}{3}\log_{10} 4.$

习题三十五

求下列各式以 10 为底的对数:

(1) $x=3ab$; (2) $x=\frac{4cd}{3a}$;

(3) $x=a^3b^2$; (4) $x=\sqrt{ab}$;

(5) $x=\frac{\sqrt[3]{ac}}{a+c}$; (6) $x=\left(\sqrt{\frac{a}{2b}}\right)^3$;

(7) $x=\frac{5(a+b)}{a(a-b)}$; (8) $x=\frac{2}{5}\sqrt[3]{m\sqrt{n}}$;

(9) $x=(\sqrt{x})^{\sqrt{2}}$; (10) $x=m^{-2}n^{-3}$.

三 常用对数

79. 常用对数和它的性质 常用对数是以10为底的对数，用符号 lg 来表示，而把底数 10 略去不写，即把 $\log_{10}N$ 簡写成 $\lg N$. 它除了具有前面所讲过的底大于 1 的对数所具有的性质，还具有下面的一些性质:

(1) 10 的正整数冪(1 后面带有若干个零的整数)的对数等于眞数里零的个数:

$\because\ 10=10^1$, $\therefore\ \lg 10=1$;

$\because\ 100=10^2$, $\therefore\ \lg 100=2$;

$\because\ 1000=10^3$, $\therefore\ \lg 1000=3$;

....

$\because\ \underbrace{100\cdots\cdots0}_{n\text{个零}}=10^n$, $\therefore\ \lg \underbrace{100\cdots\cdots0}_{n\text{个零}}=n$.

(2) 10 的負整数冪 (1 前面带有若干个零的純小数)的对数是一个負数，它的絕对值等于小数里零的个数(包括整数单位的一个零).

$\because\ 0.1=10^{-1}$, $\therefore\ \lg 0.1=-1$;

$\because\quad 0.01=10^{-2},\qquad \therefore\quad \lg 0.01=-2;$

$\because\quad 0.001=10^{-3},\qquad \therefore\quad \lg 0.001=-3;$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\because\quad \underbrace{0.00\cdots\cdots01}_{n\text{个零}}=10^{-n}\ \therefore\quad \lg \underbrace{0.00\cdots\cdots01}_{n\text{个零}}=-n.$$

(3) 10 的整数冪以外的正有理数的对数都是无理数.

一个数的对数是无理数时，我們可以用小数表示出它的近似值，一般来說，任何一个正数的对数都可以用一个整数（正整数、零或者負整数）与一个正的純小数(或者零)的和来表示；整数部分叫做这个对数的首数，小数(或者零)部分叫做这个对数的尾数.

(4)正整数或者正的带小数的对数，它的首数是一个正整数或零，它的值等于眞数的整数部分的位数减去 1.

例如 $1<6.8<10.$

所以 $$\lg 1<\lg 6.8<\lg 10,$$

就是 $$0<\lg 6.8<1,$$

$$\therefore\quad \lg 6.8=0+\text{正的純小数}.$$

这就是說，$\lg 6.8$ 的首数等于 0.

又如，$10<35<100,$

所以 $$\lg 10<\lg 35<\lg 100,$$

就是 $$1<\lg 35<2.$$

$$\therefore\quad \lg 35=1+\text{正的純小数}.$$

这就是説，lg 35 的首数等于 1.

一般来説，如果一个正数或者是正的带小数 N，它的整数部分有 m 位，那末，

$$\underbrace{1000\cdots\cdots0}_{(m-1)\text{个零}}\leqslant N<\underbrace{100\cdots\cdots0}_{m\text{个零}},$$

所以 $$\lg \underbrace{100\cdots\cdots0}_{(m-1)\text{个零}}\leqslant \lg N<\lg \underbrace{100\cdots\cdots0}_{m\text{个零}},$$

就是 $$m-1\leqslant \lg N<m,$$

$$\therefore\quad \lg N=(m-1)+\text{正的純小数(或者零)}.$$

这就是説，$\lg N$ 的首数等于 $m-1$.

(5) 正的純小数的对数，它的首数是一个負整数，它的絕对值等于眞数里第一个有效数字前面的零的个数(包括整数单位的一个零).

例如 $0.1<0.463<1$,

所以 $$\lg 0.1<\lg 0.463<\lg 1,$$

就是 $$-1<\lg 0.463<0,$$

$$\therefore\quad \lg 0.463=-1+\text{正的純小数}.$$

这就是説，lg 0.463 的首数等于 -1.

又如 $0.01<0.0507<0.1$,

所以 $$\lg 0.01<\lg 0.0507<\lg 0.1,$$

就是 $$-2<\lg 0.0507<-1,$$

$$\therefore\quad \lg 0.0507=-2+\text{正的純小数}.$$

这就是說，$\lg 0.0507$ 的首数等于 -2.

一般来説，如果一个正的純小数 A，它的第一位有效数字，前面有 m 个零(包括整数单位的一个零)，那末，

$$\underbrace{0.00\cdots\cdots01}_{m\text{个零}}\leqslant A<\underbrace{0.00\cdots\cdots01}_{(m-1)\text{个零}},$$

所以 $$\lg \underbrace{0.00\cdots\cdots01}_{m\text{ 个零}}\leqslant \lg A<\lg \underbrace{0.00\cdots\cdots01}_{(m-1)\text{个零}},$$

就是 $$-m\leqslant \lg A<-(m-1),$$

所以 $$\lg A=-m+\text{正的純小数(或者零)}.$$

这就是說，$\lg A$ 的首数等于 $-m$.

在对数計算里为了便于运算，需要保持尾数为正数形式，因此規定把“$-m+$正的純小数”简写成 $\overline{m}+$ 正的純小数. 例如 $-3+0.7482$ 简写成 $\overline{3}.7482$.

习题三十六

1. 求下列各对数:(口答)

$\lg 1000$; $\lg 100000$; $\lg 1$; $\lg 0.001$; $\lg 0.00001$.

2. 已知 $\lg x$ 等于 4, 1, 0, -1, -4, 求 x.

3. 决定下列各数的对数首数:(口答)