大学物理学习指导

上海工程技术大学物理教学部

清华大学出版社

大学物理学习指导

上海工程技术大学物理教学部

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是按照教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会制定的《非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求》和普通高校的学生特点编写的教学辅助参考书。本书按照力、热、电磁、振动与波、光和近代物理的顺序编写，共分为17章。每章由教学基本要求、内容提要和典型例题与练习三部分构成。每一道典型例题后面附有相关的练习题，有助于进一步巩固学生所学的物理知识，提高学习效率，同时帮助学生掌握物理解题方法，提高分析和解决问题的能力，培养创造性和发散思维能力。

本书适合作为普通高等学校理工科各专业的本、专科学生学习"大学物理"的教学辅导书。对于从事大学物理教学的教师讲授习题课，本书也有重要的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学习指导/上海工程技术大学物理教学部．--北京：清华大学出版社，2011.12
ISBN 978-7-302-26695-2

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①上…　Ⅲ．①物理学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第180966号

责任编辑：朱红莲　洪　英
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京市清华园胶印厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　　**印　张**：11　　**字　数**：266千字
版　次：2011年12月第1版　　**印　次**：2011年12月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：22.00元

产品编号：038894-01

前言

FOREWORD

教育部制定的《非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求》中指出：物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式、相互作用的自然科学。它的基本理论渗透在自然科学的各个领域，应用于生产技术的许多部门，是其他自然科学和工程技术的基础。以物理学基础为内容的大学物理课程，是高等学校理工科各专业学生一门重要的通识性必修基础课。该课程所教授的基本概念、基本理论和基本方法是构成学生科学素养的重要组成部分，是一名科学工作者和工程技术人员所必备的。通过大学物理课程教学，要培养学生独立获取知识的能力、科学观察和思维的能力、分析问题和解决问题的能力。

习题教学是教学过程中必不可少的一个环节，在传授知识、培养能力方面有其应有的作用。物理习题是针对物理现象、概念与规律等设置的训练性题目，能够帮助学生加深对所学物理知识的理解，掌握方法，拓展视野，加强运用理论解决实际问题的能力。

目前，工科大学物理课程内容多，课时少，其中习题课的课时更少。同时由于扩招和高考制度的改革，使得相当一部分工科学生的物理基础较差，大学物理成为他们“最难对付”的“拦路虎”。因此，我们设计了一些典型习题，力图用最少的时间达到最强的学习效果和教学效果。这些例题在知识方面具有代表性，能反映物理课程内容的重点和难点，帮助学生加深对所学物理知识的理解。同时，这些例题在物理方法方面也具有代表性，能帮助学生掌握解题方法。这些例题由易到难，满足了不同层次学生的需要。我们希望这些典型例题的设计，能够有助于学生巩固所学的物理知识，提高学习效率，帮助学生掌握物理解题方法，提高分析和解决问题的能力，同时有利于培养学生的创造性和发散思维能力。

本书按照力、热、电磁、振动与波、光和近代物理的顺序编写，共分为17章。各章节由教学基本要求、内容提要和典型例题与练习三部分构成。每一道例题后面附有相关的练习题，有利于物理方法的学习。

本书由上海工程技术大学物理教学部的教师编写完成，是“大学物理”课程建设的成果之一。参与本书编写的教师有：徐红霞负责第1、2、3章，邵辉丽负责第4、5章，刘烨负责第6章，任莉负责第7、8章，陈光龙负责第9、10章，张修丽负责第11、12章，陈戍负责第13、14、15章，汪丽莉负责第16、

17章。全书由徐红霞负责策划和统稿，卫邦达老师在退休之后发挥余热，对全书进行了校对。我们被卫老师认真负责的工作态度和治学严谨的作风深深感动，在此向他致以由衷的钦佩。

在本书的选编过程中我们参考和借鉴了许多国内的相关辅助教材，在此向所有给予启迪、提供素材的作者们表示谢意。

鉴于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，欢迎在使用过程中提出宝贵意见。

编　者

2011年10月于上海工程技术大学

目录

CONTENTS

第 1 章　质点运动学

1.1 教学基本要求

(1) 掌握位矢、位移、速度、加速度、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量。

(2) 能借助直角坐标系计算质点在平面内运动时的速度、加速度。

(3) 能计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

1.2 内容提要

1. 主要知识点

1) 三个概念

参考系：为描述物体的运动而选择的标准物。

坐标系：为了定量描述物体的运动，在选定的参考系中建立的带有标尺的数学坐标，简称坐标系。运动学中常用的坐标系有直角坐标系、平面极坐标系和自然坐标系。

质点：一个理想化的力学模型。忽略物体的大小和形状，把物体当做只有质量没有形状和大小的点。

2) 描述质点运动的四个物理量

位置矢量(位矢)：描述质点在空间中的位置。

位移：描述质点位置变动的大小和方向。

速度：描述质点运动的快慢和方向。

加速度：描述质点速度大小、方向变化的快慢。

具体表达式见表 1-1。

2. 运动学的两类问题

1) 第一类问题

已知质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求质点在任一时刻的位矢、速度、加速度、切向加速度、法向加速度、平均速度、平均加速度、位移以及轨迹方程等。

或者已知质点的运动方程 $s=s(t)$ 或 $\theta=\theta(t)$，求质点在任一时刻的速率、切向加速度、法向加速度、角速度、角加速度、角位移以及角坐标等。

表 1-1

物理量	描述对象	线量表示	直角坐标系下的表示	自然坐标系下的表示	角量	线量与角量的关系
位矢	位置	$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}(t)$	$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}=y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$	s	θ	$s=R\Delta\theta$
位移	位置变化	$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$	$\Delta\boldsymbol{r}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$	Δs	$\Delta\theta$	$\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$
速度	位置变化率	$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$ $\begin{cases} v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$ 大小：$\lvert\boldsymbol{v}\rvert=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$	$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$	$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$	$v=R\omega$
加速度	速度变化率	$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$	$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ $\begin{cases} a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$ 大小：$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n$ $\begin{cases} \boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t \\ \boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$ 大小：$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$ 方向：与法向的夹角 $\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}$	$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$	$\begin{cases} a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\beta \\ a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \end{cases}$

这类问题用求导方法求解，见图 1-1。

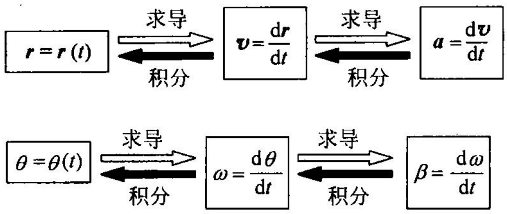

图　1-1

2）第二类问题

已知质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 以及初始速度和初始位置，求质点速度及其运动方程；

或者已知质点的角加速度 β 以及初始角速度和初始角位置，求质点的角速度及其角运动方程。

这类问题用积分方法求解，见图 1-1。这里加速度 $\boldsymbol{a}$ 的表达有三种情况：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(v)$ 和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x)$，对每种情况有不同的积分方法，具体参考典型例题与练习中例 3 和相应练习。同样，角加速度 β 也有三种表达，对应于三种不同的积分方法。

1.3　典型例题与练习

例 1　质点的运动方程为：$x=R\cos\omega t$，$y=R\sin\omega t$，讨论质点的运动性质。

分析：讨论质点的运动性质包括判断运动轨迹、速度是否为匀速、加速度是否为恒量。

解：由质点的运动方程 $x=R\cos\omega t$，$y=R\sin\omega t$ 消去时间 t，得轨迹方程

$$x^2+y^2=R^2$$

说明质点作圆周运动，且圆心在坐标原点。

位置矢量在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

两边对时间 t 求一阶导数，得速度矢量

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\omega R\sin\omega t\boldsymbol{i}+\omega R\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

下面分析速度的方向和大小，先求速度矢量与位置矢量的标量积

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}=(-\omega R\sin\omega t\boldsymbol{i}+\omega R\cos\omega t\boldsymbol{j})\cdot(R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j})=0$$

两者的标量积为零，表明速度方向垂直于位置矢量方向，即沿圆周轨迹的切向。速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(-\omega R\sin\omega t)^2+(\omega R\cos\omega t)^2}=\omega R=\text{常量}$$

速度大小为常量，表明质点作匀速率圆周运动。

速度矢量两边对时间 t 求一阶导数，得加速度矢量为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=(-\omega^2R\cos\omega t)\boldsymbol{i}+(-\omega^2R\sin\omega t)\boldsymbol{j}$$

通过比较加速度矢量和位置矢量

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$$

可以看出，加速度矢量与位置矢量方向相反，即加速度方向指向圆心。再看加速度大小

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-\omega^2 R\cos\omega t)^2 + (-\omega^2 R\sin\omega t)^2} \\ &= \omega^2 R = \text{常量} \end{aligned}$$

加速度大小为常量。由于加速度大小不变，所以表明质点速度方向均匀变化。

结论：质点作匀速率圆周运动，加速度方向始终指向圆心。

练习1 某质点作直线运动的运动学方程为 $x=3t-5t^3+6$ (SI)，则该质点作(　　)。

(A) 匀加速直线运动，加速度方向沿 x 轴正方向

(B) 匀加速直线运动，加速度方向沿 x 轴负方向

(C) 变加速直线运动，加速度方向沿 x 轴正方向

(D) 变加速直线运动，加速度方向沿 x 轴负方向

解析：运动学方程为 $x=3t-5t^3+6$，说明该质点沿 x 轴运动；加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-30t$，说明质点是作变加速运动且加速度方向沿 x 轴负方向。答案选(D)。

练习2 一质点在 Oxy 平面内运动。运动学方程为 $x=2t^2$ 和 $y=19-2t^2$ (SI)，则该质点作(　　)。

(A) 匀速直线运动　　(B) 变速直线运动

(C) 抛物线运动　　(D) 一般曲线运动

解析：轨迹方程为 $x+y=19$，说明该质点的轨迹为直线；速度 $\boldsymbol{v}=4t\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$，说明质点速度是随时间变化的。答案选(B)。

练习3 如图 1-2 所示，湖中有一小船，有人用绳绕过岸上距离水面高度为 h 处的定滑轮拉湖中的船向岸边运动。设该人以匀速率 v_0 收绳，绳不伸长，湖水静止，求小船与岸边的距离为 x 时的速度和加速度。

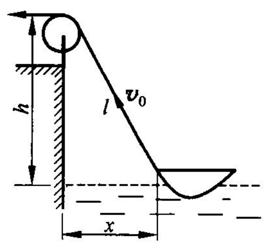

图 1-2

解析：运动学的重要任务之一，就是找出各种具体运动所遵循的运动方程，进而寻找速度和加速度。

设初始时刻绳长为 l_0，某时刻绳长 $l(t)=l_0-v_0t$，船与岸边的距离为 x(设 x 轴向右为正)，则根据几何关系 $l^2=x^2+h^2$ 得质点的运动方程为

$$x(t) = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 - h^2}$$

两边对时间 t 求导，可得船的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}v_0 = -\frac{l}{x}v_0$$

式中，“－”号表明船速方向与 x 轴正方向相反。

将上式两边对时间 t 再求导，可得船的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{h^2 v_0^2}{x^3}$$

式中，"－"号表明船的加速度方向与 x 轴正方向相反。船的速度和加速度都与 x 有关，且船速和船的加速度同向，说明船作变加速直线运动。

例 2　质点作曲线运动，$\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量，$\boldsymbol{v}$ 表示速度，s 表示路程，讨论各式的意义：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$，$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$，$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$。

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{v^2}{R}$，$\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}$，$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$。

解：(1) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$：瞬时速度矢量，反映了质点运动的快慢和方向。

$\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$：径向速度的大小。

$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=v$：在直角坐标系中的瞬时速度的大小。

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$：瞬时速率，和瞬时速度的大小 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 相等。

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}$：瞬时加速度矢量，反映了速度变化的快慢。

$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|=|\boldsymbol{a}|=a$：瞬时加速度的大小。

$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|=a$：在直角坐标系中的瞬时加速度的大小。

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$：切向加速度的大小（加速度矢量在自然坐标系中的切向分量），反映了速度大小的变化快慢。

$\dfrac{v^2}{R}$：法向加速度的大小（加速度矢量在自然坐标系中的法向分量），反映了速度方向的变化快慢。

$\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}=a$：在自然坐标系中瞬时加速度的大小。

练习 4　质点作曲线运动，$\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 表示位置矢量，s 表示路程，瞬时速度大小不可以用（　　）表示。

(A) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$　　(B) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$　　(D) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

解析：$\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$表示径向速度的大小。答案选(C)。

练习 5　一质点沿半径为 R 的圆周运动。质点所经过的弧长与时间的关系为 $s=bt+\dfrac{1}{2}ct^2$，其中 b、c 是大于零的常量，则其切向加速度的大小、法向加速度的大小和加速度的大小的正确表示式分别为（　　）、（　　）、（　　）。

(A) $\dfrac{(b+ct)^2}{R}$　　(B) c

(C) $\dfrac{(b+ct)^2}{R}+c$　　(D) $\sqrt{\dfrac{(b+ct)^4}{R^2}+c^2}$

解析：切向加速度的大小$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=c$，法向加速度的大小$\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2}{R}=\dfrac{(b+ct)^2}{R}$，加速度的大小$a=\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}=\sqrt{\dfrac{(b+ct)^4}{R^2}+c^2}$。故其切向加速度的大小为(B)，法向加速度的大小为(A)，加速度的大小为(D)。

练习 6　试说明质点作何种运动时，将出现下述各种情况。(其中 a_t、a_n 分别表示切向加速度和法向加速度，$v\neq0$)

(1) $a_t\neq0, a_n\neq0$。

(2) $a_t\equiv0, a_n\equiv0$。

(3) $a_t\equiv0, a_n\neq0$。

(4) $a_t\neq0, a_n\equiv0$。

解析：切向加速度 a_t 反映速度大小的变化快慢，法向加速度 a_n 反映速度方向的变化快慢。

(1) $a_t\neq0, a_n\neq0$：说明速度大小和方向都在变，即为变速曲线运动。

(2) $a_t\equiv0, a_n\equiv0$：说明速度大小和方向都不变，即为匀速直线运动。

(3) $a_t\equiv0, a_n\neq0$：说明速度大小不变，但方向变，即为匀速率曲线运动。

(4) $a_t\neq0, a_n\equiv0$：说明速度大小变，但方向不变且曲率半径为无穷大，即为变速直线运动。

例 3　一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a=-kv$，已知 $t=0$ 时，质点初速度为 $\boldsymbol{v}_0$。求其速度和时间的关系式。

分析：这是质点运动学的第二类问题，已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，求质点速度及其运动方程。用积分方法求解。

加速度有以下几种情况，如表 1-2 所示。

表 1-2

a 的表达式	速　度	运动方程	备　注
$a\equiv0$	$v=v_0$(常量)	$x=x_0+v_0t$	匀速直线运动
$\boldsymbol{a}$ 为不为零的恒矢量	$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	匀变速运动
$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$	$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t$，两边积分求 $\boldsymbol{v}$	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$，再积分	
$a=a(v)$	$\dfrac{\mathrm{d}v}{a(v)}=\mathrm{d}t$，两边积分求 v	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$，再积分	
$a=a(x)$	$v\mathrm{d}v=a(x)\mathrm{d}x$，两边积分求 v		$a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$

解：设质点在 t 时刻的速度为 v，

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$$

两边分离变量并积分得

$$\int_0^t -k\mathrm{d}t=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

练习 7　一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，加速度大小与速度平方成正比，即 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-Kv^2$，式中 K 为常量。并设发动机关闭时的速度为 v_0。若经 10 s 后电艇的速度为$\frac{v_0}{2}$，求电艇在关闭发动机后，

(1) 电艇的速度与时间的关系。

(2) 电艇行驶的距离与时间的关系。

(3) 电艇的速度与行驶 x 距离的关系。

解析：(1) 通过分离变量$\frac{\mathrm{d}v}{-v^2}=K\mathrm{d}t$，两边积分得$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{10v_0}t$。

(2) 由于 $\mathrm{d}x=v(t)\mathrm{d}t$，将(1)的结果带入两边积分得 $x=10v_0\ln\left(\frac{1}{10}t+1\right)$。

(3) 由于$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-Kv^2$，通过分离变量$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-K\mathrm{d}x$，两边积分得 $v=v_0\mathrm{e}^{-Kx}=v_0\mathrm{e}^{-\frac{x}{10v_0}}$。

练习 8　一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a=kx^2$，如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解析：由于 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=kx^2$，通过分离变量 $v\mathrm{d}v=kx^2\mathrm{d}x$ 两边积分得 $v=\left(\frac{2kx^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$。

练习 9　一质点在 xy 平面上运动，其加速度为 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-12t^2\boldsymbol{j}$ (SI)，$t=0$ 时，以 $\boldsymbol{v}_0=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ (SI)的速度通过坐标原点，求该质点任意时刻的速度和位置矢量。

解析：由 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t$ 得

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t(2\boldsymbol{i}-12t^2\boldsymbol{j})\mathrm{d}t,\quad \boldsymbol{v}=(3+2t)\boldsymbol{i}+(4-4t^3)\boldsymbol{j}$$

再由 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 得

$$\int_0^r\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t[(3+2t)\boldsymbol{i}+(4-4t^3)\boldsymbol{j}]\mathrm{d}t,\quad \boldsymbol{r}=(3t+t^2)\boldsymbol{i}+(4t-t^4)\boldsymbol{j}$$

例 4　一飞轮绕固定轴转动，其角加速度为 $\beta=5\cos\theta$，$t=0$ 时，$\omega_0=0$，$\theta_0=0$，求任意时刻的角速度。

分析：这是有关角量描述的第二类问题。角位移、角速度和角加速度的关系见图 1-1。角加速度也有以下几种情况，如表 1-3 所示。

表 1-3

β的表达式	角速度	角运动方程	备注
$\beta=0$	$\omega=\omega_0$(常量)	$\theta=\theta_0+\theta_0 t$	匀速率曲线运动
β为不为零的恒量	$\omega=\omega_0+\beta t$	$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$	匀变速曲线运动
$\beta=\beta(t)$	$d\omega=\beta dt$,两边积分求 ω	$d\theta=\omega(t)dt$,再积分	
$\beta=\beta(\omega)$	$\frac{d\omega}{\beta(\omega)}=dt$,两边积分求 ω	$d\theta=\omega(t)dt$,再积分	
$\beta=\beta(\theta)$	$\omega d\omega=\beta(\theta)d\theta$,两边积分求 ω		$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{\omega d\omega}{d\theta}$

解:设飞轮任意时刻的角速度为 ω,则

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{\omega d\omega}{d\theta}=5\cos\theta$$

分离变量并两边积分

$$\int_0^\omega \omega d\omega=\int_0^\theta 5\cos\theta d\theta$$

得

$$\omega=\sqrt{10\sin\theta}$$

练习 10 一质点从静止出发作半径为 R 的圆周运动,其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta=12t^2-6t$ (SI),求:

(1) 质点的角速度。

(2) 质点的角运动方程(设质点初始时刻的角坐标 θ_0 为零)。

解析:(1) 由 $\beta=\frac{d\omega}{dt}=12t^2-6t$,通过分离变量 $d\omega=(12t^2-6t)dt$,两边积分得 $\omega=4t^3-3t^2$(SI)。

(2) 由 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=4t^3-3t^2$,通过分离变量 $d\theta=(4t^3-3t^2)dt$,两边积分得 $\theta=t^4-t^3$(SI)。

练习 11 一质点作半径为 0.1 m 的圆周运动,其角位置 $\theta=2+4t^3$(SI),求:

(1) 任意时刻质点的法向加速度和切向加速度。

(2) 当 t 为多少时,法向加速度和切向加速度的数值相等?

解析:这是质点运动学的第一类问题,由质点的运动方程用求导方法求得质点在任一时刻的角速度和角加速度,进而求切向加速度和法向加速度。

(1) 由于 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2$,$\beta=\frac{d\omega}{dt}=24t$,所以法向加速度 $a_n=\omega^2R=144Rt^4=14.4t^4$(SI),切向加速度$a_t=R\beta=24Rt=2.4t$ (SI)。

(2) 当法向加速度和切向加速度的数值相等,即 $a_n=a_t$,$14.4t^4=2.4t$ 时,可得 $t^3=\frac{1}{6}$,$t=0.55$ s。

练习 12　一飞轮由静止开始绕其轴作匀角加速度转动，求其角位置为 θ 时法向加速度与切向加速度的比值。（设 $t=0$ 时初始角位置 $\theta_0=0$）

解析：由于 $\beta=\frac{d\omega}{dt}=\beta_0$，得 $\omega=\beta_0 t$，$\theta=\frac{1}{2}\beta_0 t^2$。所以法向加速度 $a_n=\omega^2 R=R\beta_0^2 t^2$，切向加速度 $a_t=R\beta_0$。则 $\frac{a_n}{a_t}=\beta_0 t^2=2\theta$。