天利考研

历年真题精解汇编

天利38套 考研

2011年考研真题精解

（五科综合）

数学一·数学二·数学三·英语·政治

王式安　尤承业
刘德荫　童　武
曹其军　索玉柱
涂振旗　刘小平
主编

- 命题组原成员联袂
- 阅卷组长亲自编写
- 试题解析详细、分析透彻、准确可靠
- 讲解系统、作者权威、体例全面

西藏人民出版社

天利考研

历年真题精解汇编

2011年考研真题精解

（五科综合）

数学一·数学二·数学三·英语·政治

王式安　尤承业
刘德荫　童　武
曹其军　索玉柱
涂振旗　刘小平
主编

西藏人民出版社

图书在版编目(C I P)数据

历年真题精解汇编.考研公共科 / 天利考研命题研究组编.
—拉萨:西藏人民出版社,2011.3
ISBN 978-7-223-03068-7

Ⅰ.①历… Ⅱ.①天… Ⅲ.①课程-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.①G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 016252 号

历年真题精解汇编
——2011 年考研真题精解(五科综合)

作　　者　天利考研命题研究组
责任编辑　李海平　刘　佩
装帧设计　李建霞
出　　版　西藏人民出版社
社　　址　拉萨市林廓北路 20 号
邮政编码　850000
北京发行部:100013　北京市东土城路 8 号林达大厦 A 座 13 层
电　　话:010-61420186(邮购)　64466473(批销)
打 击 盗 版:13801174584
印　　刷　北京彩虹伟业印刷有限公司
经　　销　全国新华书店
开　　本　787×1092　1/16
字　　数　2232 千
印　　张　71
版　　次　2011 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号　ISBN 978-7-223-03068-7
定　　价　123.40 元(全 4 册)

前　　言

为适应全球化带来的工作能力新需求，缓解就业压力，报考硕士研究生已然是众多大学生的不二选择。“考研热”正体现了我国的社会发展趋势以及当代青年规划人生的态度。全国硕士研究生入学考试是国家选拔高层次、高水平人才的考试，重点考查考生的综合能力。根据以往国家举行的硕士研究生入学考试，含泪折戟并非因专业课受限，很多考生是因为公共课。那么针对公共课考试，考生应该如何有效地进行复习呢？

历史是一面镜子，了解昨天才能明白今天，掌握历史和现在才能把握未来。研习历年试题是研究生入学考试复习备考中必不可少的关键环节，也是考生掌握考试动态，赢得高分的捷径。历年的考题是标准的复习题。自从实行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如2006年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一第四大题，2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题，2003年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题，2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题；2003年英语第36题与1996年英语第43题，2003年英语第37题与1995年英语第34题，2003年英语第26题与1995年英语第21题，2003年英语第29题与1996年英语第42题；2003年政治理论第21题与2000年文科政治第31题和1993年理科政治第6题，2003年政治理论第31题与1993年理科政治第32题等。所以，对往年真题的研究是非常必要的。循着命题人的思路，我们也可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在。

为了让考生能把握命题脉搏，见证最新考研真题，我们联袂考研政治命题组原组长、阅卷组组长和一线辅导教授，倾力推出这本《2011年考研真题精解(五科综合)》。

本书的特点是：

1. **内容权威**。参与编写的都是考研前命题人、阅卷组成员和一线辅导名师，内容权威，指导性强。

2. **解析详尽**。首先给出本题对应考点，再分析解题思路，给出详解，并尽量给出多种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注，点出该题考生应注意之处。

本书对2011年的考试试题进行详细的讲解和思路点拨，阐释考点和难点，启迪考生的智慧。考生可以以此进行认真研习，准确掌握试题的内容和要求，进行“有的放矢”的考前复习。本书编写时将试题解析与考试大纲考点相结合，总结出考试特点和规律，考生可以通过试题解析加强对考点的认识，理清解题思路，了解考试的最新动态和发展趋势。相信本书能让广大考生如虎添翼，在研究生入学考试中取得理想的成绩，迈进心仪的学校。

由于时间仓促，不当和疏漏之处在所难免，望广大专家和读者批评指正。

编者　于北京大学

天利考研系列丛书

书名	上市时间
考研英语历年真题精解汇编	2011 年 3 月
考研政治历年真题精解汇编	2011 年 3 月
考研数学历年真题精解汇编(数学一)	2011 年 4 月
考研数学历年真题精解汇编(数学二)	2011 年 4 月
考研数学历年真题精解汇编(数学三)	2011 年 4 月
2011 年考研真题精解(五科综合)	2011 年 3 月
考研数学错题本(理工类)	2011 年 5 月
考研数学错题本(经济类)	2011 年 5 月
考研英语错题本	2011 年 4 月
考研政治错题本	2011 年 4 月
考研数学快速解题技巧与方法汇编(理工类)	2011 年 4 月
考研数学快速解题技巧与方法汇编(经济类)	2011 年 4 月
考研数学难题、易丢分题汇编(理工类)	2011 年 4 月
考研数学难题、易丢分题汇编(经济类)	2011 年 4 月

丛书特色:

- ◆ 命题组成员亲自阐释快速解题思路,详解快速解题技法
- ◆ 试题解析详细、分析透彻、准确可靠
- ◆ 将基础、常考、易错和能举一反三的典型试题按照专题分类,有讲解,有错题提示

目　录

2011 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　).

(A)(1,0)　　(B)(2,0)　　(C)(3,0)　　(D)(4,0)

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(n=1,2,\cdots)$ 无界,则幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x-1)^k$ 的收敛域为(　　).

(A)$(-1,1]$　　(B)$[-1,1)$　　(C)$[0,2)$　　(D)$(0,2]$

(3)设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(x)>0$, $f'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点(0,0)处取得极小值的一个充分条件是(　　).

(A)$f(0)>1$, $f''(0)>0$　　(B)$f(0)>1$, $f''(0)<0$

(C)$f(0)<1$, $f''(0)>0$　　(D)$f(0)<1$, $f''(0)<0$

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$, $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$, 则 I,J,K 的大小关系是(　　).

(A)$I<J<K$　　(B)$I<K<J$　　(C)$J<I<K$　　(D)$K<J<I$

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$(　　).

(A)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B)$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　(C)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

(6)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若 $(1,0,1,0)$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(7)设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是(　　).

(A)$f_1(x)f_2(x)$　　(B)$2f_2(x)F_1(x)$

(C)$f_1(x)F_2(x)$　　(D)$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 EX 与 EY 存在,记 $U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$,则 $E(UV)=$(　　).

(A)$EU\cdot EV$　　(B)$EX\cdot EY$　　(C)$EU\cdot EY$　　(D)$EX\cdot EV$

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 s = ________.

(10)微分方程 $y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 y = ________.

(11) 设函数 $F(x,y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$, 则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=2}$ = ________.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$ = ________.

(13)若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$. 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$ 则 a = ________.

(14)设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则 $E(XY^2)$ = ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分,请将解答写在答题纸指定的位置上,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}}$.

(16)(本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$,求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=1,y=1}$.

(17)(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x - x = 0$ 不同实根的个数,其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明:对任意的正整数 n,都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立;

(Ⅱ)设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\,(n = 1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y) = 0$, $f(x,1) = 0$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$,其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,计算二重积分 $I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^T$,不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)T, \boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^T$ 线性表示

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

$\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,即 $r(\boldsymbol{A})=2$,且 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}$.

求(Ⅰ)$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布本别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P(X^2=Y^2)=1$

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知. $\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ)求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(Ⅱ)计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题解析

一、选择题

(1)【考点】 求曲线的拐点

【答案解析】 在区间[1,2]上，$\dfrac{f(1)+f(2)}{2}=0, f\left(\dfrac{1+2}{2}\right)<0, f(x)$ 为凹函数；

在区间[2,3]上，$\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=0, f\left(\dfrac{2+3}{2}\right)<0, f(x)$ 为凹函数；

在区间[3,4]上，$\dfrac{f(3)+f(4)}{2}=0, f\left(\dfrac{3+4}{2}\right)>0, f(x)$ 为凸函数.

在点(3,0)左右函数凹凸性发生改变，所以(3,0)为拐点. 故选(C).

(2)【考点】 幂级数的收敛域

【答案解析】 因为$\{a_n\}$单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，

由交错级数的莱布尼兹法则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，因为$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$无界，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x-1)^k$的收敛域为$[-1,1)$，故原级数的收敛域为$[0,2)$. 故选(C).

(3)【考点】 利用导数求函数的极值

【答案解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)\ln f(y), \dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)\ln f(y), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)\cdot\dfrac{f''(y)f(y)-f'^2(y)}{f^2(y)}$,

若$z=f(x)\ln f(y)$在(0,0)处取极值，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)\ln f(0)=0, \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)\cdot\dfrac{f'(0)}{f(0)}=0$,

$A=f''(0)\ln f(0), B=0, C=f''(0)$,

由$AC=[f''(0)]^2\ln f(0)>0$且$A>0$得$f(0)>1$且$f''(0)>0$，故选(A).

(4)【考点】 一元积分的计算

【答案解析】 由于$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\sin x<\cos x<1<\cot x$则

$\ln\sin x<\ln\cos x<0<\ln\cot x$,

故$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx>0, \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx<0$,

即 $I<K<J$，故选(B).

(5)【考点】 矩阵的初等变换

【答案解析】 由题设有

$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$,因为$\boldsymbol{P}_2^{-1} = \boldsymbol{P}_2$,所以$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$,故选(D).

(6)【考点】 线性方程组的基础解系

【答案解析】 因为$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$基础解系含一个线性无关的解向量,所以$r(\boldsymbol{A}) = 3$,于是$r(\boldsymbol{A}^*) = 1$,故$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$基础解系含3个线性无关的解向量,

又$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$且$r(\boldsymbol{A}) = 3$,所以$\boldsymbol{A}$的列向量组中含$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的基础解系,

因为$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的基础解系,所以$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$,

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$或$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,显然$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的一个基础解系,故选(D).

(7)【考点】 随机变量的概率密度函数

【答案解析】 对于(D)项有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]\mathrm{d}x = F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,\text{故选(D).}$$

(8)【考点】 随机变量的期望

【答案解析】 因为当$X \geqslant Y$时,$U = X, V = Y$;当$X < Y$时,$U = Y, V = X$,所以$UV = XY$,于是$E(UV) = E(XY)$.

又因为X,Y独立,所以$E(UV) = E(XY) = EX \cdot EY$,故选(B).

二、填空题

(9)【考点】 曲线积分的计算

【答案解析】 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \tan^2 x}\mathrm{d}x = \sec x\mathrm{d}x$,

则$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2})$.

(10)【考点】 一阶线性微分方程的初值问题

【答案解析】 由$y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x$得

$$y = \left[\int \mathrm{e}^{-x}\cos x \cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x} = (\sin x + C)\mathrm{e}^{-x},$$

因为$y(0) = 0$,所以$C = 0$,于是$y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

(11)【考点】 二元函数求偏导

【答案解析】 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{y\sin xy}{1 + (xy)^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y \cdot \dfrac{y[1 + (xy)^2]\cos xy - 2xy^2\sin xy}{[1 + (xy)^2]^2}$,于是$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{x=0,y=2} = 4$.

(12)【考点】 第二类曲线积分计算

【答案解析】 由圆柱$x^2 + y^2 = 1$与$z = x + y$围成的平面块的上侧位S(按右手准则),其法向量为

$\vec{n} = \{-1, -1, 1\}$,方向余弦为$\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,由斯托克斯公式得

$$\oint_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} \mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (1 - x - y)\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S \mathrm{d}s,$$

因为 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

所以 $\oint xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi.$

(13)【考点】 二次型,正交变换

【答案解析】 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, f = X^{\mathrm{T}}AX,$

因为二次型经过正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$,再由 $|A| = -(a-1)^2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$ 得 $a = 1$.

(14)【考点】 二维随机变量的期望,正态分布

【答案解析】 因为 $(X,Y) \sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,所以 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$,

$EX = \mu, EY^2 = DY + (EY)^2 = \mu^2 + \sigma^2.$

又因为 $\rho = 0$,所以 X,Y 独立,

于是 $E(XY^2) = EXEY^2 = \mu(\mu^2 + \sigma^2).$

三、解答题

(15)【考点】 极限的计算

【答案解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right]^{\frac{1}{e^x-1}\frac{\ln(1+x)-x}{x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(16)【考点】 求二阶混合偏导数

【答案解析】 由 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取极值 $g(1) = 1$,所以 $g'(1) = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'[xy, yg(x)]y + f_2'[xy, yg(x)]yg'(x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_1'[xy, yg(x)] + y[xf_{11}''(xy, yg(x)) + g(x)f_{12}''(xy, yg(x))] + f_2'[xy, yg(x)]g'(x)$$
$$+ yg'(x)[xf_{12}''(xy, yg(x) + g(x)f_{22}''(xy, yg(x))],$$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$

(17)【考点】 确定连续函数零点个数

【答案解析】 令$f(x)=k\arctan x-x$,

$$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1=\frac{k-1-x^2}{1+x^2},$$

(1) 当$k-1\leqslant 0$,即$k\leqslant 1$时,$f'(x)\leqslant 0$(除去可能一点外$f'(x)<0$),所以$f(x)$单调减少,又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以方程只有一个根.

(2) 当$k-1>0$,即$k>1$时,由$f'(x)=0$得$x=\pm\sqrt{k-1}$.

当$x\in(-\infty,-\sqrt{k-1})$时,$f'(x)<0$;当$x\in(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$时,$f'(x)>0$;

当$x\in(\sqrt{k-1},+\infty)$时,$f'(x)<0$,

令$\sqrt{k-1}=t$,当$k>1$时,$t>0$.

令$g(t)=k\arctan\sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}=(1+t^2)\arctan t-t$,

显然$g(0)=0$,因为$g'(t)=2t\arctan t>0$,所以$g(t)>g(0)=0$(当$t>0$时),

即$k\arctan\sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}>0$,

于是极小值$f(-\sqrt{k-1})=-k\arctan\sqrt{k-1}+\sqrt{k-1}<0$,

极大值$f(\sqrt{k-1})=k\arctan\sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}>0$,

又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以方程有三个根,分别位于$(-\infty,-\sqrt{k-1})$,$(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$及$(\sqrt{k-1},+\infty)$内.

(18)【考点】 微分中值定理的综合运用

【答案解析】 证明:(Ⅰ)$f(x)=\ln(1+x)$在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$应用中值定理

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}$$

其中$0<\xi<\frac{1}{n}$,则$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{1+\xi}<1$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\ln(1+\frac{1}{n})<1\cdot\frac{1}{n},\text{即}\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

(Ⅱ)$a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{\xi}$$

其中$\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi}(n+1-n)$,$n<\xi<n+1$

易知$a_{n+1}-a_n<0$ 即$a_{n+1}<a_n$ 即$\{a_n\}$单调递减

又$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$$=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$$

$$= \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} > 0$$

所以$\{a_n\}$单调递减有界,故$\{a_n\}$收敛.

(19)【考点】 二重积分的计算

【答案解析】 $I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y$

又$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y) = yf'_x(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y$,

于是$I = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x - \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= xf(x,1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= -\left[\int_0^1 xf(x,y)\Big|_0^1\mathrm{d}y - \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a.$$

(20)【考点】 向量组的线性相关性

【答案解析】 (Ⅰ)因为$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 3\\1 & 1 & 5\end{vmatrix} = 1 \neq 0$,所以$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 3$.

又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示,所以$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) < 3$,于是$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3| = 0$,解得$a = 5$.

(Ⅱ)$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5\end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4\\0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5\\0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2\end{array}\right),$$

于是$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 10\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$.

(21)【考点】 矩阵的特征值和特征向量

【答案解析】 (Ⅰ)令$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$,

根据特征值特征向量的定义，A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=2<3$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\lambda_3=0$.

令 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$为矩阵 A 的相应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量，因为 A 为实对称矩阵，所以有

$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0,\end{cases}$ 解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. 故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$；特征向量依次为 $k_1(1,0,1)^T,k_2(1,0,-1)^T,k_3(0,1,0)^T$，其中 k_1,k_2,k_3 是不为 0 的任意常数.

(Ⅱ) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},y_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(y_1,y_2,y_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

(22)**【考点】** 二维随机变量的独立性

【答案解析】 (Ⅰ) $P(X^2=Y^2)=1\ \Rightarrow\ P(X^2\neq Y^2)=0$

即 $P(X=0,Y=1)=P(X=0,Y=-1)=P\{X=1,Y=0\}=0$

$$P(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$$

故 $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$

故得 (X,Y) 的概率分布如下表：

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ)Z 取值为 $-1,0,1$

$P(XY=-1)=P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}$

$P(XY=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=-1)+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}$

$P(XY=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$,则有下表

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ)$EX=\frac{2}{3},EY=0,EXY=0,DX=\frac{2}{9},DY=\frac{2}{3}$,所以 $\rho_{XY}=0$.

(23)**【考点】** 最大似然估计

【答案解析】 (Ⅰ)似然函数

$$L=f(X_1)f(X_2)\cdots f(x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}},$$

取对数得

$$\ln L=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2},$$

令 $\frac{d}{d\sigma^2}\ln L=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^4}=0$ 得

σ^2 的极大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

(Ⅱ)因为 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim X^2(n)$,所以 $E\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2=n,D\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2=2n$

于是
$$E\hat{\sigma}^2=\frac{\sigma^2}{n}E\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right)=\sigma^2,$$
$$D\hat{\sigma}^2=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n}.$$