特征值问题有限元方法

杨一都 著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了线性有界算子谱逼近理论，以及微分算子特征值问题协调有限元方法、非协调有限元方法及协调混合有限元方法的数学描述、有限元解的逼近性质、超收敛性、先验和后验误差估计，其中包括作者多年来的研究工作.

本书可以作为从事科学与工程计算的科研人员和工程技术人员的参考书，也可以作为高等院校计算数学、应用数学、计算物理和计算力学等专业高年级大学生与研究生的教材.

图书在版编目(CIP)数据

特征值问题有限元方法/杨一都著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-034923-1

Ⅰ. ①特… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①特征值问题-有限元法 Ⅳ. ①O175.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 131767 号

责任编辑：王丽平 李静科／责任校对：邹慧卿

责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京佳艺恒彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2012 年 6 月第一次印刷 印张：14 3/4

字数：287 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

引　言

20 世纪 60 年代, 在中国、美国和西欧各自独立发明了有限元方法. 这是当代计算数学进展的一个里程碑, 意义重大, 影响深远. 50 余年来这一方法已发展成为一个独立的学科分支, 并在水坝、桥梁、飞机、船舶的设计, 油田开发和核武器研制等科学和工程计算领域得到了重要应用. 用有限元方法计算电磁场、天体物理和流体力学问题至今仍是科学和工程计算中的热点问题.

特征值问题有限元方法是有限元方法的重要组成部分, 是数学家、物理学家和工程师们关注的课题.

特征值问题有限元法及其数学理论的内容十分丰富, 涉及范围广泛. 迄今已经出版了一些影响较大的专著: Chatelin[45] 讨论了 Banach 空间中线性算子特征值的数值逼近, 把 20 世纪 80 年代以前特征值问题有限元分析方面的成果纳入泛函分析框架, 进行系统研究和总结; Babuska 和 Osborn[13] 以泛函分析为工具, 进一步对 20 世纪 90 年代以前微分算子特征值问题协调有限元方法和混合有限元方法方面的成果作了统一处理; 林群和林甲富[124] 对有限元特征值的渐近展开和外推作了系统深入的论述, 等等.

本书介绍特征值问题有限元方法 (协调有限元法、非协调有限元法、协调混合有限元法) 方面的基础理论, 包括文献 [13], [45] 中谱逼近 (收敛性及先验误差估计) 方面的基本结果和近 20 年来在特征值问题有限元法超收敛、逼近性质、后验误差估计及 2- 网格离散方面的研究进展等.

全书分为 5 章:

第一章介绍谱逼近的泛函分析方法. 本章详细介绍了 “谱分解定理”、“逼近 $\{T_h\}$ 依范数收敛或集体紧收敛确保了近似特征值保持代数重数收敛于准确特征值”. 此外, 本章还介绍了 “适用于多种有限元方法 (协调有限元法、非协调有限元法、混合有限元法) 的抽象误差估计式”. 全书以本章为基础, 第三章、第四章和第五章都是在本章理论的基础上展开的.

第二章主要介绍椭圆边值问题有限元数学理论基础知识. 此外, 本章还论述了用插值后处理获取有限元整体、成片超收敛. 由于对特征值问题有限元方法的陈述和分析一般都是基于相应的定常问题的研究, 所以为了完整起见对相应论题作了介绍.

第三章介绍特征值问题协调有限元方法, 对最小最大原理、先验误差估计常数的性态、超收敛性和后验误差估计作了系统论述. 此外, 本章还介绍了有限元局部

加密方法、插值校正方法、2-网格离散方案和局部并行算法.

第四章介绍特征值问题非协调有限元方法, 给出了基本关系式, 对先验、后验误差估计和用非协调元求特征值下界作了较系统论述.

第五章介绍椭圆微分算子特征值问题、Stokes 特征值问题和电磁场特征值问题的协调混合有限元方法, 主要介绍先验、后验误差估计.

近半个世纪以来, 基于众多专家学者的工作, 特征值问题有限元方法专题已经发展到比较成熟的阶段, 但是还有许多问题需要进一步深入研究, 例如, 电子结构、电磁场和流体力学中特征值问题的有限元高效率计算方法等仍然是数学物理界关注的课题. 特别值得提及的是: 陈志明教授主持的国家 973 项目 “适应于千万亿次科学计算的新型计算模式”(2010 年立项) 的主要研究内容包括了 “数千个原子的电子结构有限元计算” 等, “自适应非结构网格并行软件平台和特征值计算” 则是该项目设置的五个子课题之一. 科学技术的进步再一次把特征值这个经典的数学物理问题推到学科前沿.

作者撰写本书, 希望能有助于读者了解本研究领域的历史和现状, 并促进其进一步的发展.

为撰写本书, 作者直接或间接地引用了国内外较多文献的成果. 例如: 文献 [13], [38], [45], [49], [56], [66], [116], [122], [124], [166], [236], [191], [192], [220], [223], [225], [226], 及其所列参考文献, 等等. 作者得益于同行的研究和帮助, 特别是深受林群院士和石钟慈院士学术思想的影响, 特此致谢.

作者在特征值问题有限元方法方面的研究工作先后三次得到国家自然科学基金 (No.19461002, No.10761003, No.11161012) 的资助, 特此致谢.

由于作者水平有限, 未能穷尽史料, 书中难免有疏漏之处, 祈望读者指正.

作　者

2011 年 7 月

目　　录

第一章　线性算子谱逼近

线性算子谱逼近理论是微分算子特征值问题有限元法和积分算子特征值问题投影法及数值积分法的高度概括和发展. 该理论将微分算子和积分算子特征值问题的数值方法纳入统一的泛函分析框架, 由此产生了一些新颖的研究结果.

设 X 是复 Banach 空间, $\mathcal{C}$ 是复数域, S^h 是 X 的子空间, $L(X)$ 表示 X 到 X 中的线性有界算子全体构成的空间, $T \in L(X)$, $T_h : X \to S^h$, T_h 是 T 的近似. 微分算子和积分算子特征值问题及其数值方法可以抽象化为 Banach 空间 X 中算子特征值问题及其近似:

求 $\mu \in \mathcal{C}, 0 \neq u \in X$, 使

$$Tu = \mu u. \tag{1}$$

求 $\mu_h \in \mathcal{C}, 0 \neq u_h \in S^h$, 使

$$T_h u_h = \mu_h u_h. \tag{2}$$

(2) 是 (1) 的近似模拟, 不同的算子 (微分算子、积分算子等), 不同的逼近方法 (有限元法、投影法、数值积分法等), X, S^h, T 和 T_h 的具体形式不同, 但一般都具有下列共同特征:

1) X 是 Banach 空间或 Hilbert 空间, $\{S^h\}$ 是 X 的有限维子空间序列, 且 $\{S^h\}$ 于 X 终归稠密, 即 $\bigcup\limits_{h>0} S^h$ 的闭包等于 X.

2) $T \in L(X)$ 且通常是全连续的, T_h 是有限秩算子, 且 T_h 依范数收敛于 T, 或者 T_h 集体紧收敛于 T.

基于这些特征, Dunford 和 Schwartz[68], Chatelin[45], Babuska 和 Osborn[13], Bramble 和 Osborn[34], Osborn[147], Vainikko[176] 等应用泛函分析方法揭示了谱逼近的本质特性: T_h 依范数收敛于 T 或者 T_h 集体紧收敛于 T 确保了近似特征值保持代数重数收敛于准确特征值, 并建立了适用于多种有限元方法的抽象误差估计式.

不特别声明时, 本书符号 C 表示与 h 无关的正常数, 在不同地方表示的通常不是同一个数. 符号 $R = \vartheta(h^r)$ 表示 $|R| \leqslant Ch^r$, $R = O(h^r)$ 表示 R 是与 h^r 同阶的小量.

本章内容主要取自文献 [13], [45], [68], [96], [147], [190].

§1.1 预备知识

阅读本章需具备线性泛函基础知识, 包括泛函延拓定理、共鸣定理、逆算子定理、闭图像定理及下列知识.

1.1.1 投影对及子空间之间的间隙

1. 投影

设 X 为复 Banach 空间, 用 $\|\cdot\|$ 表示 X 的范数. 定义算子范数: $T\in L(X)$,

$$\|T\|=\sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|\neq 0}}\frac{\|Tv\|}{\|v\|}=\sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|\leqslant 1}}\|Tv\|=\sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=1}}\|Tv\|. \tag{1.1.1}$$

在这个范数下, $L(X)$ 是 Banach 空间.

设 $T\in L(X), T$ 的定义域、值域和零 (核) 空间分别记为 $D(T)=\mathrm{Dom}T$、$R(T)=\mathrm{Im}T=\{u\in X$: 存在 $v\in X$, 使 $u=Tv\}$ 和 $N(T)=\ker T=\{v\in X: Tv=0\}$.

定义 1.1.1 设 R 和 N 是 X 的两个闭子空间, $X=R\oplus N$. 对 $\forall\, v\in X$, 作分解

$$v=v_1+v_2,$$

其中 $v_1\in R, v_2\in N$. 定义: $Pv=v_1$, 称 P 为从 X 沿 N 到 R 上的投影算子. 当 X 是 Hilbert 空间 (内积为 $(\cdot,\cdot)$), N 是 R 的直交补空间时, 称 P 为从 X 沿 N 到 R 上的直交投影算子.

定理 1.1.1 设 $P\in L(X)$, 则

1) P 是从 X 沿 $N(P)$ 到 $R(P)$ 上的投影算子的充要条件为 $P^2=P$;

2) P 是从 Hilbert 空间 X 沿 $N(P)$ 到 $R(P)$ 上的直交投影算子的充要条件为 $P^2=P$ 及 $(Pv,u)=(v,Pu)$, $\forall\, v,u\in X$.

证明 见文献 [96], [190].

定理 1.1.1 给出了投影的代数特征.

定理 1.1.2(投影定理) 设 R 是内积空间 X 的完备线性子空间, 那么对 $\forall\, v\in X$, v 在 R 上的直交投影唯一地存在. 即有 $v_1\in R, v_2$ 与 R 直交, 使 $v=v_1+v_2$, 而且这种分解是唯一的.

证明 见文献 [190].

Banach 空间的结构略为逊色, 它的完备线性子空间不一定可补, 但有下列重要结果:

定理 1.1.3 Banach 空间 X 中的任何有限维子空间都是可补的.

证明 见文献 [45] 中第 2 章 2.2 节.

投影定理是 Hilbert 空间及 Banach 空间理论中极其重要的基本定理, 它把闭线性子空间与投影算子一一对应起来. 基于这定理, 谱理论用投影算子研究子空间的间隙.

注意 (见文献 [96]pp.156): 如果 P 是 X 中投影算子, P' 是 P 的共轭算子, 那么 P' 是 X 的共轭空间 X' 中的投影算子, 且

$$R(P') = \ker(I - P') = (R(I - P))^{\perp} = \ker(P)^{\perp},$$
$$\ker(P') = R(I - P') = R(P)^{\perp}.$$

2. 投影对及子空间之间的间隙

设 R 和 U 是 X 的两个闭子空间, P 和 Q 分别是到 R 和 U 上的投影算子, $R = R(P)$, $U = R(Q)$.

定义 1.1.2 记

$$\delta(R,U) = \sup_{\substack{v\in R\\ \|v\|=1}} \operatorname{dist}(v,U), \tag{1.1.2}$$

$$\theta(R,U) = \max(\delta(R,U), \delta(U,R)). \tag{1.1.3}$$

称 $\theta(R,U)$ 为 R 与 U 之间的间隙.

几何解释 在有限维 Hilbert 空间中,

$$\theta(R,U) = \sin\theta,$$

其中 θ 是超平面 R 与 U 之间的锐角 (见图 1.1-1). 间隙 $\theta(R,U)$ 刻画了子空间 R 和 U 之间的接近程度.

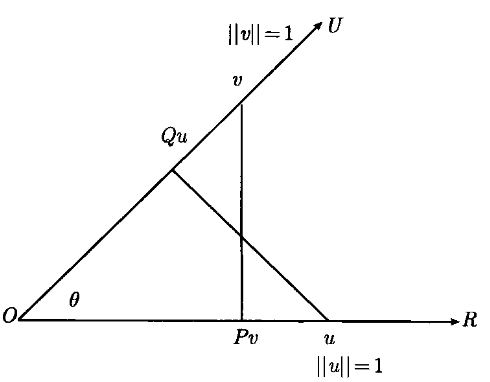

图 1.1-1

定理 1.1.4 $\theta(R,U)$ 有下列性质:

1) $\theta(R,U) \leqslant \max(\|(P-Q)P\|, \|(Q-P)Q\|)$;

若假设 $\dim U < \infty$, 则还有

2) $\delta(R,U) < 1$ 蕴涵 $\dim R \leqslant \dim U$;

3) $\theta(R,U) < 1$ 蕴涵 $\dim R = \dim U$;

4) $\dim R = \dim U$ 蕴涵 $\delta(U,R) \leqslant \delta(R,U)/(1-\delta(R,U))$.

证明　证明见文献 [95], [96]. 由定义 1.1.2 推出

$$\begin{aligned}\delta(R,U) &= \sup_{\substack{v\in R\\ \|v\|=1}} \operatorname{dist}(v,U) \leqslant \sup_{\substack{v\in R\\ \|v\|=1}} \|(I-Q)Pv\| \\ &= \sup_{\substack{v\in R\\ \|v\|=1}} \|(P-Q)Pv\| = \|(P-Q)P\|. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

同理

$$\delta(U,R) \leqslant \|(Q-P)Q\|. \tag{1.1.5}$$

由 (1.1.4), (1.1.5) 和 $\theta(R,U)$ 的定义知 1) 式成立. 由文献 [96] 中节 4.2 的引理 2.3 知, 若 $\dim R > \dim U$, 则存在 $u \in R$, $\|u\| = 1$ 使得

$$\operatorname{dist}(u,U) = \|u\| = 1.$$

据此知 2) 成立 (在 Hilbert 空间中这个结论是明显的, 选取与 U 正交的 u 即可). 由 2) 得到 3). 4) 式的证明见文献 [95]. 证毕.

1.1.2　线性有界算子序列的收敛性

设 $S^h \subset X, \{T_h\}_{h>0}$ 是 $L(X)$ 中的算子序列, $T_h : X \to S^h$, $T \in L(X)$, T_h 收敛于 T. 由于所考察问题的需要, 不同场合采用不同的收敛概念. 这里先介绍逐点收敛、集体紧收敛和依范数收敛, 在小节 1.2.4 和小节 1.3.2 中还将分别介绍稳定收敛和强稳定收敛.

逐点收敛　若 $\forall\, v \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \|T_h v - Tv\| = 0,$$

则称 T_h 逐点收敛于 T, 记为 $T_h \to T \ \ (p)$.

定理 1.1.5(Banach-Steinhaus,1927)　设 $\{T_h\}_h \subset L(X)$, T_h 在 X 上逐点收敛于 $L(X)$ 中一个线性有界算子 T 的充分必要条件是:

1) $\sup\limits_h \|T_h\| \leqslant M$;

2) 对于在 X 内稠密的某一集合 F 中的所有 v, $\|T_h v - Tv\| \to 0$ $(h \to 0)$.

证明　见文献 [190].

例 1.1.1 设 $\{S^h\}$ 在 X 中逐一包含 (即 $S^h \subset S^{h_1} \subset X(h_1 < h)$), 且终归稠密, $P_h : X \to S^h$ 是投影算子序列, 则易知

$$\lim_{h\to 0} \|(P_h - I)v\| = 0, \qquad \forall\, v \in \bigcup_{h>0} S^h;$$

若还假设 P_h 关于 h 一致有界, 即存在常数 M, 使得

$$\|P_h\| \leqslant M, \qquad \forall\, h > 0,$$

则由 Banach-Steinhaus 定理知

$$P_h \to I \quad (p).$$

定理 1.1.6 设 $T_h \to T \quad (p)$, 则对任何相对紧集 U,

$$\sup_{v\in U} \|(T_h - T)v\| \to 0 \qquad (h \to 0).$$

证明 因为 U 是相对紧集, 所以 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在有限的 ε-网, 即存在直径小于 ε 的集合 $N_1, \cdots, N_m$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{m} N_i \supseteq U.$$

设 $u_i \in N_i$, 对 $\forall\, v \in U$, 由上式知 v 属于某个 N_i, 故有 $\|v - u_i\| \leqslant \varepsilon$. 所以

$$\begin{aligned}
\|(T_h - T)v\| &\leqslant \|(T_h - T)(v - u_i)\| + \|(T_h - T)u_i\| \\
&\leqslant (\|T_h\| + \|T\|)\|v - u_i\| + \max_{1\leqslant i\leqslant m} \|(T_h - T)u_i\| \\
&\leqslant C\varepsilon + \max_{1\leqslant i\leqslant m} \|(T_h - T)u_i\|.
\end{aligned}$$

因为 $T_h \to T \quad (p)$(且 m 与 ε 有关, 但 h 与 ε 无关), 所以存在 $h_0 > 0$, 使得当 $h \leqslant h_0$ 时, 有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \|(T_h - T)u_i\| \leqslant \varepsilon$, 从而对 $\forall\, v \in U$, 一致成立

$$\|(T_h - T)v\| \leqslant (C + 1)\varepsilon.$$

由极限的 ε-δ 定义知定理结论成立. 证毕.

集体紧 (*cc*) 收敛 若当 $h \to 0$ 时, $T_h \to T \quad (p)$, 且对 X 中单位球 B, 集合 $\bigcup\limits_{h>0} (T - T_h)B$ 在 X 中相对紧, 则称 T_h 集体紧 (cc) 收敛于 T, 记为 $T_h \to T \quad (cc)$.

集体紧收敛的概念是 Sobolev 在 1956 年提出来的, 并被 Anselone 等用于积分算子.

依范数收敛 若当 $h \to 0$ 时, $\|T_h - T\| \longrightarrow 0$, 则称 T_h 依范数收敛于 T.

易知 (见文献 [45]): $T_h \to T \quad (cc)$ 蕴涵 $T_h - T$ 是紧的. 一般说来 $\|T_h - T\| \to 0$

不蕴涵 $T_h \to T \quad (cc)$. 设 $T_h - T$ 是紧的, 则 $\|T_h - T\| \to 0$ 蕴涵 $T_h \to T \quad (cc)$, 但 $T_h \to T \quad (cc)$ 不能保证 $\|T_h - T\| \to 0$.

定理 1.1.7　令 $P, P_h (h > 0)$ 是投影算子, $\dim R(P) < \infty$. 设 $P_h \to P \quad (p)$, 则

$$\|(P - P_h)P\| \to 0,$$

且对足够小的 h,

$$\dim R(P_h) \geqslant \dim R(P). \tag{1.1.6}$$

进一步, 设 $P_h \to P \quad (cc)$, 则

$$\|(P - P_h)P_h\| \to 0,$$

且对足够小的 h,

$$\dim R(P_h) = \dim R(P). \tag{1.1.7}$$

证明　设 B 是 X 中单位球, 由算子范数定义

$$\|(P - P_h)P\| = \sup_{v \in B} \|(P - P_h)Pv\| = \sup_{u \in PB} \|(P - P_h)u\|.$$

因为 P 是有限秩算子, 所以 P 作用 B 后得到的像集 PB 是紧集, 故由定理 1.1.6 知, $h \to 0$ 时上式右端趋于 0, 所以 $\|(P - P_h)P\| \to 0$.

设 $\{v_i\}_1^m$ 是 $R(P)$ 的基, $\{v_i'\}_1^m$ 是其伴随基:

$$\langle v_i, v_j' \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m.$$

因为

$$\begin{aligned} |\langle P_h v_i, v_j' \rangle - \langle v_i, v_j' \rangle| &= |\langle P_h v_i - v_i, v_j' \rangle| \\ &\leqslant C\|P_h v_i - v_i\|\|v_j'\| \\ &= C\|P_h v_i - P v_i\|\|v_j'\| \to 0 \qquad (h \to 0), \end{aligned}$$

所以

$$\langle P_h v_i, v_j' \rangle \to \langle v_i, v_j' \rangle = \delta_{ij}. \tag{1.1.8}$$

由 (1.1.8) 式知, 对足够小的 h, m 个函数 $P_h v_i$ 在 $R(P_h)$ 内是线性无关的. 事实上, 若线性相关, 则存在 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$, 且某 $\alpha_{i0} \neq 0$, 使得 $\sum \alpha_i P_h v_i = 0$, 故有 $\langle \alpha_{i0} P_h v_{i0}, v_{i0}' \rangle = -\left\langle \sum_{i \neq i_0} \alpha_i P_h v_i, v_{i0}' \right\rangle \to 0$, 与 (1.1.8) 矛盾. 所以 (1.1.6) 成立.

由 $P_h \to P \quad (cc)$ 和 P 紧知 P_h 紧, 所以 $\bigcup_h P_h B$ 相对紧, 故由定理 1.1.6 知

$\|(P-P_h)P_h\| \to 0$. 最后由定理 1.1.4 的 1) 和 3) 知 (1.1.7) 成立. 证毕.

注意: 容易证明当 $\|P_h - P\| \to 0$ $(h \to 0)$ 时, $\dim R(P_h) = \dim R(P)$ 成立. 但条件 $P_h \to P \quad (p)$ 不能保证 $\dim R(P_h) = \dim R(P)$ 成立.

例 1.1.2 设 $X = l^2$, $\{e_i\}_1^\infty$ 是典范基. 定义

$$P_n v = (v, e_1)e_1 + (v, e_n)e_n, \qquad \forall\, v \in X,$$

$$Pv = (v, e_1)e_1, \qquad \forall\, v \in X,$$

显然

$$\|P_n v - Pv\| = \|(v, e_n)e_n\| = |\,(v, e_n)\,| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

但 $\dim P_n X = 2, \dim PX = 1$.

§1.2 谱论初步

设 X 是复 Banach 空间, $T \in L(X)$. 对于 $z \in \mathcal{C}$, 只要算子 $(T-z)^{-1}$ 在 $L(X)$ 中存在, 这个算子值函数 $z \to (T-z)^{-1}$(在 $L(X)$ 中取值) 的性态在谱论中就会起核心作用.

1.2.1 正则集、谱集和豫解算子

正则算子 设 $T \in L(X)$. 若 T^{-1} 存在且 $T^{-1} \in L(X)$, 则称 T 是 X 上的正则算子.

正则集 设 $z \in \mathcal{C}$. 若 $T - z$ 是 X 上的正则算子, 就称 z 是 T 的正则点. 正则点的全体称为 T 的正则集, 记为 $\rho(T)$.

谱　集 称 $\sigma(T) = \{z : z \in \mathcal{C}, z \notin \rho(T)\}$ 为 T 的谱集, σ 中的点称为谱点.

谱点分为三种类型:

点　谱 $\mathrm{p}\sigma(T) = \{z : z \in \sigma(T), T - z$ 没有逆 $\}$. 点谱是 T 的全体特征值的集合.

连续谱 $\mathrm{c}\sigma(T) = \{z : z \in \sigma(T), T - z$ 有一个无界的逆, $T - z$ 的值域在 X 中稠密 $\}$.

剩余谱 $\mathrm{r}\sigma(T) = \{z : z \in \sigma(T), T - z$ 有一个逆 (有界或无界), $T - z$ 的值域在 X 中不稠密 $\}$.

定理 1.2.1(几何级数定理) 设 $T \in L(X)$, $|\,z\,| > \|T\|$, 则 $z - T$ 是 X 上的正则算子, 而且成立

$$(z-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{z^{k+1}}, \tag{1.2.1}$$

$$\|(z-T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\,z\,| - \|T\|}. \tag{1.2.2}$$

证明　令

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{z^{k+1}}.$$

对 $p \geqslant 1$,

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T^k}{z^{k+1}} \right\| \leqslant \frac{1}{|z|} \sum_{k=n+1}^{n+p} \left\| \frac{T}{z} \right\|^k.$$

根据假设 $\left\| \dfrac{T}{z} \right\| < 1$, 从而有

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leqslant \frac{\left\| \dfrac{T}{z} \right\|^{n+1}}{|z| - \|T\|}.$$

因此

$$\sup_{p \geqslant 1} \|S_{n+p} - S_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

即 $\{S_n\}$ 是 $L(X)$ 中 Cauchy 列. 因为 $L(X)$ 是 Banach 空间, 故存在 $S \in L(X)$, 使得

$$\|S_n - S\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

通过简单的代数运算得

$$(z - T)S_n = S_n(z - T) = I - \left(\frac{T}{z} \right)^{n+1}.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$(z - T)S = S(z - T) = I.$$

这表明 $z - T$ 是 X 上的正则算子, 而且

$$(z - T)^{-1} = S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{z^{k+1}}.$$

这就是 (1.2.1) 式. 注意到

$$\|S_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{T^k}{z^{k+1}} \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\|T\|^k}{|z|^{k+1}} \leqslant \frac{1}{|z| - \|T\|},$$

令 $n \to \infty$ 得 (1.2.2) 式. 证毕.

豫解算子 当 $z \in \rho(T)$ 时, 称 $R(T,z) = (T-z)^{-1}$ 为 T 的豫解算子. 当不引起混淆时, 简记 $R(T,z) \equiv R(z)$.

定理 1.2.2 设 $T \in L(X)$, 则对 $\forall\ z_1, z_2 \in \rho(T)$, 成立

$$R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2)R(z_1)R(z_2) \tag{1.2.3}$$

$$= (z_1 - z_2)R(z_2)R(z_1). \tag{1.2.4}$$

设 $T_1, T_2 \in L(X)$, 则对 $\forall\ z \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$, 成立

$$R(T_1,z) - R(T_2,z) = R(T_1,z)(T_2 - T_1)R(T_2,z) \tag{1.2.5}$$

$$= R(T_2,z)(T_2 - T_1)R(T_1,z). \tag{1.2.6}$$

证明 由豫解算子定义推出

$$\begin{aligned}(z_1 - z_2)R(z_1)R(z_2) &= R(z_1)((T - z_2) - (T - z_1))R(z_2)\\ &= R(z_1)(T - z_2)R(z_2) - R(z_1)(T - z_1)R(z_2)\\ &= R(z_1) - R(z_2).\end{aligned}$$

类似可证明 (1.2.4).

再用豫解算子定义推出

$$\begin{aligned}R(T_1,z)(T_2 - T_1)R(T_2,z) &= R(T_1,z)((T_2 - z) - (T_1 - z))R(T_2,z)\\ &= R(T_1,z) - R(T_2,z).\end{aligned}$$

类似可证明 (1.2.6). 证毕.

定理 1.2.3 设 $T \in L(X)$, 则 $\rho(T)$ 是复数域 $\mathcal{C}$ 中开集, $\sigma(T)$ 是 $\mathcal{C}$ 中闭集, 对 $\forall\ z_0 \in \rho(T)$, 在 z_0 的某一邻域内 $R(z)$ 有收敛的 Taylor 展开式

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z - z_0)^k R(z_0)^{k+1}, \tag{1.2.7}$$

且

$$\|R(z)\| \geqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(T))}. \tag{1.2.8}$$

证明 当 $| z - z_0 | < \|R(z_0)\|^{-1}$ 时,

$$\|(z - z_0)R(z_0)\| = | z - z_0 |\, \|R(z_0)\| < 1,$$

故由定理 1.2.1 知

$$L(z) \equiv (1-(z-z_0)R(z_0))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k R(z_0)^k. \tag{1.2.9}$$

这时

$$T-z = T-z_0+z_0-z = (T-z_0)(1-(z-z_0)R(z_0)),$$

因为 $T-z_0$ 的逆存在、有界, $(1-(z-z_0)R(z_0))$ 的逆存在、有界, 故有

$$R(z) = L(z)R(z_0) \in L(X), \tag{1.2.10}$$

所以 $z \in \rho(T)$. 从而有

$$\{z : z \in \mathcal{C}, |\, z-z_0 \,| < \|R(z_0)\|^{-1}\} \subset \rho(T). \tag{1.2.11}$$

这表明 $\rho(T)$ 是开集. 因为 $\mathcal{C}$ 中开集的余集为闭集, 所以 $\sigma(T)$ 为闭集. 把 (1.2.9) 式代入 (1.2.10) 式得 (1.2.7) 式. 由 (1.2.11) 式知

$$\mathrm{dist}(z_0, \sigma(T)) \geqslant \|R(z_0)\|^{-1},$$

由此式知 (1.2.8) 式成立. 证毕.

注意: 因为对 $\forall\, z_0 \in \rho(T)$ 都有 (1.2.7) 式成立, 故取值在 $L(X)$ 中的函数 $z \to R(z)$ 关于 $\rho(T)$ 中的 z 是解析的.

定理 1.2.4 设 $T \in L(X)$, 则 $\rho(T)$ 与 $\sigma(T)$ 非空, 且 $\sigma(T)$ 是紧集.

证明 设 $|\, z \,| > \|T\|$, 则由定理 1.2.1 知 $z \in \rho(T)$, 所以 $\rho(T)$ 非空. 现在证明 $\sigma(T)$ 非空. 事实上, 若 $\sigma(T)$ 为空集, 则 $\rho(T) = \mathcal{C}$. 由 (1.2.7) 知函数 $z \to R(z)$ 是整个平面 $\mathcal{C}$ 上的解析函数, 由定理 1.2.1 知当 $|\, z \,| > \|T\|$ 时, 有

$$\|R(z)\| \leqslant \frac{1}{|\, z \,| - \|T\|},$$

所以当 $|\, z \,| \to \infty$ 时, $\|R(z)\| \to 0$. 解析理论告诉我们, 如果 $f(z)$ 是区域 Ω 内的一个解析函数且在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上是连续的, 那么在 $f(z)$ 不是常数的条件下, 它的模只有在边界点上才能达到最大值. 于是推出 $R(z) \equiv 0$(算子), $I = (T-z)R(z) \equiv 0$, 矛盾. 所以 $\sigma(T)$ 非空.

显然 $\sigma(T)$ 有界, 由定理 1.2.3 知 $\sigma(T)$ 还是闭集. $\mathcal{C}$ 中有界闭集当然是紧集. 证毕.

上述定理表明在 Banach 空间上的线性有界算子的谱是有界的. 自然地把包含整个谱的以原点为中心的最小圆的半径称为谱半径.

定义 1.2.1 设 $T \in L(X)$, 称 $r(T) = \max\limits_{\mu \in \sigma(T)} |\, \mu \,|$ 为算子 T 的谱半径.

由定理 1.2.1 知