线性代数案例教程

马艳琴　张荣艳　陈东升　编

科学出版社

线性代数案例教程

马艳琴　张荣艳　陈东升　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要内容按知识点分类，归纳出一些有代表性的小专题，通过对大量经典和考研案例的分析和求解，揭示了线性代数的解题方法和技巧。通过这些专题的练习，可以提高运算能力，增强分析问题、解决问题和应试的能力。本书共5章，包括矩阵、行列式、n维向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型，简述了线性代数的基本概念、基本方法和基本理论。本书中的应用案例，首先进行模型分析，然后建立模型，最后通过MATLAB编程求解模型。应用案例把抽象、冗繁、枯燥的线性代数变得形象、简明、精彩。

本书可作为大学非数学专业本、专科学生的教学参考书，也可作为考研生、自学者和工程技术人员的自学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数案例教程/马艳琴，张荣艳，陈东升编. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-035337-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①马… ②张… ③陈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第192604号

责任编辑：相 凌 唐保军 / 责任校对：钟 洋
责任印制：闫 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012年8月第一次印刷 印张：21 1/4
字数：548 000

定价：38.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

“线性代数”是大学理工科和经管类学生的必修课，它在培养学生的计算能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用，它的主要内容包括矩阵、行列式、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等，要求熟练掌握矩阵、行列式的基本运算；熟练掌握 n 维向量的运算以及线性方程组的解的理论和求解方法；掌握矩阵的特征值与特征向量、矩阵的对角化及二次型的标准形和正定二次型等基本概念和理论.

对“线性代数”课程，学生普遍感到内容抽象，计算繁杂，加上非数学专业的“线性代数”课程学时偏少，这就导致学生学习这门课程较为吃力，而且学习后又不知道如何应用. 针对这些问题，本书安排了大量的应用案例，在教学过程中，可以把应用案例融入教学中，使学生摆脱对线性代数学习的恐惧，学会用数学的思维方式观察周围的事物，学会自己去分析、解决实际问题. 这种教学方法叫做案例教学法. 案例教学法最早可以追溯到古希腊、罗马时代，但它真正作为一种成熟和系统的教学方法，却是 1870 年在美国哈佛大学法学院兴起并逐步发展起来的，后来在法学、医学、商学等学科的教学中得以广泛运用. 大约在 20 世纪 80 年代，美国教育司研究协会(ARER)年会中“教育作为一种职业”工作组提交的报告提出“教学案例能够阐明种种教学问题，案例教学应成为教育专业的主要教学方法”之后，教师教育案例教学法才进入较广泛的研究和应用阶段.

在本书的应用案例中，我们应用 MATLAB 软件进行了求解. MATLAB 软件具有强大的功能，它给线性代数中烦琐的计算提供了简单的算法和程序；可以给出各个工程和经济领域中使用线性代数建模的大量实例以及其解的物理意义；利用它的可视化功能，给线性代数中的概念赋予了几何形象. 在本书的附录中，我们对 MATALB 软件进行了简单的介绍.

本书除利用应用案例引导学生在应用的背景下逐步掌握基本概念外，还编写了经典题型案例和考研题型案例，以满足不同层次学生的学习需求. 考研题采用“年—题类—分数”标识，如“2008—3——(5)—4 分”表示 2008 年研究生入学考试数学三的第一题的第 5 小题，该题在卷面上所占分数为 4 分.

本书由郑州轻工业学院陈东升，黄河科技学院马艳琴、张荣艳编写. 郑州轻工业学院、黄河科技学院和科学出版社对本书的编写和出版给予了许多帮助和支持，在此深表感谢!

教材编写是一项艰巨而光荣的工作，由于经验不足，水平所限，书中仍可能存在疏漏和不足之处，望读者不吝指正.

马艳琴

2012 年 5 月

目　录

第 1 章　矩阵的运算及其初等变换

1.1　知识结构、基本要求、重点难点

1.1.1　知识结构图

本章的知识结构图如图 1.1 所示。

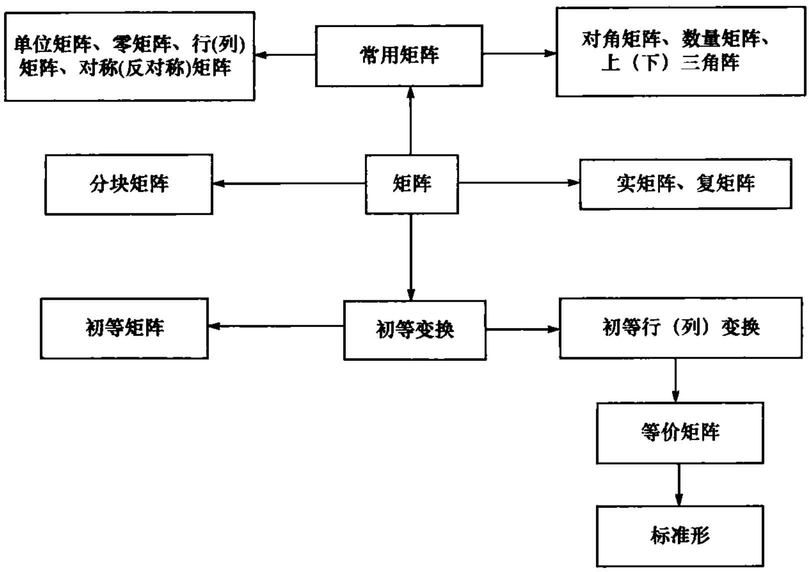

图 1.1　知识结构图

1.1.2　基本要求

（1）理解矩阵的概念，掌握常用矩阵——零矩阵、单位矩阵、对称（反对称）矩阵；熟悉一些特殊矩阵——对角矩阵、三角阵、数量矩阵、行阶梯形矩阵、行简化阶梯形矩阵；了解这些矩阵的性质；

（2）熟练掌握矩阵的线性运算、乘法、转置和分块矩阵的运算，以及它们的运算规律；

（3）理解矩阵的按行分块与按列分块，并能将线性方程组按系数矩阵的行（列）分块写出来；

（4）掌握矩阵的初等变换，理解初等矩阵及矩阵等价、标准形等概念；

（5）理解矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系，能利用初等变换把一个矩阵化为行阶梯形矩阵或行简化阶梯形矩阵，或标准形 .

1.1.3　重点难点

1. 重点

（1）矩阵的概念、运算及其运算律；

(2) 零矩阵、单位矩阵、对角矩阵、数量矩阵、上(下)三角阵、对称(反对称)矩阵、行阶梯形矩阵、行简化阶梯形矩阵;

(3) 初等变换和初等矩阵之间的关系;

(4) 矩阵的等价、标准形;

(5) 矩阵的分块及其运算.

2. 难点

(1) 矩阵的乘法运算及其运算律;

(2) 矩阵分块法;

(3) 化矩阵为行(行简化)阶梯形矩阵、标准形.

1.2 重要内容

1.2.1 重要定义

1. 矩阵运算

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 m 行 n 列**矩阵**,简称 $m\times n$ 矩阵,其中 a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数,又称为矩阵的**元素**.

矩阵常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 或 $(a_{ij})(b_{ij}),(c_{ij}),\cdots$ 表示. 若需指明矩阵的行数或列数,常写为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$,其中下标 i 指明行序数,下标 j 指明列序数.

1) 几种特殊矩阵

(1) **零矩阵 $\boldsymbol{O}$**. 所有元素都为数 0 的矩阵.

(2) **行矩阵** $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,**列矩阵** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

(3) **n 阶方阵**. 如果 $m=n$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵,n 阶矩阵也记为 $\boldsymbol{A}_n$. 最常用的方阵有如下几个:

(i) **对角方阵**,简称**对角矩阵**,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

简记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$;

(ii) **数量矩阵** $A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$，**单位矩阵** $E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，上(下)三角阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right)$；**对称矩阵** $A \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，它的元素以主对角线为对称轴对应相等；**反对称矩阵** $A \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}=-A$，即 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，它的主对角线上的元素为 0，其余的元素关于主对角线互为相反数．

(4) **行阶梯形矩阵**. 如果矩阵 A 有零行(即元素全为零的行)，那么零行位于最下方；非零行的**非零首元**(即自左至右第一个不为零的元素)的列标随行的递增而递增，则称 A 为行阶梯形矩阵．这时，称 A 中非零行的行数为 A 的**阶梯数**，即如下形状的矩阵称为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} *_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & *_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & *_i & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & *_r & \cdots \\ & & & & & & & \end{pmatrix},$$

其中空白处的元素全为零，$*_i\,(1\leqslant i\leqslant r)$ 表示第 i 行的非零首元，每行的非零首元必在前一行非零首元的右方．

行简化阶梯形矩阵(行最简形矩阵). 如果阶梯形矩阵 A 还满足如下条件：各非零首元全为 1，并且非零首元所在列的其余元素全为 0，则称 A 为行简化阶梯形矩阵(行最简形矩阵).

2) 矩阵的基本运算

定义 1.2　设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 对应元素相加所得到的矩阵 $C=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $C=A+B$.

注 1.1　两个矩阵只有在行数相同且列数也相同(同型矩阵)的条件下才能进行加法运算．

定义 1.3　设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 的**负矩阵**，记作 $-A$.

由矩阵的加法及负矩阵的概念，可以定义矩阵的减法如下：减去一个矩阵等于加上这个矩阵的负矩阵，即若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

定义 1.4　以数 k 乘以矩阵 A 的每一个元素得到的矩阵称为数 k 与矩阵 A 的**数量乘积**，简称**数乘**，记作 kA 或 Ak. 如果 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，那么 $kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

定义 1.5　设矩阵 $A=(a_{ik})_{m\times s}$ $B=(b_{kj})_{s\times n}$，则矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

按定义 1.5，一个 $1\times s$ 行矩阵与 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个一阶方阵，也就是一个数，即

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}.$$

此式表明，乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的元素 c_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和 .

依照矩阵的乘法，线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

用矩阵乘积可以表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

注 1.2 (1) 只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时，两个矩阵才能相乘 .

(2) 当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义 .

(3) $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，也可能 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 这说明一般情况下矩阵的乘法不满足交换律，因此，矩阵相乘时必须说明顺序. 然而，对于个别矩阵，也可能出现 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 例如，

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5\\15&20\end{pmatrix}.$$

这时，称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的 .

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，容易验证 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，或简记为 $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶数量矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为任意 $n\times s$ 阶矩阵，则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a&0&\cdots&0\\0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab_{11}&ab_{12}&\cdots&ab_{1s}\\ab_{21}&ab_{22}&\cdots&ab_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ab_{n1}&ab_{n2}&\cdots&ab_{ns}\end{pmatrix}=a\boldsymbol{B}.$$

同样，当满足可乘条件时，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}a=a\boldsymbol{B}$. 这说明以数量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以一个矩阵相当于用 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素 a 去乘以该矩阵 . n 阶数量矩阵与任意 n 阶矩阵都是可交换的 .

(4) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵，而两个非零数的乘积是不会等于零的 .

(5) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，并且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，一般不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，即矩阵乘法不满足消去律 .

同阶上(下)三角阵的加、减、数乘、乘积仍为上(下)三角阵 .

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，m 是正整数，m 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘称为 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂，记为 $\boldsymbol{A}^m$，即

$$\boldsymbol{A}^m=\overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{m个}.$$

规定:$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

3) 方阵多项式

定义 1.7　设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 称为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式**.

注 1.3　$\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位方阵，而且 $f(\boldsymbol{A})$ 也是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的方阵.

4) 运算律

(1) 加法运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵)：

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (加法交换律)；

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$(加法结合律)；

(iii) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 为与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵；

(iv) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

(2) 数乘运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，k,l 为常数)：

(i) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(ii) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(iii) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(iv) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

(3) 乘法运算律(假设运算都是可行的)：

(i) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

(iii) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$(其中 k 为数).

(4) 幂的运算律：

(i) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

(ii) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，其中 k,l 为正整数.

(5) 转置运算律(假设运算都是可行的)：

(i) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(iii) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(其中 k 为数)；

(iv) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

2. 矩阵的分块

对于阶数较高的矩阵采用分块的方法，可以利用矩阵的某些特性简化计算.

(1) 作分块矩阵的加法时，应使两个矩阵有相同的分法，即对应的子块有相同的阶数.

(2) 作分块乘法时，需使前一矩阵列的分法与后一矩阵行的分法相同.

(3) 分块时，应尽量分出较多的零块矩阵和单位矩阵. 若能分块为准对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s),$$

则能为计算带来很大方便. 这是因为

(i) $\boldsymbol{A}^m=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^m,\boldsymbol{A}_2^m,\cdots,\boldsymbol{A}_s^m)$(其中 $\boldsymbol{A}_i$ 皆为方阵)；

(ii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}})$.

(4) 按行分块与按列分块.

(i) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，它有 m 行，若第 i 行记作 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 便记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

同理，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 列，若第 j 列记为 $\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

(ii) 以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 时，把 $\boldsymbol{A}$ 按行分块有

$$\boldsymbol{\Lambda}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

可见，以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一行乘以 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 中与该行对应的对角元.

以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 时，把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块有

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{\Lambda}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=(\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1,\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\beta}_n).$$

可见，以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一列乘以 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 中与该列对应的对角元.

3. 初等变换与初等矩阵

1) 初等变换

对矩阵的行作下面的三种变换称为**矩阵的初等行变换**：

(1) 互换两行(互换 i,j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$)；

(2) 以非零数乘某一行(第 i 行乘不为零的数 k，记作 $r_i\times k$，有时也简记成 kr_i)；

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行的对应元素上(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j 或 r_i+r_jk).

把上述变换中的"行"换成"列"，即得矩阵的初等列变换的定义(所用记号是把 r 换成 c).
矩阵的初等行变换与初等列变换，统称矩阵的**初等变换**.

2) 矩阵的等价

定义 1.8　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

3）初等矩阵

定义 1.9　由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**．

三种初等变换对应着三种初等矩阵，即

（1）把单位矩阵中第 i,j 两行（列）对调，则得第一种类型的初等矩阵：

$$
\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{c@{}l}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\
 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccc} & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ & & \text{第 } i \text{ 列} & & & & \text{第 } j \text{ 列} & & \end{array} &
\end{array};
$$

（2）以非零数 k 乘单位矩阵的第 i 行（列），得到第二种类型的初等矩阵：

$$
\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{array}{c@{}l}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & k & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}; \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \\ & & \text{第 } i \text{ 列} & & \end{array} &
\end{array}
$$

（3）以数 k 乘单位矩阵的第 j 行加到第 i 行上（第 i 列乘 k 加到第 j 列上）得到第三种类型的初等矩阵：

$$
\boldsymbol{E}(j(k),i)=\begin{array}{c@{}l}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行}. \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} & & \end{array} &
\end{array}
$$

4）标准形

对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，总可以经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵. 若对行最简形矩阵再施以初等列变换，则可变成一种形式更简单的矩阵 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$，称之为**标准形**．此标准形由 m,n,r 三个数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数．所有与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩阵组成一个集合，称为一个**等价类**. 标准形 $\boldsymbol{F}$ 就是这个等价类中形状最简单的矩阵．

1.2.2 重要性质及定理

1. 重要性质

1）方阵多项式的性质

若 $f(x)$，$g(x)$ 为多项式，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$

例如，

$$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}.$$

但在一般情况下，$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})\neq g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$. 此外，一般来说，

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

等. 但是，由于 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}^3=\cdots$，所以

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$$

等.

2）对称(反对称)矩阵的性质

两个同阶对称矩阵的和还是对称矩阵，对称矩阵与数的乘积也是对称矩阵. 但是，两个对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵；反对称矩阵的和及数量乘积还是反对称矩阵，但两个反对称矩阵的乘积不一定是反对称矩阵.

3）对角矩阵的性质

(1) 以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一行乘以 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 中与该行对应的对角元；以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一列乘以 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 中与该列对应的对角元.

(2) 对角矩阵的和或乘积还是对角矩阵.

4）矩阵等价的性质

矩阵的等价关系具有下列性质：

(1) 反身性：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

(2) 对称性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；

(3) 传递性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

2. 重要定理

定理 1.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换，得到的矩阵等于用同种的 m 阶初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$；

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换，得到的矩阵等于用同种的 n 阶初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$.

定理 1.1 即是说用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_m(i,j)$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\boldsymbol{E}_m(i,j)\boldsymbol{A}=\begin{array}{l}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{array},$$

其结果相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行第一种初等行变换，即把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调($r_i \leftrightarrow r_j$)；类似地，以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,j)$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行第一种初等列变换，即把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列对调($c_i \leftrightarrow c_j$). 以 $\boldsymbol{E}_m(i(k))$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行($r_i \times k$)；以 $\boldsymbol{E}_n(i(k))$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列($c_i \times k$). 以 $\boldsymbol{E}_m(j(k),i)$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行上($r_i + kr_j$)；以 $\boldsymbol{E}_n(j(k),i)$ 右乘矩阵$\boldsymbol{A}$，其结果相当于把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上($c_j + kc_i$).

1.2.3　重要运算

重要运算主要有以下几个：

(1) 矩阵的运算，包括矩阵的线性运算、乘法、幂、转置运算；

(2) 分块矩阵的运算；

(3) 初等变换.

1.2.4　重要方法

重要方法主要有以下两个：

(1) 矩阵运算的方法；

(2) 化矩阵为行阶梯形矩阵，或行简化阶梯形矩阵，或标准形的方法.

1.3　典型例题案例

1.3.1　矩阵运算

1. 题型Ⅰ：矩阵的乘法

方法：(1) 矩阵乘法不满足交换律；

(2) 矩阵乘法满足结合律和分配律；

(3) 单位矩阵、数量矩阵与任意矩阵都可交换；

(4) 行矩阵与列矩阵相乘是数，列矩阵与行矩阵相乘是矩阵.

例 1.1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，试求出所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

分析　由矩阵乘法可知，与三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为三阶矩阵. 一般地，设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，然后分别计算 $\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{XA}$，再由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 推出 $\boldsymbol{X}$. 但注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

而

$$\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{EX}+\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{BX},\quad \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{XE}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{XB},$$

显然，

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\Leftrightarrow\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{XB}.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 中的零元素较 $\boldsymbol{A}$ 更多,故 $\boldsymbol{BX}$ 与 $\boldsymbol{XB}$ 的计算结果更加简单.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}.$

设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\Leftrightarrow\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{XB}$,其中

$$\boldsymbol{BX}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{XB}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_{11}&x_{12}\\0&x_{21}&x_{22}\\0&x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{XB}$ 可得

$$x_{21}=0,\quad x_{31}=0,\quad x_{32}=0,\quad x_{11}=x_{22}=x_{33},\quad x_{12}=x_{23},$$

从而所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵形式如 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\0&x_{11}&x_{12}\\0&0&x_{11}\end{pmatrix}$,其中 x_{11},x_{12},x_{13} 可任意取值.

注 1.4 例 1.1 计算思路的关键是利用单位矩阵在矩阵乘法中的特殊作用,此外正确运用矩阵加法与乘法的分配律也是非常重要的. 对于结构特殊的矩阵,通过分解可以简化为矩阵的乘法计算. 在以后有关方阵的幂及逆矩阵的计算中常常会用到这样的方法.

例 1.2 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{\Lambda}$ 为同阶方阵,其中 $\boldsymbol{QP}=k\boldsymbol{E}$ 为数量矩阵,并且 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角矩阵,令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$,求 $\boldsymbol{A}^m$ 的值.

分析 (1)特殊矩阵的乘积有其特殊性,对角矩阵的幂仍为对角矩阵,n 阶数量矩阵与任意 n 阶矩阵都是可交换的;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个列矩阵(也叫做列向量),则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数,$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是一个矩阵;

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个行矩阵(也叫做行向量),则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个矩阵,$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是一个数.

解 数量矩阵与任意矩阵可交换,故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^m&=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{m}=(\boldsymbol{P\Lambda Q})(\boldsymbol{P\Lambda Q})\cdots(\boldsymbol{P\Lambda Q})=\boldsymbol{P\Lambda}(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{QP})\cdots\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{\Lambda Q}\\&=\boldsymbol{P\Lambda}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\Lambda}(k\boldsymbol{E})\cdots\boldsymbol{\Lambda}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\Lambda Q}=k^{m-1}\boldsymbol{P\Lambda}^m\boldsymbol{Q}.\end{aligned}$$

注 1.5 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是数还是矩阵,要视 $\boldsymbol{\alpha}$ 是行矩阵(行向量)还是列矩阵(列向量)来定,这一点要特别注意.

例 1.3 设 $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$,证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

分析 利用矩阵乘法的定义及实矩阵的特点.

证明　设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,则

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}^2 & * & \cdots & * \\ * & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}^2 \end{pmatrix}=O,$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2=\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2=\cdots=\sum_{j=1}^{n} a_{mj}^2=0.$$

因为A是实矩阵,即$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$均为实数,所以由$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0$知$a_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,从而$A=O$.

注 1.6　当A是复矩阵时,命题不一定成立．例如,取$A=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\neq O$,但

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{i}^2+1 & \mathrm{i}-\mathrm{i} \\ \mathrm{i}-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O.$$

例 1.4　试证对任何矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times n}$,方阵AB与BA有相同的迹,即$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(B)$(其中$n$阶方阵$A$的迹$\mathrm{tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$).

分析　利用矩阵乘积的定义及改变元素相乘后相加的顺序．

证明　设$AB=(c_{ij})_{n\times n}$,$BA=(d_{ij})_{n\times n}$,则

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n} d_{kk}=\mathrm{tr}(BA).$$

注 1.7　(1) 这种交换和号(即改变相加顺序)的方法是线性代数中证明恒等式常用的一种方法;

(2) 对于n阶方阵A和B,还可进一步证明

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B),\quad \mathrm{tr}(AA)^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

例 1.5　(1) 如果$A^2=A$,则称A为幂等矩阵．设A与B都是幂等矩阵,证明$A+B$是幂等矩阵的充要条件是$AB=BA=O$.

(2) 如果$A^2=E$,则称A为对合矩阵．设A与B都是对合矩阵,证明AB是对合矩阵的充要条件是A与B可交换．

分析　根据矩阵乘法的特点,左乘、右乘相应矩阵,使之化成符合条件的矩阵.

证明　(1) 必要性. 设$(A+B)^2=A+B$,则$AB+BA=O$,即$AB=-BA$. 由$A^2=A$右乘B,