原奥林匹克出版社出版

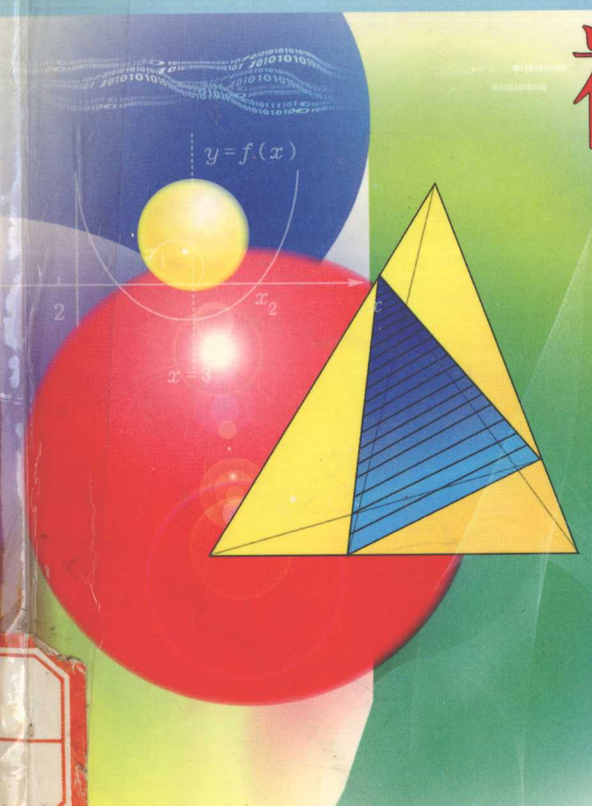
中小学学科奥林匹克编辑部组编

一点通 金牌 阶梯素质教育研究所

全国奥林匹克

初中精典题解

初三数学



京华出版社

课堂与奥林匹克步步高训练题

全国奥林匹克初中精典题解

（初三数学）

主编　丁连义　刘富森

编委　丁连义　郭巧红　刘富森
杨建芳　郭春锋　刘　龙
刘　臻　司海举　陈喜旺
张新杰　李宏伟　刘松芳
郭素娟　刘　洋　刘喜中
陈喜旺　王起霞　朱时志
郭冬梅　李锦育　韩普宪

京华出版社

责任编辑:徐秀琴　王　建
封面设计:周春林　默　石

图书在版编目(CIP)数据
全国奥林匹克初中精典题解·初三数学/刘富森　主编
-北京:京华出版社,2003
ISBN 7-80600-783-0

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-初中-解题
Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047011 号

著　　者□　刘富森　丁连义
出版发行□　京华出版社(北京市安华西里1区13楼　100011)
(010)64258473　64255036　64243832
E-mail:dzcbs@public.bta.net.cn.
印　　刷□　北京国防印刷厂印刷
开　　本□　32开本
字　　数□　180千字
印　　张□　10.375印张
印　　数□　1-5000
出版日期□　2003年6月第1版第一次印刷
书　　号□　ISBN 7-80600-783-0/G·463
定　　价□　11.50元

出版说明

对教师来讲，分层次教学是当前素质教育中符合中小学学生学习新知识的最好教学理念和实践。

对学生来讲，把练习题按难易程度分层次有步骤地训练，是中小学学生掌握新知识最切实际的学习方法。

本丛书在名校名师多年教学、科研的基础上，遵照新修订的中小学各科教学大纲及竞赛大纲，参照人教社现行教科书的内容次序，分科目、按年级将初中、高中、数、理、化、语文、英语及生物学的典型习题，按由易到难的次序精心编选著述而成（还有小学数学四册，供三、四、五、六年级学生使用），共33册。书中的全部例题给出答案及详细的解析、评注。每章或每个单元的开篇都附有全章或整个单元的知识网络以及知识要点，这些内容虽然篇幅不大，但提纲挈领，纲举目张，以帮助师生有效地归纳、梳理，形成整个学科的知识链。

在编写过程中，我们参考了国内众多优秀的畅销图书，博采众长，并认真研究、吸取了近年来各地的中考和高考题目。相信，这些内容都会对本丛书增加亮点。

欢迎并感谢广大读者使用本书，并提宝贵意见。来信寄：河南省郑州市省实验中学刘富森转（邮编：450002）。

编者

目　　录

第一章　一元二次方程

知识网络

- 一元二次方程
  - 一元二次方程
    - 方程的解法
      - 开平方法
      - 配方法
      - 公式法
      - 因式分解法
    - 方程的根的判别式
      - $\Delta>0$ 有两个不等实根
      - $\Delta=0$ 有两个相等实根
      - $\Delta<0$ 没有实根
    - 方程的根与系数的关系
      - $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$
    - 二次三项式的因式分解
      - 公式法
    - 列方程解应用题
  - 可化为一元二次方程的分式方程
    - 去分母法
    - 换元法
    - （去分母法、换元法）— 检验
  - 简单的二元二次方程组
    - 一个二元一次方程一个二元二次方程组成的方程组
      - 代入消元法
      - 韦达定理法
      - 因式分解法
    - 一个二元二次方程一个可分解为两个二元一次方程组成的方程组
      - 配方法
      - 消元法
      - 因式分解法

1.1 一元二次方程的解法

知识要点

1. 了解一元二次方程的意义，掌握一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

2. 掌握一元二次方程的解法.

(1)特殊的一元二次方程：

①$ax^2=0$→直接开平方法

②$ax^2+c=0$(a、c 异号)→直接开平方法

③$ax^2+bx=0$→因式分解法

(2)$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的常用解法：

①直接开平方法

②因式分解法

③配方法

④求根公式法

3. 能灵活运用各种方法解一元二次方程，并能熟练地掌握求根公式的推导及应用.

典型例题及解析

【例 1】 请说出下述解方程的方法各叫什么方法？

【解法一】

$$(2x-2)^2=1$$

$$2x-2=\pm 1$$

$$2x=2\pm 1$$

$$x=\frac{2\pm 1}{2}$$

$$x_1=\frac{3}{2}, x_2=\frac{1}{2}$$

这种方法叫(　　).

【解法二】 $4x^2-8x+3=0$

$$(2x-3)(2x-1)=0$$

$$\therefore\quad 2x-3=0,2x-1=0$$

$$x_1=\frac{3}{2},x_2=\frac{1}{2}$$

这种方法叫(　　).

【解法三】 $4x^2-8x+3=0$

$$x^2-2x+\frac{3}{4}=0$$

$$x^2-2x+\left(\frac{-2}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$$

$$x^2-2x+1=1-\frac{3}{4}$$

$$(x-1)^2=\frac{1}{4}$$

$$x-1=\pm\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3}{2},x_2=\frac{1}{2}$$

这种方法叫(　　).

【解法四】 $4x^2-8x+3=0$

$$a=4,b=-8,c=3$$

$$b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3$$

$$=64-48=16>0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{8\pm4}{8}$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3}{2},x_2=\frac{1}{2}$$

这种方法叫(　　).

【答】 解法一是开平方法;解法二是因式分解法;解法三是配方法;解法四是公式法.

【评注】 (1)用开平方法解一元二次方程,要注意“+”“-”两个根,不要丢掉负号.

(2)用因式分解法,要注意检验交叉相乘的积的和是不是一次项的系数.

(3)用配方法解时,应注意二次项系数化为1,加上一次项系数的一半的平方配成完全平方,再减去这个数.

(4)利用求根公式时,要注意:

①公式不要记错.

②$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$中的a、b、c与具体方程中的对应项系数要搞清楚,不要丢掉符号.

③代公式时,要代准.

【例 2】 选择题　解方程$2\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{3}{2}x(x+\frac{4}{3})$,应选用的恰当方法是(　　)

(A)开平方法　　(B)因式分解法

(C)配方法　　(D)公式法

【分析】 解此方程应先整理成标准形式,然后再观察其特点,选用恰当的方法,原方程整理后为$3x^2+8x-2=0$,显然不能直接利用开平方法.一般形如方程$x^2=m(m\geqslant 0)$可用开平方法.也不能用因式分解法,因为非零的一边直接分解为两个一次因式的积较为困难.

上述两种方法有困难时,可选用配方法或公式法.

【解】 配方法

$$3x^2+8x-2=0$$

$$x^2+\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}=0$$

$$\left[x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]-\frac{16}{9}-\frac{2}{3}=0$$

$$(x+\frac{4}{3})^2=\frac{22}{9}$$

$$x+\frac{4}{3}=\pm\frac{\sqrt{22}}{3}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{22}}{3}$$

$\therefore\quad x_1=\frac{-4+\sqrt{22}}{3}, x_2=\frac{-4-\sqrt{22}}{3}$

公式法：

$$3x^2+8x-2=0$$

$$a=3, b=8, c=-2$$

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= 8^2-4\times3\times(-2) \\ &= 64+24=88 \end{aligned}$$

公式：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore\quad x=\frac{-8\pm\sqrt{88}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{22}}{3}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{22}}{3}, x_2=\frac{-4-\sqrt{22}}{3}$.

故应选择(C)、(D).

【评注】 ①在求解过程中，要防止出现 $x=\frac{-4\pm2\sqrt{22}}{3}$之类的约分错误. 因此，过程可写得稍细一些.

②有时在解方程时，究竟选用哪种方法比较简捷，可根据具体情况而定. 一般地说，能够迅速分解因式的用因式分解法. 否则用

求根公式为宜,因为配方法较繁,除特别要求外,一般不常用.

【例 3】 解关于 x 的方程:$mnx^2+mn-(m^2+n^2)x=0$

【分析】 原方程可整理成 $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0$ 这里 x^2 的系数是 mn,x 的系数是 $-(m^2+n^2)$. 常数项是 mn,根据二次项系数是否为零,本方程的解的情况必须进行讨论.

【解】 原方程为 $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0$

①若 $m=0,n=0$ 时,原方程变为 $0x^2=0$,方程的解 x 为任意实数.

②若 $m\neq0,n=0$ 时,原方程变为 $m^2x=0$,所以原方程的解为 $x=0$.

若 $m=0,n\neq0$ 时,原方程变为 $n^2x=0$,所以原方程的解为 $x=0$.

③若 $m\neq0,n\neq0$ 时,则原方程为二次方程,用十字相乘法解得 $(mx-n)(nx-m)=0$,所以 $x_1=\frac{n}{m},x_2=\frac{m}{n}$.

综上所述,当 m、n 有一个为零时,方程的解为 $x=0$;当 m、n 同时为零时,方程有任意实数解;当 m、n 都不为零时,方程的解为 $x_1=\frac{n}{m},x_2=\frac{m}{n}$.

【评注】 在解含有字母系数的二次方程时,常常要对字母系数进行讨论,在讨论时要防止遗漏各种可能的情况.

【例 4】 利用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

【分析】 配方法源于开平方法,即 $f^2=a\Leftrightarrow f=\pm\sqrt{a}$.

【解】 将方程两边都乘以 $4a$,得 $4a^2x^2+4abx+4ac=0$

$\Rightarrow4a^2x^2+4abx=-4ac$ $\Rightarrow4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

$\Rightarrow(2ax+b)^2=b^2-4ac$ $\Rightarrow2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\Rightarrow2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\therefore \quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

【评注】 这种解法实际上是求根公式的又一种简便推导方法. 通过上题的解法可以看出,配方方法本身也很重要. 再看下面的例题,更可见其配方的技巧.

【例 5】 把关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 配方成为 $a(x-2)^2+b(x-2)+c=0$ 的形式,得______.

【解法 1】 $(x^2-4x+4)+4x-4-2x+2=0$

$(x-2)^2+2x-4+2=0$

$(x-2)^2+2(x-2)+2=0$

【解法 2】 (利用换元法)

设 $y=x-2$,则 $x=y+2$

$$\begin{aligned}x^2-2x+2 &=(y+2)^2-2(y+2)+2\\&=y^2+4y+4-2y-4+2\\&=y^2+2y+2\\&=(x-2)^2+2(x-2)+2\end{aligned}$$

$\therefore \quad (x-2)^2+2(x-2)+2=0$

【解法 3】 (待定系数法)显然可设

$x^2-2x+2=(x-2)^2+b(x-2)+c$

由于两边恒等,故当 $x=2$ 时,两边也相等.

$2^2-2\times2+2=0^2+b\times0+c$

$\therefore \quad c=2$

$\therefore \quad x^2-2x+2=(x-2)^2+b(x-2)+2$

$\Rightarrow \quad x(x-2)=(x-2)^2+b(x-2)$

$\Rightarrow \quad x=(x-2)+b \qquad \Rightarrow \quad b=2$

$\therefore \quad (x-2)^2+2(x-2)+2=0$

【评注】 本题的这三种解法都是借助配方的技巧来完成的.

此外，配方法在因式分解、证明恒等式、求函数的极值等问题中都有广泛的应用，是一种很重要的很基本的数学方法.

【例 6】 用直接开平方法解方程$(x-3)^2=8$，得方程的根为(　　)

(A)$x=3+2\sqrt{2}$　　　　(B)$x=3-2\sqrt{2}$

(C)$x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$

(D)$x_1=3+2\sqrt{3}$，$x_2=3-2\sqrt{3}$

（2000 年陕西省西安市中考题）

【分析】 用开平方法解一元二次方程，实际上是利用了平方根的定义，所以解此方程时，应注意"＋""－"两个根.

【解】 $x-3=\pm 2\sqrt{2}$　　　$x=3\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$ $x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$.

故应选(C).

【评注】 这里是先把括号内的部分$(x-3)$看成一个整体，然后利用平方根的意义，求出这个整体的值，最后再求出未知数 x 的值.

【例 7】 已知方程 $a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$(其中 a 是非负整数)至少有一个整数根，那么 a 的最大值是多少？

（1998 年全国初中竞赛题）

【分析】 由题意知，当方程的根是整数时，求 a 的最大值. 所以先求方程的根，然后按照题中的要求去确定 a 的值.

【解】 $\because a\neq 0$，用因式分解法可求得：

$$x_1=\frac{2a-3}{a}=2-\frac{3}{a},\quad x_2=\frac{a-5}{a}=1-\frac{5}{a}.$$

由于 a 是非负整数，

故当 x_1 是整数时，a 可取 1,3；

当 x_2 是整数时，a 可取 1，5；

所以 a 的最大值应是 5.

【评注】 在初中数学竞赛和中考中经常出现一些求最值（最大值或最小值）问题，如本例题可采用求出所有可能的值，然后进行比较，确定最大（或最小）值，这也是常见的方法之一.

【例 8】 方程 $(1984x)^2-1983\cdot1985x-1=0$ 的较大根为 γ，$x^2+1983x-1984=0$ 的较小根为 s，则 $\gamma-s=$______.

(A)$\frac{1}{1985}$　(B)1985　(C)$\frac{1984}{1985}$　(D)0　(E)$-\frac{1983}{1984}$

（1984 年北京初中数学竞赛题）

【分析】 欲求 $\gamma-s$，需求 γ 和 s，即需解两个方程，通过解方程求出 γ 和 s，问题即获解.

【解】 $(1984x)^2-1983\cdot1985x-1=0$

可化为 $(1984x)^2-(1984^2-1)x-1=0$

可化为 $(1984^2x+1)(x-1)=0$

$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{1984^2},x_2=1.$

同样，对方程 $x^2+1983x-1984=0$，

可化为　$(x+1984)(x-1)=0$

$\therefore\quad x_1=-1984,x_2=1.$

由题意得　$\gamma=1,s=-1984$，

$\therefore\quad \gamma-s=1-(-1984)=1985.$

故应选(B)

【评注】 本例的两个方程都可用因式分解法和求根公式法来解，但因式分解法较简便；如果不能用因式分解法，则可采用公式法解.

【例 9】 已知关于 x 的二次方程 $2x^2-5x-a=0$（其中 a 为常数），若两根之比 $x_1:x_2=2:3$，则 x_2-x_1 为（　　）

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)1　　(C)$\frac{3}{2}$　　(D)2

（1999 年江苏初中数学竞赛题）

【分析】 要求 x_2-x_1 的值，关键是求 x_1 和 x_2 的值，但需先求 a 的值. 这由已知条件可求.

【解】 $2x^2-5x-a=0$

由求根公式，得

$$x_1=\frac{5-\sqrt{25+8a}}{4},\quad x_2=\frac{5+\sqrt{25+8a}}{4},$$

由题意，得

$$x_1:x_2=\frac{5-\sqrt{25+8a}}{4}:\frac{5+\sqrt{25+8a}}{4}=2:3$$

即 $$\frac{5-\sqrt{25+8a}}{5+\sqrt{25+8a}}=\frac{2}{3}$$

也即 $2\times(5+\sqrt{25+8a})=3\times(5-\sqrt{25+8a})$

$\therefore\quad \sqrt{25+8a}=1\qquad \therefore\quad 25+8a=1$

$\therefore\quad a=-3$

由此得 $x_1=1, x_2=\frac{3}{2}$， $\therefore\ x_2-x_1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

故应选(A).

【评注】 解本例题的关键是由 $x_1:x_2=2:3$ 求 a，然后才是求 x_2-x_1.

1.2　一元二次方程根的判别式

知识要点

1. 一元二次方程根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta\geqslant 0\rightarrow$有实数根

$\Delta>0\to$有两个不相等的实数根

$\Delta=0\to$有两个相等的实数根

$\Delta<0\to$没有实数根

2.理解和掌握一元二次方程根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的意义，并会根据根的判别式判断一元二次方程的根的情况.

典型例题及解析

【例 1】 当 k 为何值时，方程 $(k+1)x^2-(2k+3)x+k+3=0$ 有实数根.

【分析】 对于字母系数的方程，一般要对字母的取值进行讨论.因本题的已知条件中并未指明关于 x 的方程是二次方程，故应对 $k+1=0$ 和 $k+1\neq0$ 两种情况分别加以讨论.

【解】 当 $k+1\neq0$ 时，

$$\begin{aligned}\Delta&=[-(2k+3)]^2-4(k+1)(k+3)\\&=-4k-3\end{aligned}$$

当 $\Delta\geqslant0$ 时，原方程有实根.

即当 $k\leqslant-\dfrac{3}{4}$ 且 $k\neq-1$ 时，原方程有实根.

当 $k+1=0$ 时，方程为 $-(2k+3)x+k+3=0$

$\because$ $-(2k+3)=-1\neq0$，

$\therefore$ 此时原方程有惟一的实数根.

综上所述：当 $k\leqslant-\dfrac{3}{4}$ 时，原方程有实根.

【评注】 对含有字母系数的方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 根的判别式可归纳为下面的情况：

(1) $A\neq0$ 时，

$\Delta>0\to$方程有两个不等实根

$\Delta=0\to$方程有两个相等实根