简明线性代数

JIANMING XIANXING DAISHU

王海敏 主编

浙江工商大學出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

简明线性代数

王海敏 主编

浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

简明线性代数 / 王海敏主编. 一杭州：浙江工商大学出版社，2012.3
ISBN 978-7-81140-467-8

Ⅰ.①简… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 029013 号

简明线性代数

王海敏 著

责任编辑 陈维君
封面设计 陈思思
责任印制 汪 俊
出版发行 浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)
(E-mail:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571—88904980,88831806(传真)
排 版 杭州朝曦图文设计有限公司
印 刷 杭州杭新印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 14.5
字 数 266 千
版 印 次 2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-81140-467-8
定 价 32.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571—88804227

前　　言

线性问题广泛存在于科学技术的各个领域,尤其是在计算机普及和发展的今天,线性代数课程的重要性日益凸显。

本教材是我们在多年教学实践的基础上参照成人高等教育线性代数课程的基本要求编写的。全书共分5章,第1章介绍了行列式的概念、性质以及行列式的计算方法;第2章介绍了矩阵这一重要工具,讨论了矩阵的运算、矩阵的初等变换和矩阵的秩;第3章以矩阵为工具,讨论了线性方程组的解法和线性方程组解的结构;第4章介绍了矩阵的特征值和特征向量,并以矩阵的特征值和特征向量为工具研究了矩阵的对角化问题;第5章介绍了二次型概念、二次型化标准型和判断二次型为正定的方法。在编写过程中,我们充分考虑了成人教育的特点,论述上力求详尽、易懂,注重基本概念的直观阐述,重要的结果以定理的形式给出,其他有用的事实以注解的方式说明、展示。大多数的定理有正式证明,证法易于理解。例题清晰,步骤详细。为了方便自学,我们不仅在各个章节后面精心配置了习题,而且在教材的附册中提供了全部习题的详细解答,以方便学生检查对所学内容的掌握程度,巩固学习效果。

本书的第1、2、3章由王海敏执笔;第4、5章由韩兆秀执笔;习题详解由袁中扬执笔,全书最后由王海敏统稿、定稿。

本书编写过程中参考了大量的国内外教材;浙江工商大学成人教育重点建设教材基金资助了本书的出版;浙江工商大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助;浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中一定存在不妥之处,恳请专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2011年12月于浙江工商大学

目 录

第 1 章　行 列 式

行列式的概念起源于线性方程组的求解.在线性代数中,行列式是一个基本工具.本章首先介绍二阶和三阶行列式,进而递归定义 n 阶行列式并讨论它的性质及其应用.

§1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶和三阶行列式

给出二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \tag{1-1}$$

以 a_{22} 乘第一个方程,以 a_{12} 乘第二个方程,然后两式相加,消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组(1 - 1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为了找出解的表达式(1 - 2)的规律,便于推广,我们引入定义 1.1.

定义 1.1　下述记号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称这个记号为**二阶行列式**.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1-4}$$

构成二阶行列式的四个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 叫做行列式的**元素**,横排称为**行**,竖排称为**列**.元素 a_{ij} 中的下标第一个指标 i 表示它在行列式的第 i 行,称为元素 a_{ij} 的**行下标**;第二个指标 j 表示 a_{ij} 在行列式的第 j 列,称为**列下标**.行列式通常用大

写字母 D 表示.

从(1-4)式可知,二阶行列式是两项的代数和,一项是从左上角到右下角的对角线上两元素的乘积,取正号.另一项是从右上角到左下角的对角线上两元素的乘积,取负号.

利用二阶行列式的概念,(1-2)式中 x_1, x_2 的分子也可写成二阶行列式:

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时,方程组(1-1)的唯一解(1-2)可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

用行列式表示方程组(1-1)的解,我们很容易发现其规律性:分母都是方程组(1-1)中 x_1 及 x_2 的系数构成的行列式 D,因此也称为方程组(1-1)的**系数行列式**;x_1 的分子 D_1 是将系数行列式 D 中对应 x_1 系数的列换成常数项后得到的行列式,x_2 的分子 D_2 是将系数行列式 D 中对应 x_2 系数的列换成常数项后得到的行列式.

例 1.1 解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1-2x_2=-3 \end{cases}$.

解
$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14.$$

因为 $D=-7\neq 0$,所以所给方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

类似地,对于三个未知数三个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}, \tag{1-5}$$

为了简洁地表达它的解,我们引入三阶行列式的概念.

定义 1.2　称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，它定义为其元素的下列代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1-6)$$

关于三阶行列式的元素、行、列等概念与二阶行列式的相应概念类似，不再重复.

上述定义表明三阶行列式含有 3！＝6 项，每项均为不同行不同列三个元素的乘积并带有正负号，并且式子恰恰就是由所有这种可能的乘积组成. 三阶行列式的计算可借助图 1-1 的对角线法则来记忆：行列式中从左上角到右下角的直线称为**主对角线**，从右上角到左下角的直线称为**次对角线**. 主对角线上元素的乘积以及位于主对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积，前面都取正号. 次对角线上元素的乘积以及位于次对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积，前面都取负号.

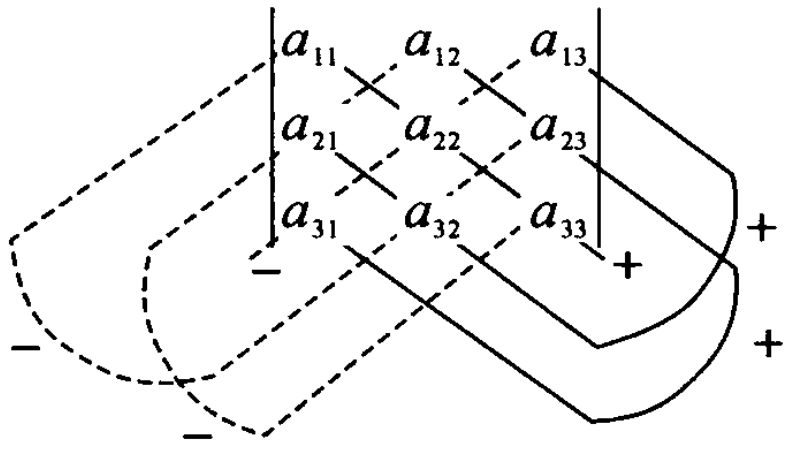

图 1-1

例 1.2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则，有

$D=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times1\times3$

$=30+2-24-12+20-6=10.$

有了三阶行列式的概念，利用加减消元法或代入消元法，我们可以把方程组(1-5)的解用三阶行列式较简洁地表示出来. 当方程组(1-5)的系数行列式，即三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，三元线性方程组(1-5)有唯一解，解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.1.2 n 阶行列式

一阶行列式 $|a_{11}|$ 的值定义为数 a_{11}，即 $|a_{11}|=a_{11}$，则二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},$$

其中 $A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|, A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|$.

对于三阶行列式，利用数的交换律和结合律，我们把(1-6)式改写如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1-7)$$

我们记

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

分别称为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的**余子式**，并称

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}, \quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$$

为其**代数余子式**，则三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (1-8)$$

(1－8)式称为三阶行列式**按第一行的展开式**.

例 1.3 将例 1.2 中的行列式按第一行展开并计算

解
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=2(3\times5-1\times3)-[(-4)\times5-1\times2]+2[(-4)\times3-3\times2]$$
$$=2\times12-(-22)+2\times(-18)=24+22-36=10.$$

结合(1－8)式我们发现,可以用一阶行列式定义二阶行列式,用二阶行列式定义三阶行列式. 自然我们设想用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式. 显然,对于这样定义的各阶行列式将会有一样的运算性质.

定义 1.3 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式:

当 $n=1$ 时,$D_1=|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n\geqslant2$ 时,$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$,

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$,

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**,A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**.

由定义可以看出,n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的,每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积. 在全部 $n!$ 项中,带正号的项和带负号的项各占一半.

例 1.4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 4\\3 & 0 & 1 & 1\\0 & -1 & 2 & 3\\2 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}.$$

解 按行列式定义，有

$$\begin{aligned}D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}\\&=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\-1 & 2 & 3\\0 & 5 & 1\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\0 & 2 & 3\\2 & 5 & 1\end{vmatrix}\\&\quad+(-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\0 & -1 & 3\\2 & 0 & 1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\0 & -1 & 2\\2 & 0 & 5\end{vmatrix}\\&=2(-5+1)-(6+6-4-45)-2(-3+2)-4(-15+2)\\&=-8+37+2+52=83.\end{aligned}$$

例 1.5 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

解 按行列式定义，依第一行展开得

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & 0 & \cdots & 0\\a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\times a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{33} & 0 & \cdots & 0\\a_{43} & a_{44} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角形行列式的性质是主对角线（从左上角到右下角这条对角线）上的元素全为零. 这个行列式就等于主对角线上元素的乘积.

作为下三角形行列式的特殊情形，有

$$\begin{vmatrix}d_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & d_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & d_n\end{vmatrix}=d_1d_2\cdots d_n.$$

主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式**. 上式说明了对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

习题 1.1

1. 利用二阶行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases}5x_1-x_2=2\\3x_1+2x_2=9\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}3x_1+4x_2=2\\2x_1+3x_2=7\end{cases}$.

2. 利用对角线法则，计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -4 & -1\\-1 & 8 & 3\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}4 & -2 & 4\\10 & 2 & 12\\1 & 2 & 2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\7 & 5 & 1\\3 & 2 & 4\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1+a & 1\\1 & 1 & 1+b\end{vmatrix}$.

3. 将下列行列式按第一行展开并计算它们的值：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\2 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\end{vmatrix}$.

4. 证明下列等式：

(1) $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$.

注　上面这两个等式分别称为三阶行列式按第二行和按第三行的展开式.

5. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\0 & 0 & \cdots & 2 & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & n-1 & \cdots & 0 & 0\\n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

§1.2 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，也是一个很麻烦的问题，n 阶行列式一共有 $n!$ 项，计算它需做 $n!(n-1)$个乘法，当 n 较大时，这是一个相当大的数字，因此直接从定义来计算行列式几乎是不可能的事．所以，我们有必要讨论行列式的性质，利用这些性质可以化简行列式的计算．

性质 1.1 行列互换，行列式不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的，因此凡是有关行的性质，对列也同样成立．例如，由上节例 1.2 即得上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下面所述的行列式的性质大多是对行来叙述的，对于列也有相同的性质，就不重复了．

性质 1.2 （行列式按行展开）设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D, & \text{当 } k=i \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } k\neq i \text{ 时} \end{cases},$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式．

性质 1.3 行列式中一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行就相当于用这个数乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 } i \text{ 行展开}} ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论　令 $k=0$，即如果行列式中一行为 0，那么行列式为 0.

性质 1.4　如果行列式的某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来的行列式的对应的行一样，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　设这一行是第 i 行，由性质 1.2 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (b_1+c_1)A_{i1} + (b_2+c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n+c_n)A_{in}$$

$$= (b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}) + (c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \cdots + c_nA_{in})$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

性质 1.5　如果行列式中有两行的对应元素相等,那么行列式为 0,即

$$
\begin{array}{cl} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = 0.
$$

证　用数学归纳法证明. 显然结论对 2 阶行列式成立. 假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立,在 n 阶行列式的情况下,按第 k 行($k\neq i,\ j$)展开,有

$$
D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}.
$$

由于 M_{kl},$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 是 $n-1$ 阶行列式,且其中都有两行对应元素相同,按假设 $M_{kl}=0$,故 $A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0$,$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$,即 $D=0$.

性质 1.6　如果行列式中有两行对应元素成比例,那么行列式为 0.

证

$$
\begin{array}{cl} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \xlongequal{\text{由性质 1.3}} k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 1.5}} k\times 0=0.
$$

性质 1.7　把行列式中某一行的倍数加到另一行,行列式不变,即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

$$
\text{证　右端} \xlongequal{\text{由性质 1.4}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{由性质 1.6}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{左端}.
$$

性质 1.8　对换行列式中两行的位置，行列式反号，即

$$
\begin{array}{c} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.
$$

$$
\text{证　左端} \xlongequal{\text{第 } j \text{ 行加到第 } i \text{ 行}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$