上海市中学课本

数学

第六册

上 海 人 民 出 版 社

目　　录

第一章　二 次 函 数

在三大革命运动中，经常会遇到二次函数的问题．先看下面的例子：

(1) 在等腰直角三角形中，如果直角边长是 x 厘米，面积是 y 平方厘米，那末

$$y=\frac{1}{2}x^2.$$

上式中，当 x 每取一个确定值时，面积 y 也有确定的值和它对应．这就是说，等腰直角三角形的面积 y 是直角边长 x 的函数．

(2) 用 16 米长的篱笆，围成一个一边靠墙的矩形养鸡场．如果与墙垂直的一边长是 x 米，面积是 y 平方米，那末

$$y=16x-2x^2.$$

上式中，当 x 每取一个确定的值时，y 也就有确定的值和它对应．这就是说，矩形的面积 y 是边长 x 的函数．

以上的两个函数关系式，都是 $y=ax^2+bx+c$ 的形式，其中 a、b、c 是常量，$a\neq0$．我们称 $y=ax^2+bx+c$ 是 x 的二次函数．

在这一章里，我们将研究二次函数的图象、性质、变化率和极值等问题，并运用二次函数的知识去解决工农业生产中一些有关的实际问题．

第一节　二次函数的图象和性质

一、函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

遵循毛主席关于"**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物**"的教导，我们先来研究特殊的二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质.

【例 1】 画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

解：应用以前学过的描点法，可以画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

(1) 列表. 取自变量 x 的一些值，算出对应的函数值 y，列成下表：

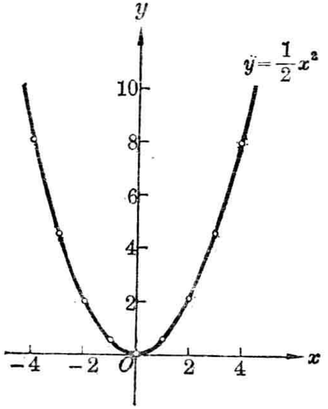

图 1.1

x	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
y	……	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	……

(2) 描点. 把表里每组对应值作为点的坐标，在平面直角坐标系中定出各个点. 用平滑的曲线把上面各点连接起来，就得到函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象(图 1.1).

用同样的方法，可分别列表画出函数 $y=x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=2x^2$ 的图象(图 1.2).

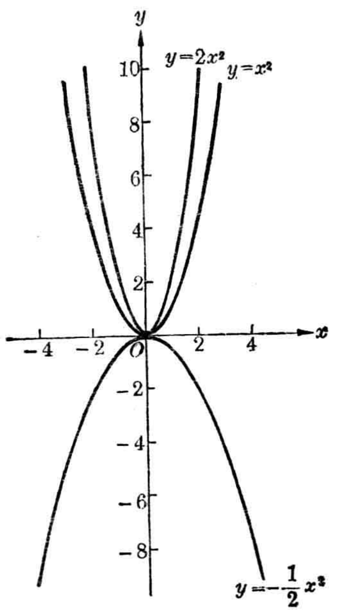

图 1.2

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
$y=x^2$	……	9	4	1	0	1	4	9	……
$y=-\frac{1}{2}x^2$	……	$-4\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-4\frac{1}{2}$	……
$y=2x^2$	……	18	8	2	0	2	8	18	……

二次函数 $y=ax^2$ 的图象是一条抛物线.

根据函数 $y=x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=2x^2$ 的图象可以知道,抛物线 $y=ax^2$ 具有下面一些性质:

(1) 从图 1.2 可以看到,抛物线 $y=x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=2x^2$ 都是关于 y 轴对称的. 从表中可以看出,当 $x=\pm1$ 时,函数 $y=x^2$ 的两个对应值都是 1; $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的两个对应值都是 $-\frac{1}{2}$; $y=2x^2$ 的两个对应值都是 2. 一般地说,在函数 $y=ax^2$ 中,用 $-x$ 代 x, 函数值不变. 这就是说,抛物线 $y=ax^2$ 是关于 y 轴对称的; y 轴是抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴.

(2) 抛物线 $y=ax^2$ 和它的对称轴的交点叫做抛物线的顶点. 从图 1.2 可以看到,抛物线 $y=ax^2$ 的顶点在原点.

(3) 当 $a>0$ 时,抛物线 $y=ax^2$ 在 x 轴的上方,开口向上,顶点是它的最低点;当 $a<0$ 时,抛物线在 x 轴的下方,开口向下,顶点是它的最高点.

(4) $|a|$ 越大,抛物线开口越小.

【例 2】 画出函数 $y=-2x^2$ 的图象.

根据抛物线 $y=ax^2$ 的性质，可以知道，抛物线 $y=-2x^2$ 的顶点在原点，对称轴是 y 轴．因为 $a=-2<0$，所以抛物线在 x 轴的下方，开口向下．掌握了抛物线 $y=-2x^2$ 的大致形状后，用描点法画图时就比较方便了．

解：(1) 列表．因为抛物线 $y=-2x^2$ 在 x 轴的下方，而且关于 y 轴对称，所以只须列出第四象限内几个点的坐标．我们从 $x=0$ 起取一些适当的值，算出对应的函数值，列成下表：

x	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	……
y	0	-2	-8	$-12\frac{1}{2}$	……

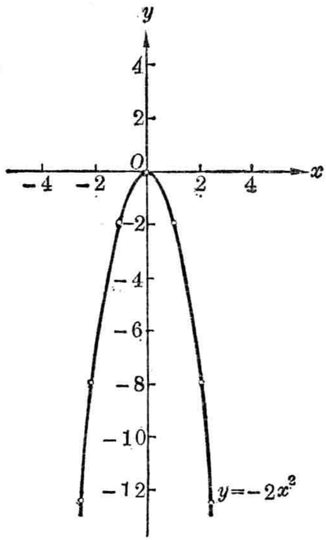

图 1.3

(2) 描点．先把表里的每组对应值作为点的坐标，定出各个点和这些点关于 y 轴的对称点．然后，用平滑的曲线把它们连接起来，就得到函数 $y=-2x^2$ 的图象 (图 1.3)．

试一试：利用函数 $y=ax^2$ 的性质，检验这个图象画得是否正确．

练 习 一

1．写出下列各题中的函数关系：

(1) 正方形的面积 S 与边长 x 之间的关系;

(2) 圆面积 S 与圆的半径 R 之间的关系;

(3) 边长是 3 的正方形,当边长增加 x 时,它的面积 y 与 x 之间的关系;

(4) 半径是 5 的圆,当半径增加 x 时,面积的增加量 y 与 x 之间的关系;

(5) 对于周长为 l 的长方形,其面积 S 与宽 x 之间的关系.

2. 画出函数 $y=x^2$ 的图象,并根据图象:

(1) 求出当 $x=2$、$x=1.5$、$x=-1.5$ 时 y 的值;

(2) 求出当 $y=2$、$y=5.5$、$y=3\frac{1}{3}$ 时 x 的值.

3. 用描点法,画出下列函数的图象:

(1) $y=\frac{1}{3}x^2$;　　(2) $y=\frac{3}{2}x^2$;

(3) $y=-x^2$;　　(4) $y=-3x^2$.

4. 画出下列函数的图象,指出它们的顶点位置、开口方向、对称轴,并比较它们的开口大小:

$y=3x^2$;　$y=0.1x^2$;　$y=-2.5x^2$;　$y=-0.5x^2$.

5. 利用函数 $y=ax^2$ 图象的性质,画出下列函数的图象:

(1) $y=4x^2$;　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

二、函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

在学习函数 $y=ax^2$ 图象的基础上,我们进一步研究函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质.

【例 3】 画出下列函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2+3$;　　(2) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$;

(3) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$.

解：把 x、y 的对应值分别列成下面的表，用描点法分别画出这三个函数的图象（图 1.4、图 1.5、图 1.6）：

x	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
$y=\frac{1}{2}x^2+3$	……	11	$7\frac{1}{2}$	5	$3\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	5	$7\frac{1}{2}$	11	……

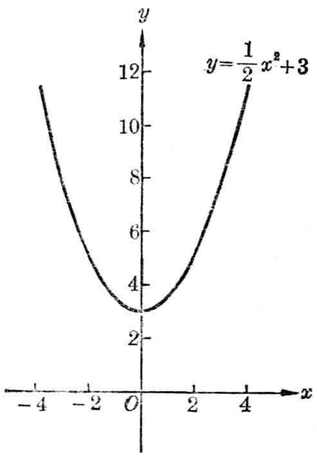

图 1.4

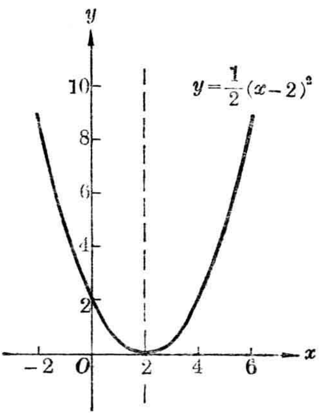

图 1.5

x	……	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	……
$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$	……	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	……

x	……	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	……
$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$	……	11	$7\frac{1}{2}$	5	$3\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	5	$7\frac{1}{2}$	11	……

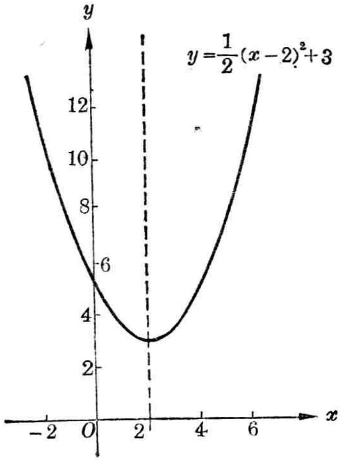

图 1.6

从上面三个图象可以看出，它们都是与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象形状完全相同的抛物线，只是顶点的位置不同. 它们的顶点分别是 $(0, 3)$、$(2, 0)$ 和 $(2, 3)$.

【例 4】 画出下列函数的图象：

(1) $y=x^2+4x+4$;　　　　(2) $y=x^2+4x+3$.

解：(1) $y=x^2+4x+4$.

我们已经知道，$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象是抛物线. 因为 $\frac{1}{2}(x-2)^2=\frac{1}{2}x^2-2x+2$，把它和 x^2+4x+4 比较，可以看出它们都是二次三项式.

这里，x^2+4x+4 可化为完全平方的形式，即 $x^2+4x+4=(x+2)^2$. 不难发现，函数 $y=x^2+4x+4$，即 $y=(x+2)^2$ 的图象是抛物线（图 1.7），它的顶点在 $(-2, 0)$，对称轴是直线 $x=-2$.

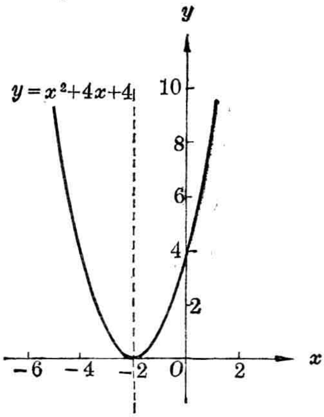

图 1.7

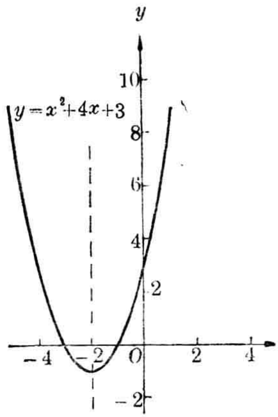

图 1.8

(2) $y=x^2+4x+3$.

通过配方，可得

$$y=x^2+4x+3=x^2+4x+4-4+3$$
$$=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1.$$

所以函数 $y=x^2+4x+3$，即 $y=(x+2)^2-1$ 的图象是抛物线（图 1.8），它的顶点在 $(-2, -1)$，对称轴也是直线 $x=-2$.

一般地说，

对于函数 $y=ax^2+bx+c$，可以通过配方法把它化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，它的图象是抛物线，顶点在 $(-m, k)$，对称轴是过顶点平行于 y 轴的直线 $x=-m$. 当 $a>0$ 时，

抛物线开口向上，顶点是最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点是最高点.

当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴相交时，通常只要先找出抛物线的顶点，以及它与 x 轴的交点，就可以进而确定抛物线的大致形状.

【例 5】 画出抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$ 的大致形状.

解：把 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$ 配方，得

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{9}{2},$$

所以抛物线的顶点在 $\left(2,\ -\frac{9}{2}\right)$.

令 $y=0$，那末

$$\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=5,\qquad x_2=-1.$$

所以，抛物线和 x 轴的交点是 $(5,0)$ 和 $(-1,0)$.

在平面直角坐标系中，定出抛物线的顶点 $\left(2,\ -\frac{9}{2}\right)$ 以及它和 x 轴的交点 $(5,0)$、$(-1,0)$，并用虚线画出它的对称轴. 然后，根据这三点画出抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$ 的大致形状（图 1.9）.

一般地说，如果与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 对应的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个解，那末这两个解就是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点的横坐标.

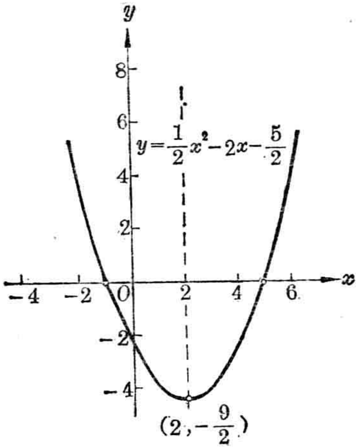

图 1.9

试一试：求出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴的交点.

练 习 二

1. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=2x^2$、$y=2x^2+3$、$y=2x^2-3$ 的图象，并比较它们顶点的位置.

2. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=2x^2$、$y=2(x-1)^2$、$y=2(x+1)^2$ 的图象，并比较它们的顶点和对称轴的位置.

3. 根据函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的性质，先用配方法把下列函数化成 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，再画出它们的图象.

(1) $y=x^2-6x+5$;　　(2) $y=-2x^2-4x+6$;

(3) $y=x(x-2)$;　　(4) $y=1+4x-x^2$.

4. 画出下列函数的图象，指出它们的顶点、对称轴和开口方向.

(1) $y=2x^2-16x+32$;　　(2) $y=4x^2+12x-7$;

(3) $y=x^2-2x+4$;　　(4) $y=x^2+2x+8$.

5. 根据抛物线的顶点以及抛物线与 x 轴的交点，画出下列函数图象的大致形状.

(1) $y=x^2-2x-8$;　　(2) $y=x^2-2x-\frac{3}{2}$;

(3) $y=-x^2+2x$;　　(4) $y=-4x^2+4x+24$.

三、一元二次不等式的图象解法

某工厂制造一个电镀槽，要使它的底面矩形的长比宽多2分米，而且底面积要大于8平方分米. 问底面宽至少要多长?

设矩形的底面宽为 x 分米，则底面的长就是 $(x+2)$ 分米. 根据题意，得

$$x(x+2)>8,$$

即

$$x^2+2x-8>0.$$

象上面这种含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的不等式叫做一元二次不等式. 它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0, \quad (a\neq 0)$$

或

$$ax^2+bx+c<0. \quad (a\neq 0)$$

把一元二次不等式和二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 相比较，我们看到，利用图象可以求解一元二次不等式. 这就是从观察二次函数的图象，得出 x 取什么值的时候，函数值 y 大于

零；x 取什么值时，函数值 y 小于零.

现在我们以 $x^2+2x-8>0$ 为例，来说明一元二次不等式的图象解法.

我们可以先画出与不等式 $x^2+2x-8>0$ 相应的二次函数 $y=x^2+2x-8$ 的图象(图 1.10)，抛物线和 x 轴的交点是 $B(-4, 0)$、$C(2, 0)$. 根据例 5 的讨论可以知道，它们的横坐标 $x_1=-4$、$x_2=2$ 是一元二次方程 $x^2+2x-8=0$ 的解.

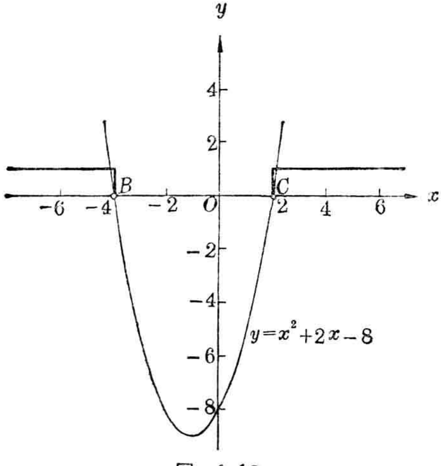

图 1.10

观察图 1.10 可以看到，点 B 和 C 把抛物线分成三部分：

(1) 当 $x<-4$ 时，抛物线在 x 轴的上方. 因而，这时的函数值是正数，就是 $x^2+2x-8>0$；

(2) 当 $x>2$ 时，抛物线也在 x 轴的上方. 因而，这时的函数值也是正数，就是 $x^2+2x-8>0$；

(3) 当 $-4<x<2$ 时，抛物线在 x 轴的下方. 因而，这时的函数值是负数，就是 $x^2+2x-8<0$.

由(1)、(2)可知,不等式 $x^2+2x-8>0$ 的解是

$$x>2 \quad 和 \quad x<-4.$$

由于矩形底面的宽不可能是负数,所以 $x<-4$ 无实际意义,应把它舍去. 因此,矩形底面的宽必须大于2分米.

上面这个例子告诉我们,用图象法解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ (或 $ax^2+bx+c<0$) 的方法是: 首先求出与它对应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解,从而确定抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点; 然后,画出这抛物线的大致形状,并找出不等式的解.

【例6】 利用二次函数的图象,解不等式

$$-\frac{1}{2}x^2+4x-6>0.$$

解: (1) 解方程 $-\frac{1}{2}x^2+4x-6=0$, 得

$$x_1=6, \quad x_2=2.$$

(2) 画出抛物线

$$y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$$

的大致形状 (图 1.11).

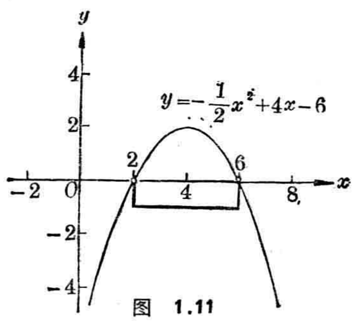

图 1.11

所以，不等式 $-\frac{1}{2}x^2+4x-6>0$ 的解是

$$2<x<6.$$

练　习　三

1．利用二次函数的图象，解下列不等式：

(1) $2x^2-4x-6>0$;　　(2) $-x^2-2x+3<0$;

(3) $x^2-2x-3<0$;　　(4) $x^2-3x+2>0$.

2．确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-x-6}$;　　(2) $y=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

3．造一个截面是矩形的通风直角弯管，要使矩形的长比宽多 5 厘米，而且面积大于 150 平方厘米．问矩形的宽应当大于多少厘米？

第二节　二次函数的变化率

一、抛物线的切线斜率

我们知道，当物体沿一条直线运动时，如果物体的运动方向不变，这个方向就可以通过平面直角坐标系中直线的斜率来表示．对于作曲线运动的物体，例如飞行中的炮弹，它的运动方向是在不断地改变的，这时就要用曲线上某一点的切线方向来表示它在该点的运动方向．

炮弹飞行的轨道是条抛物线．为了弄清炮弹的运动方向，我们就要研究抛物线的切线和切线的斜率（或切线方向）．那末，怎样找出抛物线的切线和切线的斜率呢？