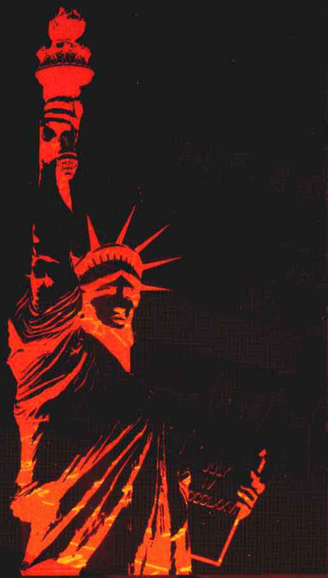

美国
微积分教材精粹选编

郭镜明 韩云瑞 章栋恩 等编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

美 国
微积分教材精粹选编

Meiguo Weijifen Jiaocai Jingcui Xuanbian

郭镜明　韩云瑞　章栋恩　等编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书立足国内微积分教学的需要，从美国当前使用面广、影响大的教材中摘取、改编了大量有参考价值、又是国内教材中较为缺少的素材，并加以评注，汇集而成。全书内容分为两大类，一类是概念、原理的理解、表述和背景，共45条，摘编了美国教材中有特色的教学素材和处理方式，以及一些有用的背景材料；第二类是例题、习题精选及题解，共选编了各种不同题型、有利于培养学生能力又有一定新意的题目220多道，微积分 projects17 道。全书题目绝大部分都配有解答甚至一题多解，对其中不少题目还加了评注，以便更有目的地选用。

本书内容丰富，体例新颖，是对国内微积分教学素材的很好补充，可作为高等学校教授微积分课程的教师的教学参考书，也可供广大学生学习微积分时参考。

图书在版编目(CIP)数据

美国微积分教材精粹选编/郭镜明等编. --北京：高等教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-04-034827-9

Ⅰ.①美… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第131899号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	马 丽	封面设计	张 楠	版式设计	杜微言
插图绘制	于 博	责任校对	杨凤玲	责任印制	张泽业		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京机工印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm × 960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	23.25	版 次	2012年7月第1版
字 数	380千字	印 次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	39.20元

物 料 号 34827-00

序

由于历史原因,国内的微积分(高等数学)教材主要脱胎于苏联的相关教材,一般比较注重理论体系的完整、推理过程的严密,例题和习题则比较偏重于纯数学的概念复习和技巧训练。相比之下,美国的很多微积分教材内容较为浅显,比较注重可接受性,取材比较广泛,突出微积分的基本思想,注重理论和概念的几何直观和物理背景;重视数学知识的应用和数学建模;重视与计算机的结合;文字通俗活泼;例题和习题类型比较丰富。这两种处理方式各有优缺点,在培养学生的数学能力上也各有千秋。

美国教材形成现在的特色是有其文化背景和历史原因的。就教学方面的原因而言,20 世纪 80 年代,美国大学出于提升美国科技竞争力的需要,更加强调学生数学能力的培养;同时大学扩招,入学人数达到历史高峰,学习微积分课程的学生急剧增加,导致不能通过微积分课程考试的学生比例增加,教学质量下降,从而在美国数学界引起了关于微积分教材改革的大讨论。虽然对待改革的不同意见还在争论,但是所取得的一些共识已经反映到一些美国的微积分改革教材中,例如所谓的“四规则”(每个概念都要用图形、文字、数值和代数的方法加以呈现)的编写理念和突出应用的处理方式等。

当前我国的高等教育已经从精英教育进入大众化教育阶段,一方面强调学生创新能力的培养,另一方面随着入学学生大量增加,学生的数学基础差异加大,加之市场经济的发展,促使学生在职业规划和学习兴趣等方面呈现多元化的趋势,在这些因素的综合作用下,使得我国的微积分教学面临美国曾经遇到过的类似问题。面对这种形势,如何使微积分教材既能适应大众化的高等教育需要,又能为高素质创新型人才的培养奠定良好的数学基础,这是当前教学改革中广大数学教师面临的一个主要问题。美国的微积分改革教材中所反映的一些教学理念和成功经验,或许能对我们有所启示,可作为我们借鉴的一

种它山之石。

自20世纪90年代我国大学数学基础课程进行新一轮的教学改革以来,美国微积分改革教材陆续被引入我国并产生了积极影响。为了进一步拓广我国微积分教学改革的思路,为广大数学教师和读者提供更多可资借鉴、便于学习的范例,“高等学校大学数学研究与发展中心”在2009年成立了相关的课题组,由西交利物浦大学和西安交通大学部分数学教师组成,对美国有代表性的微积分教材进行了深入、具体的比较研究,将那些分散于不同教材中的有特色的教学素材进行归纳、分析和评论,汇集成书,供国内教师参考借鉴。西交利物浦大学数理中心集中了国内在微积分教材编写和教学研究方面的一些资深教授,经过两年多的辛勤工作,以他们为主编写成了这本《美国微积分教材精粹选编》。本书立足国内教学实际,突出美国教材特色,对微积分的概念和原理的背景和表述、有特色的例题习题、微积分研究课题等进行选编、改编以及点评,还有部分内容是编者在美国微积分教材启示下,结合教学实践编写成的教学素材,内容丰富,选材新颖,可读性强,为广大微积分教师特别是青年教师提供了很多有启发性的教学素材以及新鲜的例题和习题,也为正在学习微积分的大学生提供了一本有价值的参考书。相信本书的出版将对微积分教学质量的提高和微积分的教学改革起到有益的促进作用。

马知恩
2012年4月

前　言

2009年8月，西交利物浦大学和西安交通大学的部分数学教师接受了“高等学校大学数学教学研究与发展中心”的一个课题——深入研究美国大学微积分教材，选编可供广大教师借鉴的特色教学内容和习题，编写《美国微积分教材精粹选编》。本书就是我们完成的项目成果，现不避浅陋，奉献给读者，希望它能对广大从事大学微积分基础课教学的教师和学习微积分的学生起到一定的参考作用，为我国的微积分教学改革提供一些它山之石。

本书按照微积分课程内容编排，分为一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学、级数与微分方程以及微积分 Projects 精选五部分。前四部分的内容均由两方面的材料组成。第一方面的材料置于标题“概念、原理的理解、表述和背景”下，共有45条，包括美国教材中有特色的教学内容和对传统内容的有特色的处理方式，比如对一些基本概念的引入、定义和表述方式，对一些基本定理和结论的分析和证明方法，一些有特色的习题的处理方式，与此相关的有较大教学参考价值或不常见的背景材料和数学史料等。第二方面的材料置于标题“例题、习题精选及题解”下，共选编了220余道题，包括各种有利于实现教学目标、提高学生能力而又是国内教材中较少见到的例题和习题，题型有概念题、证明题、计算题、应用题、与图形结合的题、趣味题等。这些题目的难度差异很大，除了少数题目简单、答案显然的以外，所有题目都附有解答，有的题目还提供了一题多解。与选编的材料相搭配，我们在相当多的条目和题解后面加了评注，就该段材料的特色和启示、可资借鉴之处、与国内教材中相关内容的比较等，提出我们的看法，以方便读者更有目的性地使用这些材料。第五部分包括17个微积分 Projects。对 Project，我们定位为需要借助计算机解决的应用性小课题，经考虑后觉得还是采用英文原词 Project 比较达意。国内已有很多微积分或建模方面的教材和书籍对这方面内容作了选编和介

绍,为避免重复,我们这次选编了一些较为简单、有趣又易于教学中采用的例子,且都作了参考解答。

本书素材选编自美国十几本微积分教材(见“参考文献”),这些教材都在美国的微积分教学或教学改革中产生了较大影响,有的历史悠久,有的使用面广,有的是传统的权威教材,有的做了大胆的改革尝试。还有少数素材和习题的编写受到了美国某些学校,比如MIT的公开课的启示。

选取素材时,我们主要考虑的是反映美国教材特色,立足国内教学需要,特别注意吸收国内教材中较为缺少的材料。需要指出的是,本书中相当一部分素材并不直接出自某一本特定的美国教材,而是在美国微积分教材某些内容的启发下,结合编者多年积累的教学体会,陆续写成的,是编者的再创作。即使是选编的习题,也有很多经过了适当改编,以更适合我国的教学实际。本书是一本类似文萃摘编类的书籍,而不是一本教材,也不是与某本教材配套的参考书。因此,我们在编写风格上不求系统完整,不求规范严谨,也不求材料之间的均衡,而是想编成这样一本书:让读者在轻松的心情中随手翻阅,也许翻到某处,突觉眼前一亮,会意地点头,产生某种共鸣和应用的冲动。能达到这个效果,我们就很满足了。

为了反映美国教材的特点,有些材料没有完全按照国内教材的编写规范处理。比如有些题目中的单位制保留了英制,有些问题的提法和用词保留有美国的习惯等等。这是读者需要注意的。

参加本书编写的有,西交利物浦大学的郭镜明、韩云瑞、章栋恩、林熙、姚妙新、应明、熊洪允、谢国瑞、魏战线、严力、王映林、刘丽英、朱安昀、刘刚、牛强、费杰,西安交通大学的吴慧卓、刘晋平等。编者在教学之余,花费了大量时间和精力,阅读了多本美国的微积分教材,摘选、改编、评注、整理、打印素材,编写题解,最后终于成书付梓。

高等学校大学数学教学研究与发展中心主任马知恩教授发起本书的编写,并给予全方位的指导和支持,没有他的关心,这项工作不可能完成;高等教育出版社的马丽、于丽娜编辑一直关心支持本书的编写,她们为本书的编辑和出版付出了辛勤的劳动;江苏省教育厅批准了一个与本书相关的教改项目作为对我们的支持;西交利物浦大学的领导对本书的编写也很关心和支持。在此一并表示衷心的感谢。

由于本书没有先例可循,编者的学识有限,对美国教材的研究也

不够深入，因此编写中必定有不妥之处，在内容上难免会有错漏，恳望读者和同行指正。

编　者

2012 年 1 月

目　录

第一部分

一元函数微分学

一、概念、原理的理解、表述和背景

1. 弧度制的起源和弧度的优点

角度制是六十进位的，计算很不方便. 更加重要的是，三角函数值是十进位的实数，角度和三角函数的进位制不同，在实际应用中会造成很多不便，尤其给数形结合带来麻烦. 例如三角函数作图，由于横轴(角度)与纵轴(三角函数的值)的单位不一致，图形会发生扭曲. 而采取弧度制，就解决了这个矛盾.

在弧度制之下，长度等于半径的圆弧所对的圆心角的度数等于 1 弧度. 一个平角的弧度数等于 π，一个周角的弧度数等于 2π，每个角的度数都是用弧度来度量的.

弧度制的基本思想的雏形起源于印度，但是严格的弧度概念是由瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)于 1748 年引入的. 关于弧度一词 "radian" 的来源，有一种说法是这样的：由于弧度 π 等于圆的半个周长和半径之比，所以数学家将"半径"(radius)的前四个字母与"角"(angle)的前两个字母合在一起，构成"弧度"一词 radian.

弧度制在微积分的研究中显示了明显的优越性，由于采用弧度制而产生了基本不等式

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

进而使微积分中的一些公式可以取最简单的形式. 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$，$(\sin x)' = \cos x$，$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$ 等. 而如果 x 取角度制，上述公式就将变为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180},\quad (\sin x)' = \frac{\pi}{180}\cos x,\quad \int \cos x\mathrm{d}x = \frac{180}{\pi}\sin x + C.$$

还有一点值得一说,半径为 a 的圆中,圆心角等于 θ 的扇形面积等于 $\frac{1}{2}a^2\theta$,表达式如此简单,也是因为角度的单位是弧度.

2. 奇异的数 e——它的来源及其为无理数的证明

(1) 数 e 的来源

说到无理数 e 的来源,还要从对数表的制作开始.

早在 16 世纪末,由于天文学和航海事业的蓬勃发展,人们需要进行天文观测来确定星体的位置和船只的方位.这就遇到了大量繁杂的计算课题,需要人们去研究,研究过程中包含了大量复杂的乘法和除法计算,天文学家们为了确定一个星球的位置,常在计算方面花去几个月的时间,因此他们浪费了若干年甚至毕生的宝贵时间.能否用加、减运算来代替乘、除运算,使得计算过程得到简化?这是当时迫切需解决的问题,对数就是在这样的背景下发明的.

约翰·纳皮尔(John Napier,1550—1617)是苏格兰的一位数学家,也是一位天文爱好者,为了简化计算,他多年潜心研究大数字的计算技术,终于发明了对数.他开始时把对数称作"人造数"(artificial numbers),后来他把希腊词 logos(比例)和 arithmos(数)联起来构成一个新词 logarithm,中文译成"对数",一直沿用至今.

利用对数可以将两个数的乘法和除法转化为它们的对数的加法和减法,但是要实现这个转化,离不开对数表的制作,所制作的对数表必须能很方便地由真数查到对数,反过来又能很方便地由对数查到真数.

考察下面以 10 为底的对数表:

表 1.1

真数 N	10	12.589 3	15.848 9	19.952 6	25.118 9	31.622 8	39.810 7
对数 b	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
真数 N	10 000	12 589.3	…	10^{10}	$1.258\,9\times10^{10}$	$1.584\,89\times10^{10}$	…
对数 b	4	4.1	…	10	10.1	10.2	…

从这张对数表可看出,对数 b 的间隔较小,分布均匀且已经比较密集.但是真数 N 的取值间隔过大,以至于许多真数都查不到它们对应的对数.因此这样的对数表应用价值不大.

为了使真数之间的间隔变小，不应当取以10为底的对数，而应当取一个非常接近于1的数为底，这样一来，对于对数 b 比较小的增量，所引起的真数 N 的增量也比较小，从而真数的分布就比较密集了. 下面以1.000 1（$=1+r$）为底数，重新构造与表1.1相似的对数表.

表1.2

真数 N	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005	1.006	1.007
对数 b	10	20	30	40	50	60	70
真数 N	1.008	1.009	1.01	…	1.105	1.116	1.127
对数 b	80	90	100	…	1 000	1 100	1 200
真数 N	…	2.718 15	3	3.32	…	22 015.5	24 330.7
对数 b	…	10 000	11 000	12 000	…	100 000	101 000

从表1.2看出，真数的分布已经得到明显改善，分布比较密集且均匀. 可以设想，如果取一个更为接近于1的数（即1加上一个更小的正数 r，例如 $a=1+r=1.000\ 001$）为底，这种改善会更加明显.

但是又出现了一个新的问题：在对数表1.2中，对数 b 之间的间隔太大，这无疑也会影响对数表的应用价值.

注意在上文我们已经将底数 a 表示成 $a=1+r$，其中 r 是一个小的正数. 例如在表1.2中的底数为 $a=1+r=1.000\ 1(r=0.000\ 1)$，真数是 $N=(1+r)^b$.

现在将表1.2中的底数改成 $a_r=(1+r)^{\frac{1}{r}}$（而不再是 $a=1+r=1.000\ 1$），注意到 $a^b=(1+r)^b=[(1+r)^{\frac{1}{r}}]^{rb}=(a_r)^{rb}$，因此如果在表1.2中，将真数看成底数 a_r 的 b 次幂，不改动表中的真数，只将底数变成 $a=(1+r)^{\frac{1}{r}}=(1+0.000\ 1)^{\frac{1}{0.000\ 1}}$，那么表1.2中的各个对数值就变成了原来的 r 倍（即0.000 1倍），从而表中的对数值的分布就变得密集了. 这样一来，对数表1.2就变成下面的表1.3：

表1.3

真数 N	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005	1.006	1.007
对数 b	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007
真数 N	1.008	1.009	1.01	…	1.105	1.116	1.127
对数 b	0.008	0.009	0.01	…	0.1	0.11	0.12

续表

真数 N	…	2.718 15	3	3.32	…	22 015.5	24 330.7
对数 b	…	1	1.1	1.2	…	10	10.1

总结表 1.2 和表 1.3 可以看出这样的事实:对数表 1.1 中,如果将底数改成一个很接近 1 的数 $a=1.000\,1=1+r(r=0.000\,1)$,那么表中的真数分布变得均匀和密集了;如果进一步将底数由 $a=1+r=1+0.000\,1$ 改为$(1+r)^{\frac{1}{r}}=(1+0.000\,1)^{10\,000}$,那么表 1.2 中的对数分布也变得更加均匀和密集了.于是表 1.3 的实用价值就大得多了.

不难想象,如果我们进一步缩小正数 r(例如 $r=10^{-8}$),那么以正数$(1+r)^{\frac{1}{r}}=\left(1+\dfrac{1}{100\,000\,000}\right)^{100\,000\,000}$ 为底构造对数表将更加有实用价值(真数和对数的分布都会更加密集和均匀).

考察数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n=1,2,\cdots)$.正整数 n 越大,以 a_n 为底的对数就越有实用价值.因此可以设想,如果这个数列收敛,那么以这个极限值为底的对数自然就会有最高的实用价值.17 世纪,大数学家欧拉研究了这个数列,确定了它的收敛性,指出这个数列的极限是一个无理数,并用自己名字的第一个字母 e 表示这个极限值.从那个时代开始,这个奇妙的数 e 就出现在数学的地平线上,并且成为微积分中的一颗耀眼明星.由于以数 e 为底的对数具有最好的计算性质,所以被称为自然对数.

数 e 在微积分中有重要位置,以数 e 为底的指数函数 e^x 具有奇妙的性质.

对初等函数进行微分(即求导数),微来微去,有些函数消失了(例如多项式),多数函数则被"微"得面目全非,只有函数 e^x 岿然不动.反过来,在函数王国中,求原函数运算可以普度众生,使那些消逝的函数死而复生,使仍然存在的函数加官晋爵.例如,不定积分可以使低次多项式升级为高次多项式,可以将初等函数超度为所谓"超越函数",唯独函数 e^x 丝毫不变.

(2) 证明 e 是无理数

证明 1 由 e^x 的泰勒展开式可以得到

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}. \tag{1}$$

反证.假设 e 是有理数,则存在正整数 p,q,使得 $e=\dfrac{p}{q}$.由于 e 不是整