21世纪大学数学丛书

第二版

高等数学

下册

田立新 主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

江苏省高等学校精品教材

21世纪大学数学丛书

高等数学

（第二版）

下 册

主 编 田立新

编 者 （按姓氏笔画为序）

丁丹平 王学弟 卢殿臣

田立新 冯志刚 孙 梅

李医民 姚洪兴 蔡国梁

江苏大学出版社

JIANGSU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/田立新主编. —2 版. —镇江：江苏大学出版社，2011. 9
ISBN 978-7-81130-263-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①田… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 179132 号

内容提要

本书是根据教育部提出的“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程教学改革计划”的精神，参照近年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见，结合多年高等数学课程改革实践编写而成的. 全书强化数学思想方法的阐述，以培养学生运用所学知识解决实际问题的能力为出发点，具有注重理论性与应用性相结合的特点.

本书分为上、下两册. 下册包括常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分等 5 章. 每章附有小结，配有习题、自我检测题及复习题. 书末附有习题参考答案.

本书可作为高等院校各专业高等数学课程的教材，也可作为各专业的教学参考书.

高等数学　下册

主　　编/田立新
责任编辑/吴昌兴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84443089
传　　真/0511-84446464
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/丹阳市兴华印刷厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/787 mm×960 mm　1/16
印　　张/18.75
字　　数/400 千字
版　　次/2011 年 9 月第 2 版　2011 年 9 月第 5 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-263-9
定　　价/26.00 元

目 录

9 常微分方程

在对自然和社会的长期观察与探索中,人们发现许多自然现象与社会现象都呈现出某些量的规律性.利用各种方法和工具,这些量的规律大多可以被表示成数学关系式,如力和运动之间的关系 $F=ma$.表示量和量之间规律的关系式连同一些适当的条件,被称为数理模型或数学方法模型.显然,数学模型是用数学方法解决实际问题的关键之一.由于微积分的背景和知识体系的特点,大量数学模型中的数学关系式多是利用微积分方法建立起来的,这与代数关系式相比较有着本质的差异.本章主要讨论关于微分方程的基本内容.

9.1 微分方程的基本概念

1) **微分方程引例**

下面通过分析两个具体例子来说明微分方程的基本概念.

例 1 设曲线过点(1,2)且曲线上任意一点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方,求该曲线的方程.

解 设所求的曲线为 $y=f(x)$,则由导数的几何意义知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2. \tag{1}$$

由不定积分知

$$y=\frac{1}{3}x^3+C. \tag{2}$$

由条件知

$$y|_{x=1}=2. \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)得,$C=\frac{5}{3}$,所以可得所求曲线的方程为

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}. \tag{4}$$

例 2 求一离地面 5 m 处的质量为 m 的物体由静止状态自由落下(且忽略空

气的阻力)，求物体的运动方程.

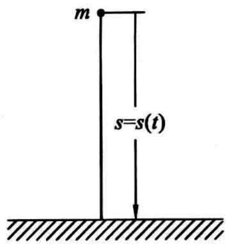

图 9-1

解　设物体下落的运动方程为 $s=s(t)$(见图 9-1)，则由牛顿第二定律知

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g, \tag{5}$$

且由题设条件有

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0,\\ s|_{t=0}=5.\end{cases} \tag{6}$$

由不定积分知

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1,$$

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{7}$$

再将式(6)代入式(7)得

$$C_1=0, C_2=5.$$

所以物体的运动方程为

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+5. \tag{8}$$

2) **基本概念**

定义 1　由未知函数的导数(或微分)，未知函数及自变量组成的方程称为微分方程.未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程；未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程.

本章只讨论常微分方程的相关问题.微分方程的一般形式可表示为：$F(x,y,y',y'',\cdots)=0$

如例 1 中的式(1)和例 2 中的式(5)均是常微分方程.

定义 2　微分方程中出现的未知函数的最高阶导数(或微分)的阶数，称为微分方程的阶(数).

通常将二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程.各阶微分方程通常有如下表示形式：一阶微分方程常见形式为：$y'=f(x,y)$ 或 $F(x,y,y')=0$；二阶微分方程常见形式为：$y''=f(x,y,y')$ 或 $F(x,y,y',y'')=0$……n 阶微分方程一般有形式为 $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})$ 或 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$.

需要注意的是，一个 n 阶微分方程除未知函数的 n 阶导数必须出现外，其余较低阶导数、未知函数及自变量都可以不(明显)出现.

上述例子中的式(1)是一阶微分方程，而式(5)则是二阶微分方程.

定义 3 若函数 $y=\varphi(x)$ 满足微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$，即
$$F[x,\varphi(x),\varphi(x)',\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,$$
则称函数 $y=\varphi(x)$ 是微分方程的解.

例如，式(4)是方程(1)的解，式(8)是方程(5)的解.

微分方程的解是自变量和因变量构成的关系式或者是两个变量的方程形式.由解析几何可知，平面中的一个二元方程代表一条曲线，因此又将微分方程解称为解曲线或积分曲线.如 $3y-x^3=C$ 是方程 $y'=x^2$ 的解(曲线)，$y+\sin x=C_1x+C_2$ 是方程 $y''=\sin x$ 的解曲线，等等.显然，前面的例子中，微分方程的解曲线并不唯一，我们取不同的常数 C 和 C_1，C_2 便可得到不同的曲线.解中常数的取值和相互关系对解有重要的影响.如果微分方程解含有的两个任意常数 C_1，C_2 中的任意一个不能由另一个表示，则称这两个任意常数为(相互)独立的.由此我们有通解和特解的概念.

定义 4 含有相互独立的任意常数且任意常数的个数等于方程的阶数的解，称为微分方程的通解.

例如，式(7)是方程(5)的通解.

若要判断某个解是否是通解，则需要确定微分方程的阶数和解中独立的任意常数的个数.一阶微分方程的通解形式有：$y=g(x,C)$ 或 $G(x,y,C)=0$；二阶微分方程的通解形式有：$y=g(x,C_1,C_2)$ 或 $G(x,y,C_1,C_2)=0$……n 阶微分方程的通解形式有：$y=g(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 或 $G(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$.

定义 5 通解中的独立常数取特定值而形成的微分方程的一个解称为特解，即方程的不含任意常数的解称为微分方程的特解.

显然，特解是指通解中一个特定的解而非任意的解，因此，求特解首先要求解原微分方程的通解.例如，式(4)是方程(1)的一个特解，式(8)则是方程(5)的一个特解.

定义 6 确定通解中任意独立常数并使之成为所求问题的特解的条件称为初始条件.

例如，式(3)和式(6)分别是对应方程的初始条件.

根据方程的阶数和通解形式，一阶微分方程的初始条件形式为 $y|_{x=x_0}=y_0$；

二阶微分方程的初始条件形式为 $y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1$……$n$ 阶微分方程的初始条件形式为 $y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}$.

下面通过一个具体问题从几何角度来理解微分方程通解和特解的概念.

例 3 求一曲线,使在曲线上任一点(x,y)处的切线斜率等于该点的横坐标且过点(2,3).

分析 曲线上任一点(x,y)处切线的斜率为$\frac{dy}{dx}$,按题意应有

$$\frac{dy}{dx}=x. \tag{9}$$

由初始条件有 $y|_{x=2}=3$,

所以方程(9)的通解是 $y=\frac{1}{2}x^2+C$,符合题意的特解是 $y=\frac{1}{2}x^2+1$.

显然,上述通解在几何上表示由相互平行的抛物线组成的一族曲线,而特解则是代表了一条抛物线. 由于曲线族是由积分得到的,故称通解曲线族为积分曲线族,称特解曲线为一条积分曲线.

与通常利用数学模型解决实际问题一样,利用微分方程解决实际问题可以分为三个基本步骤,即建立数学模型(微分方程),求解微分方程模型,对解进行检验和解释. 本章主要讨论如何求解微分方程,而建立微分方程模型的问题先通过以下例子进行分析(具体解法后叙).

例 4 一潜水艇在下降时,所受的阻力与下降的速度成正比,若潜水艇由静止状态开始运动,求它的运动规律.

分析 潜水艇主要依靠它的重力 G 克服阻力而做下降运动. 设潜水艇下降的位移 s 和时间的关系为 $s=s(t)$,在时刻 t 下降的速度是 $v(t)$,阻力为 kv(k 是比例常数),于是根据牛顿第二运动定律,其运动方程为

$$\frac{G}{g}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=G-k\frac{ds}{dt},\text{且}\begin{cases}s|_{t=0}=0,\\ \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0.\end{cases} \tag{10}$$

例 5 列车在平直轨道上以 20 m/s 的速度行驶. 当列车要进站时,列车的制动系统使其获得的加速度为$-0.4\ m/s^2$. 问列车离站台多远处就应该开始制动?

分析 设列车制动后的运动规律(即制动后 t s时行驶的位置函数)为 $s=s(t)$,则根据题意,反映制动阶段列车运动规律的函数应满足关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4,\quad \text{且}\begin{cases}s|_{t=0}=0,\\ \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20.\end{cases} \tag{11}$$

例 6 设桶中盛水,该桶横截面为 1 m^2,在距水面 1 m 的地方,水从一个直径为 2 cm 的小圆孔流出,若不计摩擦等因素,问多少时间后孔以上的水全部流完?

分析 要知道多少时间水流完，必须知道水流的规律．由流体力学知，水从孔中流出的速度等于自由落体下落距离 h 所得到的速度，即 $\sqrt{2gh}$，但实际速度要小一些，约为

$$v=0.6\sqrt{2gh}=26.57\sqrt{h}\ \mathrm{cm/s}.$$

故在 $\mathrm{d}t$ 时间内流出的水量是 $v\mathrm{d}t$ 乘以圆孔的面积（$\pi\cdot 1^2=\pi$），即 $\pi v\mathrm{d}t$.

又设在 $\mathrm{d}t$ 时间内水面下降 $\mathrm{d}h$ 高度，于是有

$$-10\ 000\mathrm{d}h=\pi v\mathrm{d}t=\pi 26.57\sqrt{h}\mathrm{d}t. \tag{12}$$

如果从中解出了高度 h 与时间 t 之间的函数关系，就能解决所要求的问题了．

习题 9-1

1．指出下列微分方程的阶数：

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=3x$； (2) $y''+2(y')^2y+2x=1$；

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$； (4) $y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}y$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+t\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^3+2x=0$.

2．判断下表中左列函数是否为右列对应微分方程的解．

函　数	微分方程	答
$y=\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{1}{3}$	$y'+3y=1$	
$y=5\cos 3x+\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{8}$	$y''-9y=x+\dfrac{1}{2}$	
$y^2(1+x^2)=C$	$xy\,\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$	
$y=x+\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$	$y''+2xy'=x$	
$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$	$y''-5y'+6y=0$	

3．已知一曲线在点 (x,y) 处的切线斜率等于该点的横坐标的 6 倍，而且经过点 $(1,4)$，求该曲线的方程．

4．有一质量为 m 的质点做直线运动，假定有一个和时间成正比的拉力作用在它上面，同时质点又受到与速度成正比的阻力，试建立速度随时间变化的微分方程．

5．曲线上任一点的切线与横轴的交点的横坐标等于切点横坐标的一半，试建立曲线所满足的微分方程．

9.2 一阶微分方程

从 9.1 的讨论中可以看到,微分方程的通解与阶数有很大关系.事实上,不同阶数的微分方程在求解方法和技巧上也有很多的不同.作为微分方程的基本内容,本节主要探讨一阶微分方程的求解问题.由导数和微分的关系,一阶微分方程通常表示成如下一般形式:$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.从数学的角度而言,该形式中变量 x,y 的地位是一样的.也就是说,在数学上处理一阶微分方程时,既可将 x 当作自变量,y 为因变量,也可反过来将 y 当作自变量,x 为因变量,具体解法应以解题便利为准.

9.2.1 可分离变量的微分方程

若一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1}$$

中 $f(x,y)$ 可以分解成 x 的函数 $f_1(x)$ 和 y 的函数 $f_2(y)$ 的乘积,即

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y),$$

其中 $f_1(x),f_2(y)$ 分别是 x,y 的连续函数,则称方程(1)是可分离变量的微分方程.

若 $f_2(y)=0$,则方程(1)为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,即 $y=C$,其中 C 是任意常数,该解就是微分方程的解.通常这种常数解并非所需的解,故将这种常数解称为平凡解.不妨设 $f_2(y)\neq 0$,则方程(1)可以变形成

$$\frac{1}{f_2(y)}\mathrm{d}y=f_1(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

式(2)等号左边只与 y 有关,等号右边只与 x 有关,称此为变量分离(形式).显然式(2)是一个微分等式,根据微积分相关理论(一阶微分形式不变性等)可以得出式(2)两端所对应的函数应该相等或至多相差一个常数,因此对式(2)两端积分,得

$$\int\frac{1}{f_2(y)}\mathrm{d}y=\int f_1(x)\mathrm{d}x+C. \tag{3}$$

事实上,不妨设式(3)左端的原函数为 $F(y)$,则

$$\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f_2(y)}f_1(x)f_2(y)=f_1(x).$$

因此 $F(y)$ 也是 $f_1(x)$ 的一个原函数,由不定积分知式(3)成立.不妨再设式(3)右端的积分为 $G(x)$,则有 $F(y)=G(x)+C$,此式便是可分离变量方程(1)的通解.如果 $F(y)$ 或 $G(x)$ 不能具体求出,这时微分方程的解通常由隐函数的形式给出.

例 1 求解 **9.1** 例 4 的运动方程

$$\begin{cases}\dfrac{G}{g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=G-k\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\\ s|_{t=0}=0,\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 因为$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$,所以问题先简化成

$$\begin{cases}\dfrac{G}{g}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=G-kv,\\ s|_{t=0}=0,\\ v|_{t=0}=0.\end{cases}$$

这是一个可分离变量的微分方程.分离变量后成为

$$\frac{G}{g(G-kv)}\mathrm{d}v=\mathrm{d}t,$$

两端积分

$$\int\frac{G\mathrm{d}v}{g(G-kv)}=\int\mathrm{d}t,$$

即

$$\frac{-G}{kg}\ln\frac{G-kv}{G}=t+C.$$

又因为 $v|_{t=0}=0$,可推出 $C=0$. 所以有

$$G-kv=G\mathrm{e}^{-kgt/G},\ v=\frac{G}{k}(1-\mathrm{e}^{-kgt/G}).$$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{G}{k}(1-\mathrm{e}^{-kgt/G}),$$

两端积分

$$\int\mathrm{d}s=\int\frac{G}{k}(1-\mathrm{e}^{-kgt/G})\mathrm{d}t,$$

且注意到 $s|_{t=0}=0$ 的条件,即得潜水艇下降的运动规律为

$$s(t)=\frac{G}{k}\left(t+\frac{G}{kg}\mathrm{e}^{-kgt/G}-\frac{W}{kg}\right).$$

例 2 求解 **9.1** 例 5 的运动方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4,\\ s|_{t=0}=0,\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20.\end{cases}$$

解 对方程两端积分得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1; \tag{4}$$

再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2, \tag{5}$$

这里 C_1，C_2 都是任意常数.

把条件“$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$”代入式(4)，得 $C_1=20$；把条件“$s|_{t=0}=0$”代入式(5)，得 $C_2=0$.

把 C_1，C_2 的值代入式(4)和式(5)，得

$$v=-0.4t+20, \tag{6}$$

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{7}$$

在式(6)中令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停稳在站台上所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}=50\ \mathrm{s}.$$

再把 $t=50$ 代入式(7)，得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=-0.2\times50^2+20\times50=500\ \mathrm{m}.$$

例 3 求解

$$\begin{cases} y'=3(x-1)^2(1+y^2), \\ y|_{x=0}=1. \end{cases}$$

分析 这是一个可分离变量的微分方程，分离变量，得

$$\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=3(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

用两种方法求特解.

解法 1 先求通解. 两端积分，得

$$\int\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=3\int(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

即
$$\arctan y=(x-1)^3+C.$$

以 $y|_{x=0}=1$ 代入，得 $\arctan 1=(0-1)^3+C$，得

$$C=\frac{\pi}{4}+1,$$

于是特解为

$$\arctan y=(x-1)^3+\frac{\pi}{4}+1.$$

解法 2 将特解直接写成积分上限函数的定积分等式(注意到 $y|_{x=0}=1$)，得

$$\int_1^y\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=3\int_0^x(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

将积分算出，得

$$\arctan y\Big|_1^y=(x-1)^3\Big|_0^x,$$

即

$$\arctan y=(x-1)^3+\frac{\pi}{4}+1.$$

9.2.2 可化为可分离变量的微分方程

常见的可化为可分离变量的微分方程有以下三种.

1) $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ **型微分方程** (8)

这种类型的方程又称为齐次型方程，如 $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$. 求解这种方程的困难是：在等式右端，$x,y$ 总以 $\dfrac{y}{x}$ 的形式出现，无法分离. 既然这样，可将 $\dfrac{y}{x}$ 设成一个新的变量.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，u 是新的未知函数 $u=u(x)$. 因为 $y=ux$，所以 $y'=xu'+u$，代入方程，得 $xu'+u=f(u)$，这就成了可分离变量的方程

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u.$$

将它分离变量，得

$$\frac{1}{f(u)-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分，求出通解，再以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，即得原方程的通解.

例 4 求微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解.

解 这是齐次型方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$ 并代入方程，得

$$xu'+u=u+\tan u,\quad 即\ x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u,$$

分离变量，方程化为

$$\cot u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分，得这个方程的通解为

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C_1|,$$

即

$$\sin u=Cx.$$

再以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，即得原方程的通解