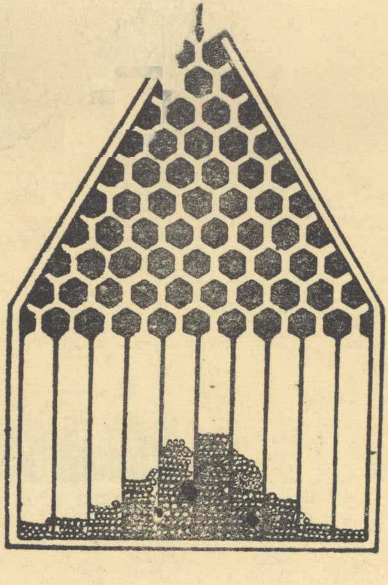
离散型概率

彭仕章 编



汉中师范学院

高等学校及中等学校
理科参考书

离散型概率

彭仕章 编

前 言

概率论与数理统计在自然科学，技术科学，经济管理及社会科学等方面都有广泛的应用，它不仅是数学系的必修课，而且有关各类学校的非数学系也都先后纷纷增开了这门课。与其它数学课程比较，这门课具有许多不同的特点而为初学者感到很困难，特别是对原来未学过而现在进行自修的广大科技人员及中等学校的数学教师更是如此。编者意为上述人员提供一本合适的参考读物而编写了这本小册子。

为了使得初学者及自学者对概率论一般的概念与方法较快获得集中和详细的瞭解和掌握，因而只写了离散型概率，但作为离散型概率分布极限的正态分布（连续型分布）当然必须介绍，不过完全避开了讨论连续型概率所使用的积分工具。正态分布是列在第五章，但可与第四章进行次序交换。

为了便于读者进一步熟悉连续的情况，将连续型随机变量作为附录而列入，只要熟悉了离散型概率，通过将求和号换之以积分号，便可平行得到连续型相应的结果。

本书由于是仅写离散型概率，所以几乎不需用微积分知识而可阅读。同时，将集合简要及充足的排列组合公式列入了附录，以供读者及时查阅之方便。並建议读者最好先看看。

所选150多道习题主要是按书文的节段次序排列的，同时兼顾到由易到难。习题附有答案。

编写时参考了许多概率论书籍及一些习题集，谨在此一

并致感，恕未一一列出。

付印前，曾请杨卜安付教授及刘荣均付教授审阅，特表感谢。

编写过程中，得到我院教务处、数学系的领导及其他同志们的关心及大力支持，谨表谢意。最后还要谢谢我系的李伟同志为本书的付印作了很多工作。

限于编者水平，书中的缺点和错误一定不少，恳切希望同志们给予批评指正，并予表感谢。

彭仕章

一九八二年十二月

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1　引　言

在生产实践、科学实验和日常生活中迂到的现象可分为两类，一类是必然性的，一类是偶然性的，必然性的例如：在标准大气压下，纯水加热到100℃时必然会沸腾；在温度不变的情况下，一定质量的气体所占的体积与它所受的压强成反比，等等。初等数学及微积分就是研究这种必然性规律的数学工具。偶然性的例如：掷一颗均匀的骰子，向上面的点数是6；远距离射击较小的目标，目标被击中，等等。这后一类现象虽属偶然，但在大量观察或反复试验时，它们却呈现出某种几乎必然的规律性。例如掷骰子试验，当掷600次时，出现点数6的次数将接近于100，这种偶然现象中所蕴藏的必然性规律，便是概率论研究的对象。

§2　随机事件及事件间的关系

2·1　随机事件

我们常说的"试验"即指的是"一定的综合条件的实现"，如向桌上掷一颗骰子，向目标打出一发子弹，向地上播下一粒种籽，抽出一个产品检验，等等。而"现象"则指的是试验的结果。如掷骰子出现1至6中某点，射击子弹击中或

击不中目标，播种籽发芽或不发芽，抽出产品检验为合格或不合格，等等。在概率论里，把试验时发生的某种现象称之为**事件**。试验时一定会发生的事件称为**必然事件**。试验时一定不会发生的事件称为**不可能事件**。例如，纯水温度低于0℃时结冰为必然事件。掷一颗骰子，出现7点是不可能事件。概率论所研究的事件不是必然事件，也不是不可能事件，而是**偶然事件**，它是在试验时可能发生也可能不发生，但在大量重复试验时，它的发生或不发生将呈现出一定的规律来的事件。在概率论里，把偶然事件称为**随机事件**。例如：骰子出现6点，目标被击中，种子发了芽，产品不合格，等等，都是随机事件。今后我们用U表示必然事件，用V表示不可能事件，而用A，B，C・・・表示随机事件。

2・2 事件间的关系

在一过程中会出现各种各样的事件，而一些事件之间是存在着某些关系。我们需要研究这些关系。事件间的几种主要关系如下：

1.事件的包含与相等

如果A发生则B发生，则称B包含A，并记作$A \subset B$或$B \supset A$。同时称A是有利于B的。

例如，检验一个长方体零件，零件不合格这事件包含零件的长度不合格这事件，后者是有利于前者。又例如抽检一产品，产品是合格的事件包含产品是优等品的事件，后者是有利于前者。

显然有：$A \subset U$。

如果$A \subset B$同时$B \subset A$，则称A与B相等，记作$A = B$。

例如：进行三次射击，命中及至少有一次命中这二事件是相等的。

2.事件的和与积

A与B至少有一个发生的事件称为A与B的和，记为$A+B$。

例如，射击两发子弹，有一发击中目标这事件为第一发击中与第二发击中这二事件的和。

此和的定义可扩充到任意n个事件及无穷可列个事 件。

A与B同时发生的事件称为A与B的积，记为$A\cdot B$。(符号·常略去不写)

例如，在一付扑克牌中抽出一张牌，抽到梅花K的 事件是抽到梅花与抽到K这二事件的积。

此积的定义可扩充到任意n个事件。

3.事件的对立与差

二事件必然而且仅仅发生一件时，称此二事件互为对立事件，记 为A与$\overline{A}$。

例如，种下一粒种籽，种籽发芽与不发芽，是互为对立事件。

显然 有：$A+\overline{A}=U$，　　$A\cdot\overline{A}=V$。

A发生而B不发生的事件称为A与B的差，记为$A-B$。

例如，生产一批零件，尺寸要求在9.9厘 米至10厘米为合格，零件合格的事件是零件尺寸小于或等于10厘米的事件与零件尺寸小于9.9厘米的事件的差。

显然有：$A-B=A\cdot\overline{B}$。

4.事件的互斥与独立

如果A与B不能同时发生，称A与B互斥。

例如，投掷两枚分币，两枚都是徽花向上与两枚都是分值向上这二事件是互斥的。

显然：A，B互斥即$A \cdot B = V$。

此互斥的定义扩充到任意n个事件时是：如果n个事件中任何两个事件是互斥的，则称这n个事件是互斥的。且称n个事件的全体为互斥群。

例如，掷一个骰子，掷出点数1至6这六个事件便构成互斥群。

如果A与B中一个发生与另一个发生毫无关系，或者说，一个发生不影响另一个发生，称A与B是相互独立的。

例如，二人打靶，第一人命中与第二人命中这二事件是相互独立的。又例如，从一付扑克牌中抽出一张牌，放回后再抽出一张牌，则先抽到梅花与后抽到梅花这二事件是相互独立的。

此独立概念扩充到任意n个事件时是：如果n个事件中的任意一个事件与其它任意几个事件是相互独立的，则称这n个事件是相互独立的。且称这n个事件全体为独立群。

例如，n个人打靶，每人命中这n个事件构成独立群。因为任何一个人命中与其他任意几个人同时命中没有关系。

5.事件的等可能性与完备性

如果A与B发生的可能性完全相等，称A与B是等可能的。

例如，掷一枚分币，掷出徽花与掷出分值是等可能性的。

此等可能性概念可以扩充到任意n个事件。

例如，掷一颗均匀的骰子，掷出1至6点这六个事件是等

可能性的，

如果$A+B=U$，称A与B的总体是完备的。且称A与B是完备群。

例如，A与$\overline{A}$是完备群，又如，掷一颗骰子，掷出的点数小于或等于4与大于4这二事件是完备群。

此完备群的定义可以扩充到任意n个事件。

例如，某产品，在正品中分出优等；在次品中又分出废品，那么抽检一个产品时优等品，正品，次品及废品这四个事件是完备群。

6. 基本事件及基本事件组

n个事件构成等可能性的互斥完备群，称这n个事件中的每个事件为基本事件。而称这n个事件的全体为基本事件组。

例如，掷一颗均匀的骰子，掷出的点数为1至6这六个事件构成一基本事件组，而这六个事件中的每一个事件则是基本事件。

2.3 事件间关系的几何示意

为了形象地理解事件的关系，我们用平面上的二园形表示随机事件A与B，对必然事件U用正方形表示，那么：（参看附录Ⅱ的三与六）

$A\subset B$，用A园在B园内表示；

$A=B$，用A园与B园重合表示；

$A+B$，用A园与B园所总共包围的图形表示；（如A，B有公共部分，公共部分只算在一个园内）

$A\cdot B$，用A园与B园的公共部分图形表示；

$\overline{A}$，用置A园于正方形内后，在A园外而在正方形内的图形表示；

$A-B$，用在A园内而在B园外的图形表示；

A，B互斥，用A园与B园没有公共部分表示；

A，B等可能，用A园与B园的面积相等表示。

用这种事件间的几何意义可以验证下列一些相等关系：

$A+B=B+A$，　$A\cdot B=B\cdot A$；

$(A+B)+C=A+(B+C)$，

$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$；

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$，

$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$。

§3　频率的稳定性及事件的概率

3.1　频率的稳定性

当某试验重复实现n次而某事件A发生的频数为m，则称$\frac{m}{n}$为事件A发生的**频率**，记作W（A），

显然：$0\leqslant W(A)\leqslant 1$。

大量实践的经验表明，当试验重复很多次时，事计A发生的频率总在某一个确定数的附近作微小摆动，并且试验次数越多，摆动越明显，例如，当投掷硬币很多次时，徽花向上的事件发生的频率便在0.5这个数附近作微小摆动。历史上是有人实地作过这种试验的。投掷次数越多，徽花向上的频率越明显地呈现出在0.5这个数附近作徽小摆动。这种现象，称为**频率的稳定性**。又例如，对某厂，在客观生产条件不

变的情况下，对每天生产的产品进行检验，那么，得到的产品合格率，即产品合格这事件发生的频率，是呈现出一定的稳定性的，即在某确定数附近作微小摆动。

3.2 事件的概率

由于事件发生的频率具稳定性，所以就可以按频率所稳定值的大小来估计事件发生可能性的大小，或者，比较在同一试验中不同事件发生的可能性大小。例如，某厂产品合格率是稳定于0.99。那么，当生产出产品10000件时，合格品件数大约是9900，而掷硬币时，出现徽花与分值的可能性是相等的。显然，我们是用频率所稳定的那个数作为衡量事件发生可能性大小的尺度的，我们称这个数为事件发生的概率。就是说：在不变的条件下，不论做多少回n次试验，事件A发生的频率$\frac{m}{n}$如是稳定于确定的正实数p，则称数p为事件A发生的**概率**，记作P（A）=p。

显然：$O\leqslant P(A)\leqslant 1$且$P(U)=1$，$P(V)=O$。

§4 古典概型及概率加法定理

4.1 古典概型

上节的概率定义显然是一抽象的概念，而在实际试验时，我们得到的是频率。当我们估计某事件发生的可能性大小时，常是用频率去代替概率，或者更好些，用一些回的n次试验的频率平均值去代替概率，这种代替值是概率的近似值，但对

某些特殊情况，并不需要作试验，而是通过对试验可能出现结果的分析，就可以直接计算出某事件的概率。这类情况，就是情况本身具有“均匀性”及某种“对称性”，从而使我们可以用这种特性来分析得出事件的概率。例如投硬币试验，掷骰子试验等，就属于这种情况。对硬币和骰子是认为质地均匀，形式对称的，这样，我们就可推测出当大量投掷时，硬币的徽花向上发生的频率一定是稳定于$\frac{1}{2}$的，而骰子的合数点面向上的发生频率则是稳定于$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$的。即前者的概率是$\frac{1}{2}$，后者的概率是$\frac{1}{3}$。从这两个例子我们看到，这种类型，对称、均匀等性质所反映的特点是在试验结果中可能发生的事件构成等可能互斥完备群，即基本事件组。例如投硬币的试验是徽花向上与向下的两个基本事件构成的基本事件组，掷骰子则是由出现1至6点这六个基本事件构成的基本事件组。我们要计算的是试验结果可能出现的事件的概率。一般的，当试验的一切可能结果是有限的n个基本事件所构成的基本事件组时来计算试验中某事件发生的概率类型，称为**古典概型**。

古典概型有着多方面的应用，最突出的应用即对产品的抽样检查，产品抽样技术在各个生产部门中被广泛应用。许多大工厂产量很高，每天的产品数以万计，对这些产品的质量如要进行全面的逐件检验，经常是不可能的，或者是不经济的；另外，在有些情况下，对产品的检验方法带有对产品的破坏性(如产品寿命检验)，这样最适宜的检验方法是采用抽样检查，即从产品中任意抽出若干件来检验，根据检验结果来判断

整批产品的质量。因为同一产品从外形上看不出差异，而我们又是任意抽样，因此，任何一件产品被抽到的可能性是一样的，于是抽到每一产品便构成一个等可能互斥完备群。而要知道抽到具有某种性质要求的（如合格品，次品或一级品）产品的概率，即属古典概型。

4．2 古典概型的概率计算

上面对古典概型的引进说明中已例举了投硬币时，徽花向上的频率，按硬币均匀对称的性质应稳定于$\frac{1}{2}$；而掷均匀且对称的骰子时，合数点面向上频率应稳定于$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，对这二例的分析结果是曾由大量实践所验明，即实践结果与我们直接的分析结果是一致的。对投硬币，我们推测到徽花向上的频率稳定于$\frac{1}{2}$，是因为硬币具有均匀对称的两面，即一次投掷可能有的结果是可能性均等的两个结果，而徽花向上则是两个可能结果中的一个，因此多次试验时，徽花面向上的频率稳定于$\frac{1}{2}$，即概率等于$\frac{1}{2}$；而骰子有均匀对称的六面，即一次投掷可能有的结果是可能性均等的六个结果，这时合数点面向上则是指的4点面向上或6点面向上，因为它们是一次投掷的六个等可能结果中的两个，因此多次试验时，4点面向上或6点面向上的频率应稳定于$\frac{2}{6}$，即概率等于$\frac{2}{6}$。一般的，设古典概型中的基本事件个数为n，而事件A所包含的基本事件个数为m，按上面的道理分析及大量实践经验表明，事件

A发生的频率是稳定于$\frac{m}{n}$的，即有公式：

$$P(A)=\frac{m}{n}。$$

法国数学家拉普拉斯在1812年把$P(A)=\frac{m}{n}$作为概率的定义，现在通常称它为概率的古典定义，因为它只适用于古典概型的场合。

例1. 从一付扑克牌（无大小王）中任取5张，求取得同花的概率。

解： 从52张牌抽取5张的所有不同结果构成一个基本事件组，总共基本事件的个数为C_{52}^5，而为同花的事件A所包含的基本事件的数目应是$C_4^1\cdot C_{13}^5$，故得：

$$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_{13}^5}{C_{52}^5}。$$

例2. 一批产品共N个，其中M个是次品（余为正品），现从中任抽n个，求恰有m个次品的概率。（$M<N$，$n<N$ $m\leqslant n$，$m\leqslant M$，$n-m\leqslant N-M$）

解： 从N个产品中抽取n个的不同结果构成一个基本事件组，总共基本事件的个数为C_N^n，而恰有m个次品的事件A，应是包含所有从M个次品中取m个与所有从N—M个正品中取n—m个的配合所可能构成的基本事件，这样的基本事件的数目为$C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$，因此：