理论算术

殷显华 编著

LILUNSUANSHU

南京大学出版社

理论算术

殷显华 编著

南京大学出版社

理 论 算 术

殷显华 编著

*

南京大学出社版出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行 常熟高专印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：8.5 字数：184千

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数：1－4,500

*

ISBN 7-305-00791-9

0·47 定价：3.20元

序

万丈高楼，起自平地。小学教育，如同地基。因此，小学教师的水平，对于整个国民教育至关紧要。

殷显华先生的《理论算术》，正是为小学数学教师大专业余进修编写的一本教材。作为一个以数论为专业的教育工作者，我觉得殷先生的这本书，有两大特点：

一、深入浅出，易教易学。

这本书介绍了不少现代数学的思想方法。例如集合与对应，基数与序数，皮亚诺的公理体系，数系的扩充等等。理论严谨，同时又注意到可接受性，尽量采取与小学算术课程比较接近的方式引入。在介绍公理化方法，搭起基本框架后，立即止步，不沉溺于烦琐枯燥的细节推导之中。这样的处理，可谓恰到好处。

各章均有一定数量的例题与习题，有一些可作为正文的补充或深化，书末附有习题提示或解答。便于教，也便于学员自学。

二、内容丰富，切合实用。

书中有整数的整除理论，同余，不定方程，容斥原理，进位制，……，还有小学数学竞赛试题类型举例和分析。非常适合当前小学教育的需要，不仅能开拓学员眼界，而且为小学高年级课外活动提供了许多素材。

这本书，出版前已经为不少地方的教师进修学院或讲习班用作讲义，效果良好。相信出版后，一定能风行各地。

单 墫

1990年4月28日

前　　言

《理论算术》是一门正在建设中的新课程．例如在江苏省小学教育专业专科进修班教学计划（试行草案）中已将其列为乙组（大理科）必修课．它的内容主要由算术理论和初等数论基本知识两部分组成，是中师有关课程的提高和发展．它要从较高观点上阐述算术中的一些基本理论问题，扩展与算术密切相关的一些数学知识．学习本课程将有利于提高小学数学教师专业素质，有利于小学数学教师在教学中居高临下地科学地处理教材，促进教改．学历合格后的小学数学教师在业务上要进一步进修和提高，学习本课程是合适的．而一般中学数学教师，能掌握本课程内容也十分有益．

《理论算术》共分七章．第一章中讨论的集合和一一对应，不但是现代数学中两个最基本的概念，而且形成集合、实施一一对应包含着人类最初赖以产生数学的二项最基本的心理活动．所以十分自然地在现行小学数学低年级课本中，就有集合和一一对应概念的渗透．在中师数学课程中，已经学过集合和一一对应等方面的知识，但本章并非是简单地重复这些知识，而是更严密地、更系统地、也是更简洁地概括这些知识．例如在本章§1，说明了在初等集合论中，为什么叙述集合概念只能用描述法，为什么不能认为全集是一个包含所有集合的集合．又如在§2中点明了集合运算的代数系统．为了和第二章中自然数基数理论相呼应，§3中

我们重点介绍用一一对应来建立两个集合的对等关系，由此引进集合基数概念．并且我们定义，如果一个集合，它不能与它的任意一个真子集合对等，则称这种集合为有穷集合．反之，如果一个集合，它能与它的某一个真子集合对等，则称这种集合为无穷集合．这样就避免了有些书籍中在叙述自然数基数理论时所产生的逻辑循环错误．

在本书中，第二章算术理论是一个重点．通过学习本章，可以基本了解作为科学的算术其逻辑体系是怎样的，从而有利于理解作为课程的小学数学中有关算术内容的逻辑结构．算术理论的重点是自然数理论和分数理论．在本章§1、§2中，我们着重介绍了与小学数学课程中处理方法比较接近的自然数基数理论．我们给出了非空有穷集合的基数叫做自然数这一严格定义，并借助于集合的运算及性质，讨论了自然数的运算和运算律．关于采用皮亚诺公理系统建立自然数序数理论仅在§6中作了简单介绍．在§3非负整数基数理论中，我们遇到了数系的第一次扩充．在自然数集合中添加了零之后，其加法和乘法定义并不是随意的，实际上，在自然数集合中加法和乘法的运算律，在非负整数集合中仍应当成立．在§7分数理论中，我们重点给出了建立分数理论的逻辑过程．由于有理小数是特殊分数，其理论可由分数理论推演出来，所以在第二章中我们只是着重指出这些逻辑关系，而没有进一步展开有理小数理论．不管是自然数理论，非负整数理论，还是分数理论都比较抽象．如果全部将其展开出来，不但很占篇幅，而且也肯定枯燥无味．为此当我们搭起这些理论的基本框架以后，也就适可而止了．我们的目的仅仅是向读者展现算术逻辑系统．有关运算性质的推导，大多放在习题中去了．

有关数的运算律，应当独立于数的表示方法．为此我们引进了非负整数理论之后，在§4进位制中才研究非负整数的表示方法．在本节中我们阐明了为什么“进位”是计数法的核心，以及为什么“位值”是记数法的核心．为了扩展视野，我们还按十二进制专家所建议的方式，重点介绍了十二进制数，并分析了为什么从科学角度看十二进制比十进制更优越．§5容斥原理，从内容来说有一定独立性．放入这一节是因为一方面它与前面数节内容是连贯的，另一方面更重要的是，它提供了一份小学数学课外兴趣小组活动素材．这节例1即是无锡市十年动乱后第一次小学生数学竞赛试题．关于第一章与第二章中大部分内容，编者在八十年代初期曾分别多次为无锡市中小学教师作过讲座．当时的讲稿，在编写这两章时充分地使用了．

数论是研究数的性质的一门学科，而初等数论与算术有密切联系，是算术的继续．算术中一些很难的理论问题，用初等数论方法就较容易得到解决．因此，初等数论中与中小学数学密切相关的一些内容，也应当是理论算术这门课程的内容．本书第三章到第六章，就是由初等数论课程中挑选出来的一些内容重新组织而成．

第三章讨论了整除性理论，是初等数论的基础．这也是本课程重点之一．本章大部分内容在算术课程中已有所涉及，但都是直观和零星的，这里的叙述，在理论、方法、系统上都达到了一个更高层次．算术基本定理，就在这一章中给出了严格证明．§2中的抽屉原则，内容有一定独立性．在解决数论问题及一些中小学数学竞赛题时，它是常会碰到的一种思考问题的方法．人们常说：数学是自然科学的“皇后”，数论是数学的“皇冠”，哥德巴赫猜想，则是皇冠上

的一颗明珠．在§6中我们描绘了包括哥德巴赫猜想在内的一些“明珠”．这些虽是数论中十分艰难且绝大部分是没有解决的问题，但要了解这些问题的含义却不需要什么深奥知识，例如哥德巴赫猜想，到底猜想什么？向小学生也能够说清楚．放入这一节，扩展了视野，并提供小学高年级以上学生课外兴趣小组活动素材．

第四章内容属于同余理论．同余及同余式解法是初等数论中的重要内容，限于本书性质，对此不作过深讨论．即使如此，大家还是可以从本书中看到这一内容是多么丰富．它不仅扩充了对整数的认识，这些理论在算术教学实践中也有应用．§2就专门讨论了这些应用．§5孙子定理讨论了一次同余式组解法，它反映我国古代数学家的辉煌成就．在我国民间广泛流传着不少“鬼谷算”、“隔墙算”、“剪管术”“物不知数”、“孙子问题”、“神奇妙算”、“韩信点兵”、“秦王暗点兵”等名称各异但内容同属一类的一些问题．社会上，有些老先生就用会不会解这类问题来作为衡量老师水平的尺度．这些问题利用算术来解比较困难，如用孙子定理，一下子就解决了．

第五章是讨论不定方程，它是初等数论中特别有趣味的内容．国内外中小学数学竞赛辅导活动一般都少不掉这个课题．本章讨论得比较详细、深入的是整系数二元一次不定方程解法．我国民间流传不少古算题（如“百钱买百鸡”）就能归结到这种问题．本章还介绍了，从数学史来说，是我国研究得最早的商高方程解法，以及有名的费尔马大定理．

第六章是连分数简介．在进一步研究数的理论时，经常要用到连分数，连分数作为一种特殊繁分数推广，它的初步知识也应当列入这门课程．当然，更加深入介绍不是本书的任务．

近年来，编者曾在数学本科专业讲授初等数论课程，并且在以前也曾多次为无锡市中学数学竞赛集训班，作过数论基础知识讲座，在从第三章到第六章内容中，包含了自己在这些教学工作中的一些体会。

分析国内外小学数学竞赛试题，可以发现以前面各章内容为背景的试题占相当比例。为此特别安排了第七章“小学数学竞赛试题部分类型举例和分析”。分门别类摘选了一百二十九道试题，并逐题作了简明分析。

本书按72课时要求编写，初稿完成于八八年暑假。曾作为无锡教育学院八七级小学教育专业（乙组）教学用书。第三章到第六章也曾数次作为数学专科班选修数论知识讲座的材料。八九年开办的无锡市小学数学骨干教师研讨班也选用它作为教材。在试用中获得良好评价。本书最后附上了前六章习题的提示和解答。这样这本书还可便利地作为中小学教师自学算术理论和数论初步知识的参考材料。

在本书编写过程中，受到南京师范大学数学系刘云章副教授、单墫博士和金嘉德副教授的支持和鼓励。刘云章老师审阅了全部手稿，金嘉德老师提供了他在数论课程教学中所积累的全部笔记供我参考。特别要指出的是，单墫博士在百忙中为本书作了序。另外江苏省教委师范教育处张行处长，无锡教育学院培训处徐国柱处长、张海保副处长和数学系的老师，无锡市教委教研室凌国伟老师，无锡师范傅耀良、王国元老师等也鼓励和关心了本书的编写工作。无锡教育学院沈洪明老师为本书作了插图。在此一并致谢。

由于编者水平有限，本书缺点和错误是难免的，欢迎大家指正。

殷显华　　1990年2月

目　　录

第一章　集合和一一对应

§1. 集合的概念

集合及其元素是数学中最基本的概念，为此不再用其他概念来给它们下定义。在初等集合论中，对它们仅仅作出描述性的说明：所谓一个集合，就是指若干事物的全体，其中每个事物是该集合中的一个元素。以后我们常用大写拉丁字母：A、B、C、…表示集合，用小写拉丁字母a、b、c、…表示集合的元素。

若A为某集合，x是这集合的元素，则记为$x\in A$，读作"x属于A"；若x不是A的元素，则记为$x\overline{\in} A$（或$x\notin A$），读作"x不属于A"。

如果对于任何一个事物能够指出它是属于这个集合或不属于这个集合，那末这个集合就被认为是给定了。给定集合的最简方法是把这个集合的元素一一列举在一个大括号内，例如：$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$就表示阿拉伯数码的集合，这种方法称为列举法。给定集合的另一种方法，是指出这个集合的元素所具有的性质，例如集合$\{2, 3, 5, 7\}$又可表示为：$\{x \mid x$是质数且$x<10\}$，这种方法称为构造法。显然一个集合用构造法来给定，方法也不是唯一的，例如上述集合又可表示为$\{x \mid (x-2)(x-3)(x-5)(x-7)=0\}$及$\{x \mid x$是210的质因数$\}$等形式。并非所有的集合都能用全部列举出其所有元素的方法来给定，例如集合：$\{x \mid x$是全体偶自然

数}，如用列举法来表示，就不能不用省略号：{2，4，6，8，……}；再如集合$\{x|x$是实数且$0<x<1\}$就无法用列举法来表示，可以严格证明其全部元素无法排成一列(证明略)。

注意到分别由$\{x|x^2+x+1<0\}$；$\{x|x$是三个内角之和等于150°的三角形}等给定的集合，有引进空集合概念的必要。当一个集合不含有元素时，它就称为空集合，记为 ϕ。

定义1 如果集合A的每个元素也属于集合B，那末称集合A是集合B的子集合，记作$B\supseteq A$或$A\subseteq B$，读作"B包含A"或"A包含于B"。

显然，任取一集合A，有$A\subseteq A$（称关系"$\subseteq$"具有反射律）；补充定义 $\phi\subseteq A$。

定义2 如果$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则称集合A与集合B是相等的，记为：$A=B$，读作"集合A等于集合B"。（称关系"$\subseteq$"具有反对称律）。反之，也就是说或者集合A中至少有一个元素不属于集合B，或者集合B中至少有一个元素不属于集合A，那么就称集合A与集合B不相等，记作$A\neq B$，读作"集合A不等于集合B"。

由定义1直接可证集合之间的包含关系具有传递律，即如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$同时成立，那末一定有$A\subseteq C$成立。

定义3 如果$A\subseteq B$，且$A\neq B$，则称集合A为集合B的真子集合，记作$A\subset B$或$B\supset A$，读作："A真包含于B"或"B真包含A"。

注意，记号$A\neq\phi$和$A\supset\phi$表示同样的意义，即集合A是非空集合。

又注意，若$A\subset B$，则$A\subseteq B$一定成立；反过来，若$A\subseteq B$，则$A\subset B$不一定成立。同样，若$A=B$，则$A\subseteq B$一定成立；反过来，若$A\subseteq B$，则$A=B$不一定成立。

在集合的研究中，若所谈及的集合都是某一个固定集合的子集合，为了方便地研究问题，则这个固定集合便可取定为全集（也称宇集）．显然，可取定为全集的集合不唯一．不过今后我们研究集合时，总认为这些集合包含于一个给定的全集中，而不管其全集是哪一个．本书用U表示全集．顺便指出著名的英国哲学家罗素（*B. Russell*）发现，承认一个包含所有集合的集合存在，就会导致矛盾（罗素悖论），所以我们不能认为全集是一个包含所有集合的集合．

研究集合时，韦恩图是一种有用的直观形象工具．所谓韦恩图就是用平面上的矩形来表示全集U，矩形内的一些封闭区域表示某些集合．

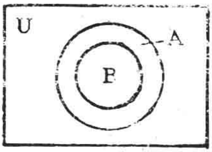

图 1

例如图1表示$A\supset B$．

在本书中，我们会经常碰到一些数集合，我们约定下面几个符号用来表示这些特定集合．N：正整数集合，即自然数集合；Z：非负整数集合；I：整数集合；Q：有理数集合；R：实数集合；C：复数集合．

§2 集合的运算

定义1 设A和B是两个集合，则

（1）A和B的并，记为$A\cup B$，是由A和B中的所有元素构成的集合，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或者}x\in B\}.$$

（2）A和B的交，记为$A\cap B$，是由A和B中的所有公共元素构成的集合，即

$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$。

特殊情况：如果A和B无公共元素，此时$A \cap B = \phi$，称A和B是分离的。

（3）A和B的差，记为$A - B$，是由属于A而不属于B的元素构成的集合，即

$A - B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$。

定义2 一个集合A的补，记为$\overline{A}$，是由属于全集U但不属于A的所有元素构成的集合，即

$\overline{A} = \{x \mid x \in U 且 x \notin A\}$。

显然，$\overline{A} = U - A$。也就 是说，补可以看作是一种导 出运算.但又注意到对任意两个集合A和B，有$A - B = A \cap \overline{B}$。实际上，在集合的运算中，一般是将并、交、补 这 三 种 运算，作为基本运算，而将差作为导出运算 .

上述两个集合之间的各种运算，其结果仍是一个集合。这种作为运算结果的集合，认为都具有存在唯一性。（实际上"运算"的本质特征就是存在唯一性。正因为当给定 A、B时，$A \cup B$、$A \cap B$、$\overline{A}$都是存在唯一的，我们才分别称它们为并运算、交运算、补运算）。

如果在一个集合的运算式子中同时具有多个运算，其运算顺序规定如下：

（1）若含同一种运算，对并、交而言，从左到右 依 次运算；对补而言，从内到外依次运算。

（2）若含多种运算，先作补运算，再作交运 算，最 后作并运算。

（3）若含有括号，先作内层括号中的运算。

根据集合运算定义，有下面的集合运算性质：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）分配律：$A\cap(B\cup C)=A\cap B\cup A\cap C$，$A\cup B\cap C=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

推论：$(A\cup B)\cap C=A\cap C\cup B\cap C$，$A\cap B\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（3）同一律：$A\cup\phi=A$，$A\cap U=A$；

（4）余补律：$A\cup\overline{A}=U$，$A\cap\overline{A}=\phi$；

（5）对合律：$\overline{\overline{A}}=A$；

（6）0—1律：$A\cup U=U$，$A\cap\phi=\phi$；

（7）等幂律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

推论：$A\cup A\cup\cdots\cup A=A$，$A\cap A\cap\cdots\cap A=A$；

（8）吸收律：$A\cup A\cap B=A$，$A\cap(A\cup B)=A$；

（9）结合律：$A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$，$A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$；

（10）德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

推论：$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$，

$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$.

读者可用韦恩图来直观验证这十大运算性质，当然这些验证不能算是严格证明．关于这些性质的严格证明，仅就(2)中第二个等式（并关于交的分配律）给出范例，其余读者可以按这种证明方法一一补出．

要证明一个有关集合的等式，按照集合相等的定义，可以先证明属于等式左端的任意元素x都属于右端，再证明属于右端的任意元素y也都属于左端．

（1）设$x\in A\cup B\cap C$，按运算顺序，或者$x\in A$，或者$x\in$