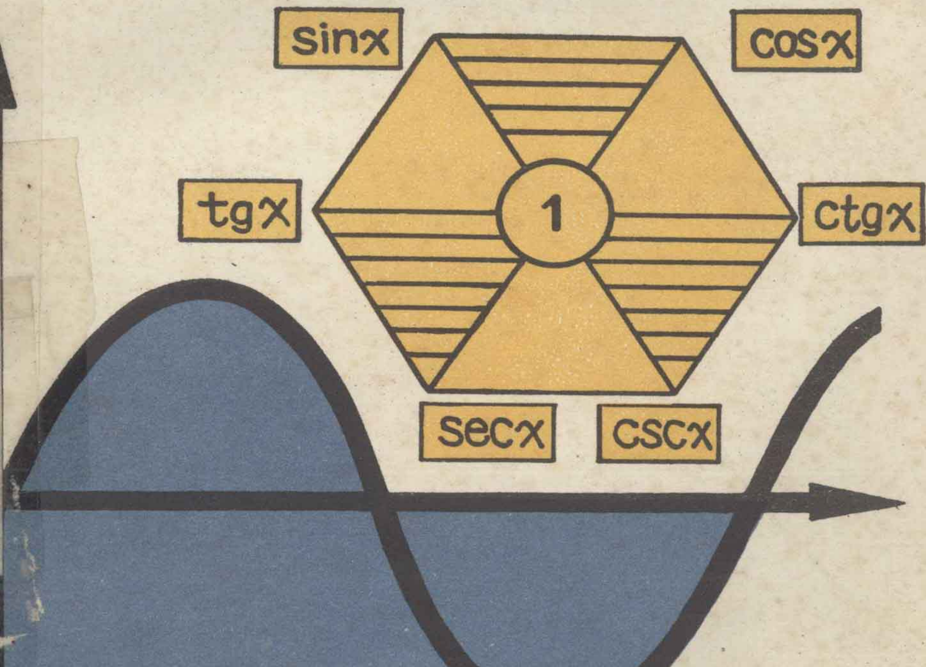
中学理科学习指导丛书

高一代数

辅导与练习



北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

中学理科学习指导丛书

高一代数辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八四年·重庆

编 者

北京大学附属中学　周沛耕
北京医学院附中　刘效兰
北京市十一学校　张怡平
北京市八一中学　李鸿元
北京市海淀区教师进修学校　张士充

责任编辑　夏树人

高一代数辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川省新华书店重庆发行所发行
湖 北 省 新 华 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 6.75　插页 1　字数 154 千
1984 年 7 月第一版　　1984 年 7 月第一次印刷
印数：1—901,100

书号：7114·215　　定价：0.58 元

内 容 提 要

本书是配合高一代数教材为学生编写的课外读物。书中对每一章的知识结构进行了分析；对重点、难点内容进行了详细的讲解；对习题进行了归类；在“启发与体会”中对学生应如何深入体会数学方法作了示范；每章最后都配备了一定数量的习题和自我检查题。

前　　言

长期以来，我们感到学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物;家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料;教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这个问题，我们组织一些有教学经验的教师编写了这套丛书。

通过实践，我们认识到中学数学的学习和练习应做到以下几点：

(1) 只有把知识的结构分析清楚,知识才易于学生理解、记忆和运用，并从而掌握知识的整体;

(2) 打好基础，是学生学好全部知识的前提，在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一;

(3) 引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识、提高解题能力的有效途径;

(4) 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固;

(5) 对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引伸的能力，这不但是可以的，而且是应该的。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几部分：

（1）结构分析：有些章分析比较简单，可以在学习开始时看；有些则分析较深入，可以在学完全章后再看。

（2）重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们掌握全章内容；说明难点之所以难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法、解题技巧，促进哪些能力的增长。

（3）各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律。

（4）习题和自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全、有一定综合性、用以练习和检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题。

（5）启发与体会：着重介绍教师的经验和体会，教科书上一般不讲的思路、观点、方法，以及适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

本书尽量做到体现以上各项中的要求，紧密配合教材，但又不重复教材内容。但是，限于编者水平，未必都能做到，且不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给予批评和指正。

北京市海淀区教师进修学校

1984年1月

目　　录

第一章　幂函数 指数函数 对数函数

一 结 构 分 析

1. 主要内容

这一章的内容分为三部分：

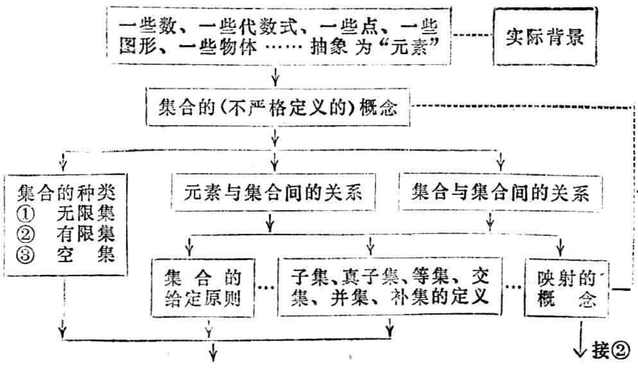
① 集合的表示法，子集、真子集、等集、全集、补集、交集、并集的概念和它们的基本性质。

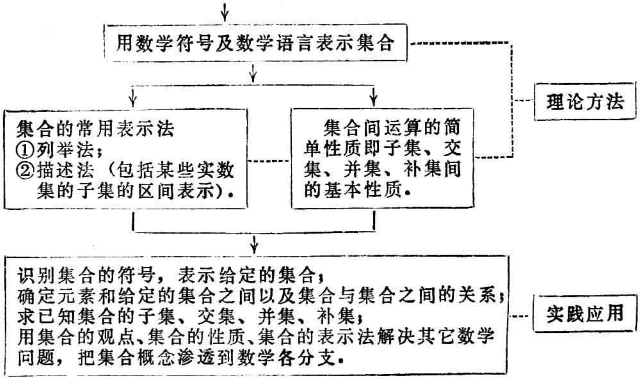
② 从一个集合到另一个集合的映射的概念，一一映射和逆映射概念，在集合和映射基础上定义的函数和反函数的概念，以及函数的单调性和奇偶性这两种基本性质。

③ 幂函数、指数函数、对数函数的定义和它们的基本性质，简单的指数方程和对数方程。

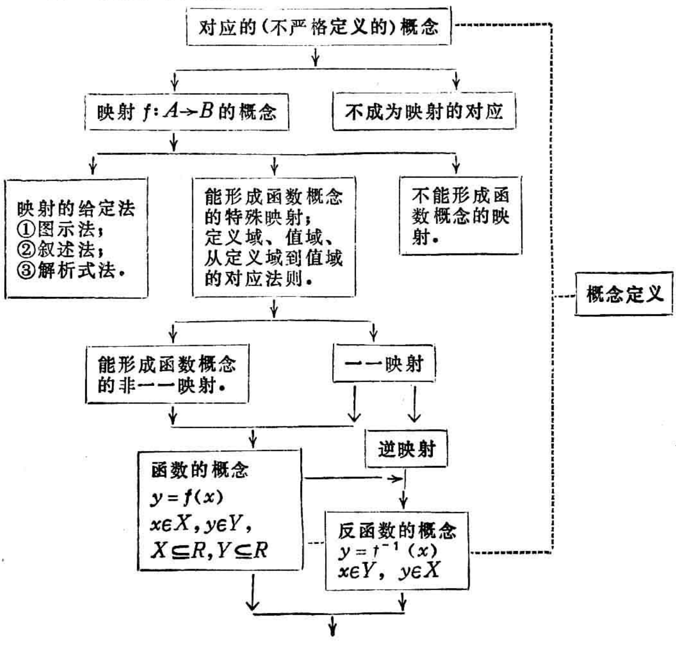
2. 内容结构图

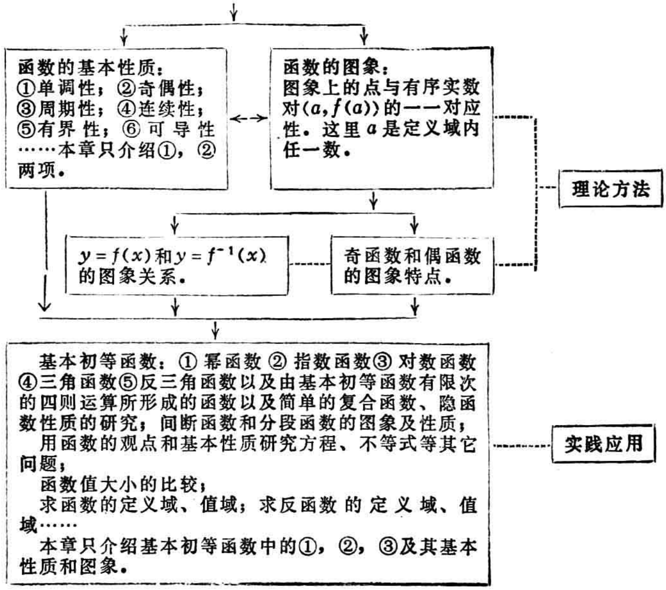
① 集合




用数学符号及数学语言表示集合
理论方法
集合的常用表示法
①列举法；
②描述法（包括某些实数集的子集的区间表示）。
集合间运算的简单性质即子集、交集、并集、补集间的基本性质。
识别集合的符号，表示给定的集合；
确定元素和给定的集合之间以及集合与集合之间的关系；
求已知集合的子集、交集、并集、补集；
用集合的观点、集合的性质、集合的表示法解决其它数学问题，把集合概念渗透到数学各分支。
实践应用

② 映射与函数


对应的（不严格定义的）概念
映射 $f: A \to B$ 的概念
不成为映射的对应
映射的给定法
①图示法；
②叙述法；
③解析式法。
能形成函数概念的特殊映射；
定义域、值域、从定义域到值域的对应法则。
不能形成函数概念的映射。
概念定义
能形成函数概念的非一一映射。
一一映射
逆映射
函数的概念
$y=f(x)$
$x \in X, y \in Y$,
$X \subseteq R, Y \subseteq R$
反函数的概念
$y=f^{-1}(x)$
$x \in Y$, $y \in X$



3. 几点说明

① 集合是数学研究的基本对象．本章开始部分介绍了有关集合的最简单的基础知识．同学们在学习时要弄懂各个基本概念，熟记各种符号、字母的含义，在提高使用数学语言、数学符号的能力上多下功夫．

集合及子集、交集、并集、补集等基本概念是学习数学各分支的基础，也是本章中映射概念及函数概念的基础．

② 元素与集合的关系、集合与集合的关系是定义子集、等集、交集、并集、补集的基础，集合的列举法和描述法是确切地说明元素与集合间关系的表现形式．而子集、真子集、

等集又可看作交集的特殊情况.

③ 集合的表示法通常指列举法和描述法.有的集合适于列举法表示，有的则适于描述法表示,有的两种办法都可以.有的集合可以有形式不同的多种描述法.

④ 在子集、交集、并集、补集的定义中，用到了"且"，"或"，"任何一个……,都在……中"，"至少一个…不在……中"，"在…中但不在…中…"等关联词语，它们各自体现了某种逻辑判断.因此，学点逻辑知识，弄清逻辑关系是深刻理解上述概念的前提.本章出现的不少符号如"$\in$"，"$\notin$"，"$\subseteq$"，"$\nsubseteq$"，"$\cap$"，"$\cup$"……等都是逻辑代数中的符号.

⑤ 由子集、交集、并集、补集等定义直接得到的一些结果，例如：$A\subseteq B, B\subseteq C$,则$A\subseteq C$；$A\cap A=A\cup A=\overline{\overline{A}}=A$；$A\cap\phi=\phi$；$A\cup\phi=A$；$A\cap B=B\cap A$；$A\cup B=B\cup A$；$A\cap\overline{A}=\phi$；$A\cup\overline{A}=I$；$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则$A=B$且$\overline{A}=\overline{B}$,等等，是集合间运算的基本性质，熟悉这些基本性质有助于巩固子集、交集、并集、补集的概念.

⑥ 对应也是不加严格定义的基本而且重要的概念，它包括两个集合和从第一个集合到第二个集合的一个对应法则.映射是一种特殊的对应，一一映射是一种特殊的映射.函数的实质是映射，是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则组成的一类特殊的映射.本书中函数的定义域和值域都是实数集的子集.

⑦ 映射$f：A\to B$有逆映射$f^{-1}：B\to A$的充要条件是f：$A\to B$是一一映射.由一一映射$f:A\to B$和它的逆映射$f^{-1}:B\to A$分别确定的函数$y=f(x)(x\in X, y\in Y)$和$y=f^{-1}(x)(x\in Y，y\in X)$互为反函数.

⑧ 函数$y=f(x)$ ($x\in X$)的图象是有序实数对$(x,f(x))$所对应的坐标平面内的点集。函数的图象能直观地显示出函数的某些性质；另一方面，掌握了函数的某些性质(例如奇偶性、单调性、周期性等)或者一个函数与另一个函数的关系(例如互为反函数的关系)，又可指导作图。

⑨ 幂函数、指数函数、对数函数是三种重要的基本初等函数。幂函数的集合中，有的函数是奇函数，有的是偶函数，有的既非奇函数又非偶函数。任何一个幂函数的图象都不在第四象限。幂函数集合中，有的函数与同一集合中另外一种函数互为反函数；指数函数与对数函数互为反函数。

⑩ 幂函数值、指数函数值、对数函数值之间大小关系的比较，以及简单的指数方程和对数方程的讨论，都属这些基本初等函数性质的应用。解指数方程和对数方程时，可能由于变量的允许值集合的扩大或缩小而引起增、减根，因此要注意验根。

二　重点、难点分析

1。重点

① 集合的表示法

列举法就是把给定集合中的元素不重复、不计次序、不遗漏地一一列出，放在集合符号"{　}"内，元素之间用隔开符号"，"隔开的办法。例如{0}，{1，0，－1}，{(－3，2)，(0，0)}，{(1，2，3)}，{1，2，3，…，99，100}，{1，3，5，7，9，……}等。

描述法就是在集合符号内自左而右先写出该集合中元素的代表符号，然后用隔开符号“|”隔开，在它右边用数学语言描述出该集合中的元素的特性的办法．在需要多层次描述性质时，要用适当关联词“且”、“或”等联结，有时“且”可用“，”代替．当描述部分出现了元素记号之外的字母时，必须进一步对这些新出现的字母说明其含义或指明其取值范围．例如：$\{x|x>0且\ x\neq1\}$，$\{a+b\sqrt{2}|a,\ b\in Q\}$，$\{(x,\ y)|x^2-y^2=1\}$，$\left\{\alpha|\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z\right\}$．

② 子集、交集、并集、补集的概念

在了解了它们的定义的基础上，应当学会使用更精练的数学语言的定义，例如：

$A\subseteq B$，当且仅当对任意$x\in A$，都有$x\in B$；

$A\nsubseteq B$，当且仅当存在$x\in A$且$x\notin B$；

$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$；

$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$；

$\overline{A}=\{x|x\in I且x\notin A\}$．

此外，再补充几个定义，这些不仅能锻炼大家使用数学语言的能力，而且又能学习描述法．例如：

$A\cap\overline{B}=\{x|x\in A且x\notin B\}$；

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x|x\in I且x\notin A且x\notin B\}$

$=\{x|x\in I且x\notin A\cup B\}$；

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{x|x\in I且x\notin A或x\notin B\}$

$=\{x|x\in I且x\notin A\cap B\}$．

③ 映射$f:A\rightarrow B$的概念

对于给定的非空集合A、B，如果给出从A到B的一种对

应法则f，使得A中任一元素与B中唯一元素对应，这种从A到B按法则f的对应叫做从A到B的映射，记为$f:A\to B$。

应当注意：1)映射$f:A\to B$包括集合A，B以及从A到B的对应法则，缺一不可；2)$f:A\to B$有方向性；3)A叫这个映射的原象集，B叫象集。A中任意一个元素都在B中有它在f下的唯一的象，B中可以有不是A中元素的象的元素。

例如：$A=\overline{R^-}$，$B=R$，从A到B的对应法则f是“开平方”，这就不是从A到B的映射，因为对于$4\in A$，在f下对应于$\pm 2\in B$，可见元素4的对应元素不唯一。如果把B改为$B=\overline{R^+}$，这时就是从A到B的映射了。因为对任一A中的数，经过开平方后在B中有唯一的非正平方根与之对应。

④ 函数的概念

对于非空集合$A\subseteq R$，$B\subseteq R$，映射$f:A\to B$使得B中任一元素在A中都有原象时，这是一种特殊映射，这种特殊映射就是函数。A叫函数的定义域，B叫值域。所以说“函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊的映射”。

例如：$A=[-1,\ +\infty)$，$B=\overline{R^+}$，从A到B的对应法则f是“对于A中元素x加上1后开平方取负平方根而与B中元素y对应”；这种从A到B的对应就是上述的特殊的映射，这个映射就形成了函数$y=-\sqrt{x+1}$（$x\in[-1,\ +\infty)$）。如果把B改为R，这时上述对应仅是映射$f:A\to B$，但不是函数，因为这时B中存在无原象的元素，如$y=1$就没有原象。

⑤ 函数的定义域、值域及区间记号

函数的定义域和值域是实数集的子集，定义域不同的函数是不同函数，值域中元素的数目不多于定义域中元素的数

目。

求函数定义域的原则大致是：

1）不能使函数值越出实数集的范围。例如偶次根式根号内的值应当非负，对数的真数应为正数等；

2）不能使函数值不存在或不确定。例如分式函数分母应当不是零；三角函数中切、割类的函数的定义域的特殊限定；幂函数中当指数为零时，底数不得为零的限定等；

3）有限个基本初等函数经过四则运算而形成的函数的定义域是各基本初等函数定义域的交集，并考虑到新出现的分母不能为0的条件；

4）函数$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$的定义域是$y=f(x)$的值域；

5）奇函数或偶函数的定义域是x轴上关于坐标原点(0，0)为中心对称的区间。（原点可能在也可能不在定义域内。）

6）复合函数$y=f[\phi(x)]$的定义域应使得“内层函数”$t=\phi(x)$的值域不超出“外层函数” $y=f(t)$的定义域；

7）在有限个实数上定义的函数的定义域就是这有限个实数的集合；

8）应用问题或几何题中的函数的定义域要考虑到实际意义或几何意义。

求函数值域的几种办法：

1）根据值域的定义，有些函数可用列举法写出值域，例如函数$y=\begin{cases}1\ (x>0),\\0\ (x=0),\\-1\ (x<0).\end{cases}$它的值域是$\{1, 0, -1\}$。

2）利用已知值域的函数，把待求值域的函数式变形，

通过解不等式的办法求值域．例如函数

$$y=\frac{3x^2-1}{x^2+2}.\quad \because\ \frac{3x^2-1}{x^2+2}=\frac{3(x^2+2)-7}{x^2+2}=3-\frac{7}{x^2+2},$$

$$\because x^2\geqslant 0,\qquad \therefore x^2+2\geqslant 2,\ \therefore 0<\frac{7}{x^2+2}\leqslant\frac{7}{2},$$

$$\therefore -\frac{7}{2}\leqslant-\frac{7}{x^2+2}<0,\quad -\frac{1}{2}\leqslant 3-\frac{7}{x^2+2}<3.$$

可见$y=\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}$的值域是$\left[-\dfrac{1}{2},\ 3\right)$．

3）闭区间内的连续函数可通过求出函数的最大、最小值的办法求值域．例如函数$y=\sqrt{3-2x-x^2}$，由$3-2x-x^2\geqslant 0$解出定义域为$[-3,1]$，这个函数是$[-3,1]$内的连续函数，根据二次函数$-x^2-2x+3$的性质容易求出在$[-3,1]$内$-x^2-2x+3$的最大值为4，最小值为0，所以所求的值域为$[0,2]$．

4）通过换元法，转化为容易求值域的函数形式．例如函数$y=x+\sqrt{1-x}$，令$t=\sqrt{1-x}$，则当$x\in(-\infty,1]$时，$t\in\overline{R^-}$．这时候$y=(1-t^2)+t=-t^2+t+1$就成了在$\overline{R^-}$上的二次函数了．注意到这个关于t的二次函数当$t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\in\overline{R^-}\right)$时有最大值$\dfrac{5}{4}\left(此时x=\dfrac{3}{4}\right)$，而当$t$取很大的正实数时（相当于$x$取绝对值很大的负实数），函数值可以是绝对值很大的负实数，由此可得所求的值域是$\left(-\infty,\ \dfrac{5}{4}\right]$．

5）把函数看作以y为参数的方程，利用一元二次方程