高等数学习题解答

（第九、十、十一、十二章）

上海化工学院数学教研组

一 九 七 九 年

第九章　常微分方程

9—1.

(1) 是;　(2) 不是;　(3) 是;　(4) 是;　(5) 不是;
(6) 是;　(7) 是;　(8) 是;　(9) 是;　(10) 不是;
(11) 是;　(12) 不是;　(13) 是;　(14) 是。

9—2.

(1) 一阶;　(2) 二阶;　(3) 二阶;　(4) 一阶;　(5) 一阶;
(6) 二阶。

7—3.

(1) $y=e^{2x}$，$y=4e^{2x}$ 及 $y=ce^{2x}$ 是对应微分方程的解，其中 $y=e^{2x}$ 及 $y=4e^{2x}$ 是特解，$y=ce^{2x}$ 是通解。$y=\sin 2x$ 及 $y=e^{x}$ 不是对应微分方程的解.

(2) $y=x$ 及 $y=xe^{cx}$ 都是方程的解，其中 $y=x$ 是特解，$y=x\cdot e^{cx}$ 是通解.

(3) $y=(x+2)^3$ 及 $y=(x+c)^3$ 是方程的解，其中 $y=(x+2)^3$ 是特解，$y=(x+c)^3$ 是通解，而 $y=x^3+c$ 不是方程的解。

(4) $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ 是方程的解，且是通解

(5) $y=e^{-x}$，$y=e^{2x}$ 及 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ 都是方程的解，其中 $y=e^{-x}$ 及 $y=e^{2x}$ 是特解，$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ 是通解，而 $y=e^{x}$ 及 $y=x^2$ 不是方程的解.

(6) $y=5\cos 8x+\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{18}$ 是方程的解，且是特解.

(7) $x=2\sin\omega t$，$x=-\omega\cos\omega t$ 及 $x=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t$ 都是方程的解，其中 $x=2\sin\omega t$ 及 $x=-\omega\cos\omega t$ 是特解，$x=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t$ 是通解.

(8) $x=ce^{t}-\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t)$ 是方程的解，且是通解，而 $x=e^{t}-\dfrac{1}{2}\cos t$ 不是方程的解.

9—4.

(1) $y=e^{-2x}$ 是，其余不是.　(2) $u=-\dfrac{1}{4t+1}$ 是，其余不是.

(3) 是.　(4) 是.

7—5.

(1) 等式 $x^2-xy+y^2=c$ 两边对 x 求导. $=0$. 得.

$$(x-2y)y'$$

(2) 等式 $y=x+ce^{y}$ 两边对 x 求导.

$$y'=1+ce^{y}\cdot y'.$$

得 $$y'(1-ce^{y})=1.$$

由 $y=x+ce^{y}$ 可得 $ee^{y}=y-x$。

$\therefore$ $$y'(1-y+x)=1.$$

（3） 等式 $y=\ln(xy)$ 两边对 x 求导，$y'=\dfrac{y+xy'}{xy}$，得 $y'(xy-x)=y'$，此等式两边再对 x 求一次导．

$$y''(xy-x)+y'(y+xy'-1)=y',$$

整理得 $$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0.$$

9—6.

检验一个分段函数是否是对应微分方程的解：首先应检验．函数在分段点上是否具有直至对应微分方程阶数的各阶连续导数，其次再检验函数在各段上是否都满足对应的微分方程·

（1） 对于函数 $$y=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{2} & x\leqslant 1\\ e^{x-1} & x>1\end{cases}$$

分段点是 $x=1$，因为对应微分方程是一阶，所以首先要检验函数在 $x=1$ 处是否连续且具有一阶连续导数．这里，显然有 $y(1)=1$，$y(1-0)=1$，$y(1+0)=1$，所以函数在 $x=1$ 处连续．又因 $y'(1-0)=1$，$y'(1+0)=1$，所以函数在 $x=1$ 处一阶导数亦连续．

其次．因为函数在各段上都满足微分方程，所以函数是对应微分方程的解。

对于函数 $$y=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+1 & x\leqslant 0\\ e^{x} & x>0\end{cases}$$

尽管它在 $x=0$ 处是连续的．且在各 $x<0$ 及 $x>0$ 上都满足对应的微分方程．但由于 $y'(0^-)=0$，$y'(0^+)=1$ 因此函数在 $x=0$ 处一阶导数不连续，所以此函数不是对应微分方程的解。

对于函数 $$y=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & x\leqslant 2\\ 2e^{x-2} & x>2\end{cases}$$

$\because$ $$y(2)=2,\ y(2-0)=2,\ y(2+0)=2.$$

$\therefore$ 函数在 $x=2$ 处连续．

$\because$ $$y'(2-0)=2,\ y'(2+0)=2.$$

$\therefore$ 函数在 $x=2$ 处，一阶导数亦连续．其次因为函数在各段上都满足微分方程．

$\therefore$ 函数是对应微分方程的解．

对于函数 $$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-1 & x\leqslant 0\\ -\dfrac{x^2}{2}-1 & x<0\end{cases}$$

尽管它在 $x=0$ 处是连续的，且一阶导数亦连续，但因为函数在 $x>0$ 这段上不满足微分方程．所以函数不是微分方程的解．

（2） 对于函数 $y=\begin{cases}-e^{x}-x-1 & x\leqslant 0\\ -2x-2 & x>0.\end{cases}$ 分段点是 $x=0$,

∵ $$y(0)=-2,\quad y(0^{-})=-2,\quad y(0^{+})=-2.$$

∴ 函数在 $x=0$ 处连续，又

∵ $$y'(0^{-})=-2,\quad y'(0^{+})=-2.$$

∴ 一阶导数在 $x=0$ 处 也 连续．其次因为函数在各段上都满足微分方程，所以函数是微分方程的解．

对于函数 $y=\begin{cases}-2x-2 & x\leqslant 0\\ -e^{x}-x-1 & x>0.\end{cases}$ 分段点是 $x=0$,

∵ $$y(0)=-2,\ y(0^{-})=-2,\ y(0^{+})=-2.$$

∴ 函数在 $x=0$ 处连续，又

∵ $$y'(0^{-})=-2,\ y'(0^{+})=-2.$$

∴ 一阶导数在 $x=0$ 处也连续．其次因为．函数在各段上都满足微分方程，所以函数是微分方程的解．

对于函数 $y=\begin{cases}-2x & x\leqslant 2\\ -e^{x-2}-x-1 & x>2.\end{cases}$ 分段点是 $x=2$,

∵ $$y(2)=-4,\ y(2-0)=-4,\ y(2+0)=-4,$$

∴ 函数在 $x=2$ 处连续，又

∵ $$y'(0^{-})=-2,\quad y'(0^{+})=-2.$$

∴ 一阶导数在 $x=2$ 处亦连续．其次因为函数在各段上都满足微分方程，所以函数是微分方程的解．

9—7.

（1） ∵ $x=t\sin t-\cos t+c$.

∴ $$dx=(\sin t+t\cos t+\sin t)dt=(t\cos t+2\sin t)dt.$$

∵ $$y=t^{2}\sin t.$$

∴ $$dy=(2t\sin t+t^{2}\cos t)dt=t(2\sin t+t\cos t)dt=t\,dx.$$

∴ $y'=t$. 亦即 $t=y'$,

∴ $$y=t^{2}\sin t=y'^{2}\sin y'.$$

因此由参数方程所确定的函数确是对应微分方程的解．

（2） ∵ $x=\frac{3}{2}t^{2}+\ln t+c$.

∴ $$dx=\left(3t+\frac{1}{t}\right)dt.$$

∵ $$y=t^{3}+t+5.$$

∴ $$dy=(3t^{2}+1)dt=t\left(3t+\frac{1}{t}\right)dt=t\,dx.$$

∴ $$y'=t.$$

亦即 $$t=y'.$$

∴ $$y=t^{3}+t+5=y'^{3}+y'+5.$$

$$\therefore \qquad y'^3 + y' - y + 5 = 0.$$

∴ 由参数方程所确定的函数确是对应微分方程的解.

9—8.

（1） $dy = 2\,dx$. $\quad y = \int 2\,dx = 2x + c$.

（2） $dy = \frac{1}{x}dx$. $\quad y = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$.

（3） $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos x\,dx$. $\quad \frac{dy}{dx} = \int \cos x\,dx = \sin x + c_1$.

$$dy = (\sin x + c_1)dx.$$

$$y = \int (\sin x + c_1)dx = -\cos x + c_1 x + c_2.$$

（4） $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2\,dx \quad \frac{dy}{dx} = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c_1 \quad dy = \left(\frac{1}{3}x^3 + c_1\right)dx$.

$$y = \int \left(\frac{1}{3}x^3 + c_1\right)dx = \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2.$$

（5） $d\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right) = (e^t + t)dt \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \int (e^t + t)dt = e^t + \frac{1}{2}t^2 + c_1$.

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(e^t + \frac{1}{2}t^2 + c\right)dt.$$

$$\frac{ds}{dt} = \int \left(e^t + \frac{1}{2}t^2 + c\right)dt = e^t + \frac{1}{6}t^3 + ct + c_2.$$

$$ds = \left(e^t + \frac{1}{6}t^3 + ct + c_2\right)dt.$$

$$s = \int \left(e^t + \frac{1}{6}t^3 + ct + c^2\right)dt = e^t + \frac{1}{24}t^4 + \frac{c}{2}t^2 + c_2 t + c_3 = e^t +$$

$$\frac{1}{24}t^4 + c_1 t^2 + c_2 t + c_3. \quad \left(c_1 = \frac{c}{2}\right).$$

（6） 逐次降阶，由数学归纳法可得：

$$x = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \cdots + c_{n-1} x + c_n.$$

其中 c_1，c_2，$\cdots c_n$ 为任意常数.

数学归纳法解题步骤如下：

当 $n = 1$ 时，显然 $\frac{dx}{dt} = 0$ 的解为 $x = c_1$.

设当 $n = k$ 时. 方程 $\frac{d^K x}{dt^k} = 0$ 的解为

$$x = c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + \cdots + c_k.$$

其中 c_1，c_2，$\cdots c_k$ 为任意常数.

则对于 $n = k + 1$，由于方程 $\frac{d^{k+1} x}{dt^{k+1}} = 0$ 可降阶为 $\frac{d^k \frac{dx}{dt}}{dt^k} = 0$，

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=c_1' t^{k-1}+c_2' t^{k-2}+\cdots+c_k',$$

$$dx=(c_1' t^{k-1}+c_2' t^{k-2}+\cdots+c_k')dt.$$

$$\therefore \quad x=\int(c_1' t^{k-1}+c_2' t^{k-2}+\cdots+c_k')dt=\frac{c_1'}{k}t^k+\frac{c_2'}{k-1}t^{k-1}+\cdots+c_k' t+c_{k+1}.$$

$$=c_1 t^k+c_2 t^{k-1}+\cdots+c_{k+1}.\ \left(\text{其中 } c_i=\frac{c_i'}{k-i+1},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\right)$$

9—9.

（1） 等式 $y=ce^{-\frac{y}{x}}$ 两边对 x 求导.

$$y'=ce^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}y'\right),$$

由于 $ce^{-\frac{y}{x}}=y$ 所以很容刕消去任意常数 c.

得 $$y'=y\left(\frac{y}{x^2}-\frac{y'}{x}\right).$$

奁理得. $$\left(1+\frac{y}{x}\right)y'=\frac{y^2}{x^2}$$

即为所求之微分方程.

（2） 等式 $cy=x+\sqrt{1+x^2}$ 两边对 x 求导得.

$$cy'=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

由于 $$cy'=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{cy}{\sqrt{1+x^2}},$$

消去任意常数 c. 便有 $y'\sqrt{1+x^2}=y$. 即为所求之微分方程.

（3） 等式 $y=2x+ce^x$ 两边对求导，得 $y'=2+ce^x$，两个等式两边相减即可消去任意常数 c 得. $y'-y=2-2x$. 即为所求之微分方程.

（4） 等式 $y=x^2+(2c+1)x+c^2-1$ 两边对 x 求导.

得 $$y'=2x+2c+1,$$

从后式得 $$c=\frac{1}{2}(y'-2x-1).$$

代入前式得 $$y=x^2+(y'-2x)x+\frac{1}{4}(y'-2x-1)^2-1$$

奁理得: $$y'^2-2y'-4y=3-4x.$$

（5） 将等式两边对 x 求导两次得:

$$y=c_1x+c_2x^2\cdots\cdots(1),\quad y'=c_1+2c_2x\cdots\cdots(2),\quad y''=7c_2\cdots\cdots(3).$$

由(3)得 $c_2=\frac{1}{2}y''$，代入(2). 得. $c_1=y'-xy''$ 代入(1)得:

$$y=(y'-xy'')x+\frac{1}{2}y''x^2$$

整理得：　　　　　　　$$x^2y''-2xy'+2y=0.$$

即为所求之微分方程。

（6）　将等式两边对 x 求导两次得：

$$y=c_1\cos(\omega x+c_2)\cdots\cdots(1),\quad y'=-c_1\omega\sin(\omega x+c_2)\cdots\cdots(2),$$

$$y''=-c_1\omega^2\cos(\omega x+c_2)\cdots\cdots(3).$$

由(1)与(3)可知：$y''=-\omega^2 y$ 即为所求之微分方程。

（7）　将等式两边对求导两次得：

$$xy=c_1e^x+c_2e^{-x}\cdots\cdots(1);\quad y+xy'=c_1e^x-c_2e^{-x}\cdots\cdots(2);$$

$$2y'+xy''=c_1e^x+c_2e^{-x}(3)\cdots\cdots.$$

由(1)与(3)可知：

$$xy''+2y'-xy=xy=0.$$

即为所求之微分方程。

（8）　将等式两边对 x 求导三次得：

$$y=c_1+c_2x+c_3x^2\,(1)\cdots\cdots,\quad y'=c_2+2c_3x\,(2)\cdots\cdots,$$

$$y''=2c_3,\,(3)\cdots\cdots,\quad y'''=0\,(4)\cdots\cdots.$$

显然在(4)中已不出现任意常数 c_1，c_2，c_3，

∴　$y'''=0$ 即为所求之微分方程.

9—10.

（1）　∵　$c=0^2-5^2=-25$.

∴　曲线为 $x^2-y^2=-25$.

（2）　∵　$-9+c\cdot 0+c^2=0$。$c=\pm 3$.

∴　曲线有两条，分别为.

$$y+3x+9=0\quad 及\quad y-3x+9=0.$$

（3）　∵　$y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ 对 x 的导数为

$$y'=(2c_1+c_2+2c_2x)e^{2x},$$

由初始条件得：

$$0=(c_1+c_2\cdot 0)e^{2\cdot 0}\quad 及\quad 1=(2c_1+c_2+2\cdot c_2\cdot 0)e^{2\cdot 0}\text{ 解得}$$

$$c_1=0.\ c_2=1.$$

∴　曲线为　　　　　　$$y=xe^{2x}.$$

（4）　∵　$y=c_1\sin(x-c_2)$ 对 x 的导数为.

$$y'=c_1\cos(x-c_2).$$

由初始条件得，

$$1=c_1\sin(\pi-c_2)^{(1)}.\quad 0=c_1\cos(\pi-c_2),^{(2)}.$$

由(1)式知 $c_1\neq 0$.

∴　　　　　$$\cos(\pi-c_2)=0.$$

∴　　　　　$$c_2=n\pi+\frac{\pi}{2}$$

代入(1)得.　　　　$$c_1=(-1)^n.$$

∴ 曲线为. $$y=(-1)^n\sin\left(x-n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$$

(5) ∵ $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+c_3e^{2x}$. 对 x 的一阶导数及二阶导数分别为.

$$y^1=-c_1e^{-x}+c_2e^x+2c_3e^{2x},$$

$$y''=c_1e^{-x}+c_2e^x+4c_3e^{2x}.$$

由初始条件得:

$$0=c_1e^{-0}+c_2e^0+c_3e^{2\cdot0}.$$

$$1=-c_1e^{-0}+c_2e^0+2c_3e^{2\cdot0}.$$

$$-2=c_1e^0+c_2e^0+4c_3e^{2\cdot0}.$$

解之得. $c_1=-\frac{5}{6}$, $c_2=\frac{3}{2}$, $c_3=-\frac{2}{3}$.

∴ 曲线为 $$y=-\frac{5}{6}e^{-x}+\frac{3}{2}e^x-\frac{2}{3}e^{2x}.$$

9—11.

(1) $dy=\sin\omega t\,dt$.

$$y=\int\sin\omega t\,dt=-\frac{1}{\omega}\cos\omega t+c.$$

由初始条件知 $1=-\frac{1}{\omega}\cos\omega\cdot0+c$ $\quad c=1+\frac{1}{\omega}$.

∴ 特解为. $$y=-\frac{1}{\omega}\cos\omega t+1+\frac{1}{\omega}.$$

(2) 先求得通解 $y=x^3+c_1x+c_2$. 再根据初始条件得.

$$0=0+c_1\cdot0+c_2,\quad 及\quad y'=3x^2+c_1$$

$$2=3\cdot0^2+c_1.$$

解之得 $c_2=0$, $c_1=2$.

∴ 特解为: $$y=x^3+2x.$$

(3) 通解为. $$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c,$$

由初始条件得: $$1=\frac{2}{3}\cdot1^{\frac{3}{2}}+c.$$

∴ $$c=\frac{1}{3}.$$

∴ 特解为: $$y=\frac{1}{3}(2x^{\frac{3}{2}}+1).$$

(4) 先求得通解为: $$y=\frac{1}{2}\ln(2x-1)+c,$$

由初始条件得: $$1=\frac{1}{2}\ln(2\cdot1-1)+c,$$

∴ $$c=1.$$

$\therefore$ 特解为:
$$y=\frac{1}{2}\ln(2x-1)+1$$

(5) 先求得通解为:
$$y=-\frac{2}{3}e^{-t}+c,$$

由初始条件得:
$$0=-\frac{2}{3}e^{-0}+c.$$

$\therefore$
$$c=\frac{2}{3}.$$

$\therefore$ 特解为.
$$y=\frac{2}{3}(1-e^{-t}).$$

(6) 先用降阶法求通解:
$$y'=\frac{QL}{4EI}x^2-\frac{Q}{6EI}x^3+c_1,$$
$$y=\frac{QL}{12EI}x^3-\frac{Q}{24EI}x^4+c_1x+c_2.$$

由初始条件得,
$$0=\frac{QL}{4EI}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2-\frac{Q}{6EI}\left(\frac{L}{2}\right)^3+c_1,$$
$$0=\frac{QL}{12EI}\cdot 0^3-\frac{Q}{24EI}0^4+c_1\cdot 0+c_2.$$

解之得 $c_2=0$,
$$c_1=-\frac{QL^3}{24EI}.$$

$\therefore$ 特解为:
$$y=\frac{Q}{24EI_z}(2Lx^3-x^4-L^3x)]$$

9—12.

由题意得定解问题:
$$\begin{cases} y'=x^2 \\ y|_{x=1}=0. \end{cases}$$

微分方程的通解为
$$y=\frac{1}{3}x^3+c.$$

由定解问题的附加条件得
$$0=\frac{1}{3}+c.$$

$\therefore$
$$c=-\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ 此定解问题的解,即曲线的方程为.
$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}.$$

9—13.

据题意与曲率定义可得微分方程:
$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

即 $$y''=0.$$

解之得 $y=c_1x+c_2$。其中 c_1、c_2 为任意常数．由此可知曲线 $y=c_1x+c_2$ 是直线．

9—14.

设拉力与时间的比例系数为 α，阻力与速度的比例系数为 β，根据运动学基本定理可得微分方程．

$$m\frac{dv}{dt}=\alpha t-\beta v$$

9—15.

设空气阻力与速度的比例系数为 α，物体在地球引力及空气阻力下运动，根据运动学基本定理．可归结为如下定解问题：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2}=mg-\alpha\dfrac{ds}{dt}. \\ s\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=v_0. \end{cases}$$

9—16.

$$\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{q}{2EI}(l-x)^2,\qquad d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{q}{2EI}(l-x)^2dx,$$

$$\frac{dy}{dx}=\int\frac{q}{2EI}(l-x)^2dx=-\frac{q}{6EI}(l-x)^3+c_1.$$

$$dy=\left[-\frac{q}{6EI}(l-x)^3+c_1\right]dx.$$

$$y=\int\left[-\frac{q}{6EI}(l-x)^3+c_1\right]dx=\frac{q}{24EI}(l-x)^4+c_1x+c_2.$$

由附加条件得． $$0=\frac{ql^4}{24EI}+c_2,\qquad 0=-\frac{q}{6EI}l^3+c_1.$$

解之得： $$c_1=\frac{q}{6EI}l^3,\qquad c_2=-\frac{ql^4}{24EI}.$$

∴ 梁的挠曲线的方程为

$$y=\frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4+4l^3x-l^4\right]=\frac{q}{24EI}(x^4-4lx^3+6l^2x^2)$$

9—17.

（1） $\frac{1}{y}dy=\frac{x}{2}dx.$ $\qquad\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{2}dx,$

$\ln y=\frac{1}{4}x^2+\ln c,$ $\qquad y=ce^{\frac{1}{4}x^2}$

（2） $\frac{1}{y}dy=\sin x\,dx,$ $\qquad\int\frac{1}{y}dy=\int\sin x\,dx,$

$\ln y=-\cos x+\ln c,$ $\qquad y=ce^{-\cos x}.$

(3) $x\,dx=-t\,dt$. $\quad \int x\,dx=-\int t\,dt$.

$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}t^2+\frac{c}{2}$, $\quad x^2+t^2=c$.

(4) $\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\operatorname{arc\,sin} y=\operatorname{arc\,sin} x+c$.

(5) $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $\quad \int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}=-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

$\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$, $\quad \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c$.

(6) $\operatorname{tg} x\,dx=\operatorname{tg} y\,dy$. $\quad \int\operatorname{tg} x\,dx=\int\operatorname{tg} y\,dy$,

$-\ln\cos x=-\ln\cos y-\ln c$, $\quad \cos x=c\cos y$.

(7) $\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}dx+\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy=0$. $\quad \int\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}dx=-\int\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy$,

$\ln\operatorname{tg} x=-\ln\operatorname{tg} y+\ln c$, $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=c$.

(8) $\frac{dy}{2+y}=\frac{dx}{3-x}$, $\quad \int\frac{dy}{2+y}=\int\frac{dx}{3-x}$,

$\ln(2+y)=-\ln(3-x)+\ln c$, $\quad y=\frac{c}{3-x}-2$.

(9) $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{x}$, $\quad \int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{x}$,

$\ln\ln y=\ln x+\ln c$. $\quad y=e^{cx}$.

(10) $\operatorname{tg} x\,dx=-\frac{dy}{y+3}$, $\quad \int\operatorname{tg} x\,dx=-\int\frac{dy}{y+3}$,

$-\ln\cos x=-\ln(y+3)+\ln c$, $\quad y=c\cdot\cos x-3$.

(11) $\frac{e^x}{e^x+1}dx=\frac{-e^y}{e^y-1}dy$, $\quad \int\frac{e^x}{e^x+1}dx=-\int\frac{e^y}{e^y-1}dy$.

$\ln(e^x+1)=-\ln(e^y-1)+\ln c$. $\quad (e^x+1)(e^y-1)=c$.

(12) $(xy-ax)y'=2ay$. $\quad \frac{y-a}{y}dy=\frac{2a}{x}dx$.

$\int\left(1-\frac{a}{y}\right)dy=\int\frac{2a}{x}dx$, $\quad y-a\ln y=2a\ln x+\ln c$,

$e^y=c(x^2y)^a$.

(13) $\frac{1}{p}dp=-\operatorname{tg}\theta\,d\theta$, $\quad \int\frac{1}{p}dp=-\int\operatorname{tg}\theta\,d\theta$,

$\ln\rho=\ln\cos\theta+\ln c$. $\quad \rho=c\cos\theta$.

(14) $\frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x}$, $\quad \int\frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x}$,

（4） 先求通解：
$$e^y\,dy = e^{2x}\,dx,$$
积分一次得：
$$e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + c. \qquad y = \ln\left(\frac{1}{2}e^{2x} + c\right).$$
由初始条件得
$$-\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}e + c\right).$$
解得
$$c = 0,$$
∴ 特解为
$$y = 2x - \ln 2.$$
（5） 先求通解：
$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2x\,dx.$$
积分一次得
$$\sqrt{y} = x^2 + c.$$
由初始条件得：
$$1 = 1 + c,$$
即
$$c = 0.$$
∴ 特解为
$$y = x^4.$$
（6） 先求通解：
$$\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{y}.$$
积分一次得
$$\sqrt{1-x^2} = \ln y - \ln c, \qquad y = ce^{\sqrt{1-x^2}}$$
由初始条件得
$$\frac{1}{2} = c\cdot e^{\sqrt{1-1}},$$
即
$$c = \frac{1}{2},$$
∴ 特解为：
$$y = \frac{1}{2}e^{\sqrt{1-x^2}}.$$
（7） 先求通解：
$$y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}dx.$$
积分一次得：
$$\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+e^x) + c.$$
由初始条件得
$$\frac{1}{2} = \ln 2 + c.$$
即
$$c = \frac{1}{2} - \ln 2.$$
∴ 特解为
$$y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - \ln 4.$$
或写为
$$y^2 = 2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1.$$
（8） 先求通解：
$$\frac{2x}{x-1}dx = \operatorname{ctg} y\,dy.$$
积分一次得
$$2x + \ln(x-1)^2 = \ln\sin y + \ln c,$$
即
$$(x-1)^2 e^{2x} = c\sin y.$$
由初始条件得
$$(0-1)^2 e^{2\cdot 0} = c\cdot\sin\frac{\pi}{4},$$
∴
$$c = \sqrt{2},$$

$$-\ln(1-y)=\ln x-\ln c,\qquad y=1-\frac{c}{x}.$$

(15) $\dfrac{x}{x^2+1}dx=-\dfrac{1}{y}dx,\qquad \displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx=-\int\frac{1}{y}dy.$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=-\ln y+\ln c.\qquad y=\frac{c}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(16) $\dfrac{x}{x^2-1}dx=\dfrac{y}{y^2+1}dy,\qquad \displaystyle\int\frac{x}{x^2-1}dx=\int\frac{y}{y^2+1}dy,$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-1)=\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+\frac{1}{2}\ln c,\quad \frac{x^2-1}{y^2+1}=c.$$

(17) $10^{-y}dy=10^x dx,\qquad \displaystyle\int 10^{-y}dy=\int 10^x dx,$

$$-\frac{1}{\ln 10}10^{-y}=\frac{1}{\ln 10}10^x-\frac{c}{\ln 10},\qquad 10^x+10^{-y}=c.$$

(18) $\dfrac{\ln x}{x}dx=-\dfrac{\ln y}{y}dy,\qquad \displaystyle\int\frac{\ln x}{x}dx=-\int\frac{\ln y}{y}dy,$

$$\frac{1}{2}(\ln x)^2=-\frac{1}{2}(\ln y)^2+\frac{1}{2}c,\qquad \ln^2 x+\ln^2 y=c.$$

(19) $\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=dx.\qquad \displaystyle\int\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=\int dx.$

$$-\sqrt{a^2-y^2}=x-c.\qquad x+\sqrt{a^2-y^2}=c.$$

(20) $2\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z+1}{z-1}-1=\dfrac{2}{z-1},\qquad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{z-1},\ (z-1)dz=dx.$

$$\int(z-1)dz=\int dx.\qquad x=\frac{1}{2}z^2-z+c.$$

9—18.

(1) 令 $u=x+y$.

则
$$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=1+\frac{a^2}{u^2}=\frac{u^2+a^2}{u^2},$$

$$\frac{u^2}{u^2+a^2}du=dx.\qquad \int\frac{u^2}{u^2+a^2}du=\int dx.$$

$$u-a\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}=x+c,\ ,\qquad y-a\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{a}=c.$$

(2) 令 $u=2x+y$,

则
$$\frac{du}{dx}=2+\frac{dy}{dx}=2+u,\qquad \frac{du}{2+u}=dx.$$

$$\int\frac{du}{2+u}=\int dx.\qquad \ln(2+u)=x+\ln c.$$

$$2+u=ce^x,\qquad 2+2x+y=ce^x,\qquad y=ce^x-2x-2.$$

（3） 令 $u=x+y$,

则 $$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=2+u,\qquad \frac{du}{2+u}=dx,$$

$$\int\frac{du}{2+u}=\int dx,\qquad \ln(2+u)=x+\ln c,$$

$$2+u=ce^{x},\qquad 2+x+y=ce^{x},\qquad y=ce^{x}-x-2.$$

（4） 令 $u=x-y$,

则 $$\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx}=1-\left(1+\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u},\qquad u\,du=-dx,$$

$$\int u\,du=-\int dx,\qquad \frac{1}{2}u^2=-x+c,$$

$$\frac{1}{2}(x-y)^2=-x+c,\qquad x+\frac{1}{2}(x-y)^2=c.$$

（5） 令 $u=x+y$,

则 $$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=1+\cos u.\qquad \frac{du}{1+\cos u}=dx,$$

$$\int\frac{du}{1+\cos u}=\int dx.\qquad \operatorname{tg}\frac{u}{2}=x+c.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}-x=c.$$

9—19.

（1） 先求通解：

$$\frac{1}{2e^{-y}-1}dy=\frac{1}{x+1}dx,\qquad \int\frac{1}{2e^{-y}-1}dy=\int\frac{1}{x+1}dx,$$

$$-\ln(2-e^{y})=\ln(x+1)-\ln c.\qquad (x+1)(2-e^{y})=c.$$

根据初始条件得 $$c=(1+1)(2-e^{0})=2.$$

∴ 特解为 $$(x+1)(2-e^{y})=2.\quad 或\quad y=\ln\frac{2x}{x+1}.$$

（2） 先求通解： $$\frac{dx}{x-1}=\frac{dy}{y}.$$

积分一次得 $$\ln(x-1)=\ln y+\ln c.\qquad x-1=cy.$$

由初始条件得 $$2-1=c\cdot 1.\qquad c=1.$$

∴ 特解为 $$y=x-1.$$

（3） 先求通解： $$\frac{du}{(a-2u)^2}=-k\,dt.$$

积分一次得 $$\frac{1}{2}(a-2u)^{-1}=-kt+c.$$

由初始条件得 $$\frac{1}{2}a^{-1}=c.$$

∴ 特解为 $$u=\frac{ka^2t}{2kat-1}.$$

特解为：$$\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)^2e^{2x}.$$

（9） 先求通解：$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x},$$

积分一次得. $$\ln\ln y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\ln\ln c.$$

即 $$y=ce^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

由初始条件得 $$c=c\cdot e^{\operatorname{tg}\frac{x}{4}},$$ 得 $c=1$.

∴ 特解为 $$y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

9—20.

由题意得定解问题：$$\begin{cases} y'=2\cdot\dfrac{y}{x} \\ y\big|_{x=1}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

先求微分方程的通解：$$\frac{dy}{y}=\frac{2\,dx}{x}$$

积分一次得通解 $$\ln y=2\ln x+\ln c.$$

$$y=cx^2.$$

由附加条件，得. $$\frac{1}{3}=c\cdot1^2.$$

即 $$c=\frac{1}{3}.$$

∴ 特解为 $$y=\frac{1}{3}x^2,$$

此即所求之曲线方程.

9—21.

设过曲线上 $M(x,y)$ 的切线交 x 轴于 A 点，交 y 轴于 B 点. 由于 M 点是线段 AB 之中点.

∴ A 点坐标为 $(2x,0)$，B 点坐标为，$(0,2y)$，故 AB 之斜率为 $-\frac{y}{x}$，由此得曲线必满足微分方程 $y'=-\frac{y}{x}$，分离变量，积分一次得通解 $xy=c$，由附加条件得 $c=-6$.

∴ 曲线方程为 $xy=-9$.

9—22.

设降落伞的速度 v，则阻力为 αv（α 为比例系数），由运动学基定本理得：

$$mg-\alpha v=m\frac{dv}{dt}.$$ 分离变量.

$$\frac{m\,dv}{mg-\alpha v}=dt,$$ 积分一次得.

$$-\frac{m}{\alpha}\ln(mg-\alpha v)=t+c_1,$$

奎理为 $$v+\frac{mg}{\alpha}+ce^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

由于当 $t=0$ 时有 $v=0$.

所以可知 $$c=-\frac{mg}{\alpha}.$$

∴ $$v=\frac{mg}{\alpha}(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}).$$

9—23.

由题意得定解问题 $$\begin{cases}-\dfrac{dq}{dt}=Kq,\\ q|_{t=0}=q.\end{cases}$$

分离变量 $$\frac{dq}{q}=-K\,dt.$$

积分一次 $$\ln q=-Kt+\ln c,\qquad q=ce^{-Kt}.$$

由初始条件可知 $$q_0=ce^{-K\cdot 0}$$

即 $$c=q_0.$$

∴ $$q=q_0\,e^{-Kt}.$$

9—24.

设镭衰变速度与存余量之间比例系数为入由题意归结得定解问题.

$$\begin{cases}-\dfrac{dm}{dt}=\lambda m.\\ m|_{t=t_0}=m_0\end{cases}$$

分离变量得 $$\frac{dm}{m}=-\lambda\,dt.$$

积分一次得 $$\ln m=-\lambda t+\ln c.$$

∴ $$m=ce^{-\lambda t}.$$

由初始条件 $$m_0=ce^{-\lambda t_0}.$$

∴ $$c=m_0\,e^{\lambda t_0}.$$

∴ $$m=m_0\,e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

又从 $t=t_0-1600$ 时 $$m=2\,m_0.$$

可定出比例系数入 $$2\,m_0=m_0\,e^{-\lambda\cdot(1600)};$$

$$1600\,\lambda=\ln 2=0.6931.$$

∴ $$\lambda=0.0004332,$$

∴ $$m=m_0\,e^{-0.0004332(t-t_0)}.$$

9—25.

由题意归结得定解问题 $$\begin{cases}-\dfrac{dv}{dt}=Kv.\\ v|_{t=0}=6.\end{cases}$$

分离变量 $$\frac{dv}{v}=-K\,dt.$$

积分一次 $$\ln v=-Kt+\ln c.$$

$$v=ce^{-Kt}.$$

由初始条件，得 $$6=c\cdot e^{-K\cdot 0},$$

即 $$c=6.$$

∴ $$v=6\cdot e^{-Kt}.$$

又从 $t=5$ 时 $$v=\frac{v_0}{2}=3.$$

可求出比例系数 K.

$$3=6\cdot e^{-5K}.\qquad 5K=\ln 2\doteq 0.6931,\qquad K\doteq 0.1386.$$

∴ $$v=6e^{-0.1386t}.$$

9—26.

设外界温度为 θ_0，冷却速度温差之比例系数为 λ.

① $T(+)$ 应满足的方程为：

$$\frac{dT}{dt}=-\lambda(T-\theta_0)$$

② 分离变量 $$\frac{dT}{T-\theta_0}=-\lambda\,dt.$$

积分得 $$\ln(T-\theta_0)=-\lambda t+\ln c.$$

$$T=\theta_0+ce^{-\lambda t}.$$

由题意附加条件是当 $t=0$ 时. $T=750℃$,

又知 $$\theta_0=20℃.$$

代入 $$750=20+ce^{-\lambda\cdot 0}=20+c.\qquad c=730.$$

∴ $$T=20+730\,e^{-\lambda t}.$$

9—27.

由题意得微分方程定解问题 $$\begin{cases}-m\dfrac{dv}{dt}=Kv^2+G.\\ v|_{t=0}=v_0.\end{cases}$$

分离变量 $$\frac{dv}{v^2+\dfrac{G}{K}}=-\frac{K}{m}dt.$$

积分得 $$\sqrt{\frac{K}{G}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{K}{G}}\,v=-\frac{K}{m}t+c_1.$$

∴ 通解为 $$v=\frac{\sqrt{G}\left(c-\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{KG}}{m}t\right)}{\sqrt{K}\left(1+c\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{KG}}{m}t\right)}$$

由初始条件得 $$v_0=\frac{C\sqrt{G}}{\sqrt{K}}.$$