# 航天器飞行动力学建模理论与方法

HANGTIANQI FEIXING DONGLIXUE JIANMO LILUN YU FANGFA

赵育善　师　鹏◆编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

# 航天器飞行动力学建模理论与方法

赵育善　师　鹏　编著

北京航空航天大学出版社

## 内容简介

本书以航天飞行器为对象，系统讲述建立飞行动力学模型的理论与方法。全书分为上、下两篇。上篇阐述建立飞行动力学模型所需的数学、力学理论和方法，包括：矢量与坐标变换、四元数理论、刚体动力学、拉格朗日方程、拟拉格朗日方程、凯恩方程、正则方程与正则变换、中心引力运动、空间运动几何学及时间系统等。下篇具体建立各种航天飞行器的飞行动力学模型，包括：有翼导弹、旋转导弹、弹道导弹、运载火箭、人造地球卫星、深空探测器等的飞行动力学模型。

本书主要作为高等院校飞行器设计和相关专业的本科生、研究生教材，也可供从事航天器研制、应用工作的科技人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

航天器飞行动力学建模理论与方法 / 赵育善，师鹏编著. --北京 ：北京航空航天大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-5124-0716-9

Ⅰ. ①航… Ⅱ. ①赵… ②师… Ⅲ. ①航天器—飞行力学—系统建模—研究 Ⅳ. ①V412.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 019988 号



**航天器飞行动力学建模理论与方法**

赵育善 师 鹏 编著

责任编辑 陈守平

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：goodtextbook@126.com 邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×960 1/16 印张：14.75 字数：330 千字

2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷 印数：3 000 册

ISBN 978-7-5124-0716-9 定价：29.00 元

# 前　言

在飞行器设计专业的教学和科研中，急需加强对学生分析问题能力的培养。什么是分析问题的能力？结合飞行器设计专业，首先应该具备将工程问题转化为数学力学模型的能力。例如：把航天器作为一个刚体时，通常是由牛顿第二定律建立质心运动的动力学方程（弹道方程、轨道方程），由相对于质心的动量矩定理建立刚体相对于质心的转动方程（姿态方程）。若航天器演变为刚体系时，又该如何建立航天器的运动方程？目前的专业教材或专著中，多强调的是结论（模型）而不是方法。当这些模型不能与工程问题相对应，或者说在工程中遇到新的问题，需要修正模型时，学生往往不知如何着手，一些技术人员也没把握去修改模型或者接受新的模型。本人从教近三十年，前十年讲理论力学课，由于这门课既严谨又实用，我曾感受到讲述这门课是美的享受。在我近二十年从事飞行器设计专业教学和科研工作中，更体会到这门课给我工作带来的便利。然而，我在工作中又经常遇到学生或科研人员不能正确地应用力学方法去解决工程问题。通过对培养方案的分析，我认为学生的力学基础足矣，而缺乏的是对力学方法系统性的总结和深层次的体会，应该在专业基础平台中加强这方面的培养，也应该有这样一本书来引导学生更好地理解所学理论。

广义上的航天器包括：导弹、运载火箭、人造地球卫星、深空探测器等一类航天器。国内相关院校都将这类航天器归为同一学科，相应的工业集团也是如此划分的。所以，学生之所学应能适应于研究任何一种航天器的需要。这类航天器在运动描述、动力学建模方法上有共性。本书就是为这方面的专业需求所写，作为飞行动力学的基础教材。

本书的特点是：使读者具有牢固的力学理论基础、清晰的力学分析思路，轻松地应用恰当的力学方法建立飞行器的运动模型。与已有的教材相比，更通用，更有条理，更具启发性和能力的培养。如：在建立卫星相对于地球的轨道运动方程时，不对地球作静止的假设（现有教材、专著基本都是基于这种假设），而是以地球和卫星组成的两体系统作为研究对象，严格地建立卫星相对于地球的运动方程。尽管这种方法和假设地球静止所建立的方程形式完全相同，但这种方法力学上很

严谨，不会对学生正确理解问题留下任何遗憾，且不会干扰学生正确的分析思路。

全书分为上、下两篇。上篇阐述建立飞行动力学模型所需的数学、力学理论和方法，这些理论和方法是飞行动力学的基础。下篇则用上篇中的理论和方法具体建立各种航天飞行器的飞行动力学模型。

本书可作为高等院校飞行器设计和相关专业的本科生、研究生教材，也可作为从事航天器研制、应用工作的科技人员的主要参考书或常用手册使用。其中第4章的部分内容和第5章，是为研究复杂航天器动力学问题而准备的，供读者选择。

本书由赵育善、师鹏编写，博士生史树峰绘制了书中插图，温昶煊、肖清、曹鹏等研究生参与了文字校对工作。

限于作者水平，书中欠妥及错误之处，敬请读者批评指正。

编著者

2011年10月于北京航空航天大学

# 目　录

## 上篇　力学原理与方法


**第 1 章　绪　论** …… 3
**第 2 章　矢量与坐标变换** …… 5
2.1　矢　量 …… 5
2.2　坐标变换 …… 5
2.2.1　坐标变换 …… 6
2.2.2　坐标变换矩阵的传递性质 …… 7
2.2.3　基元旋转矩阵 …… 7
2.2.4　一般坐标变换 …… 8
2.2.5　由两矢量的分量列阵求坐标变换矩阵 …… 10
2.2.6　坐标变换的简单转动表示——欧拉转动定理 …… 11
2.3　运动坐标系中矢量导数的描述方法 …… 15
2.4　坐标变换的变化率 …… 16
2.5　四元数理论 …… 19
2.5.1　四元数的定义和性质 …… 19
2.5.2　四元数旋转变换 …… 21
2.5.3　四元数与坐标变换矩阵的关系 …… 22
2.5.4　多次四元数旋转变换的合成 …… 24
2.5.5　以四元数表示的相对运动学方程 …… 27
思考题 …… 29
**第 3 章　质点系的动力学方程** …… 30
3.1　质点的运动方程 …… 30
3.2　质点系的运动方程 …… 31
3.3　刚体的运动方程 …… 34
3.3.1　刚体运动描述 …… 34
3.3.2　惯性矩阵的概念 …… 35
3.3.3　柯西惯性椭球与惯性主轴 …… 37
3.3.4　刚体质心运动的方程 …… 39

3.3.5 刚体转动的方程 …… 39
3.3.6 刚体的动能 …… 43
3.3.7 自由刚体的转动运动特性 …… 44
3.4 质点相对运动的动力学方程 …… 53
思 考 题 …… 56
**第 4 章 分析力学基础** …… 57
4.1 动力学普遍方程 …… 58
4.2 第一类拉格朗日方程 …… 59
4.3 第二类拉格朗日方程 …… 60
4.3.1 第二类拉格朗日方程 …… 61
4.3.2 有势力、回转力与耗散力 …… 64
4.3.3 拉格朗日方程的几种具体形式 …… 66
4.4 罗斯方程 …… 67
4.5 拟拉格朗日方程 …… 68
4.6 哈密顿正则方程 …… 73
4.6.1 哈密顿正则方程 …… 73
4.6.2 正则方程的首次积分 …… 77
4.6.3 泊松括号 …… 79
4.6.4 泊松定理 …… 80
4.6.5 正则变换 …… 81
4.6.6 哈密顿—雅可比方程 …… 83
思 考 题 …… 84
**第 5 章 凯恩方程** …… 85
5.1 广义速度、偏速度、偏角速度 …… 85
5.2 广义主动力、广义惯性力 …… 87
5.3 凯恩方程 …… 90
5.4 分 析 …… 91
思 考 题 …… 92
**第 6 章 空间运动几何与时间** …… 93
6.1 地球的运动 …… 93
6.2 时间系统 …… 93
6.3 相关坐标系 …… 94
6.3.1 春分点地心惯性坐标系 …… 94
6.3.2 地心赤道旋转坐标系 …… 94


6.3.3 坐标系之间的关系 …… 95
6.4 地球参考模型 …… 96
6.4.1 参考椭球的几何特性 …… 96
6.4.2 椭球形地球的引力 …… 97
6.4.3 地球周围大气的运动 …… 97
思考题 …… 98


## 下篇 飞行器模型


第7章 有翼导弹的运动方程 …… 101
7.1 坐标系和运动变量的定义 …… 101
7.1.1 地面坐标系 …… 101
7.1.2 本体坐标系 …… 102
7.1.3 气流速度坐标系 …… 104
7.1.4 航迹速度坐标系 …… 106
7.1.5 弹道坐标系 …… 106
7.1.6 各坐标系之间的综合关系 …… 108
7.2 作用在导弹上的力和力矩 …… 108
7.3 导弹运动方程 …… 109
7.3.1 质心运动的动力学方程 …… 110
7.3.2 导弹绕质心转动的动力学方程 …… 112
7.3.3 导弹质心运动的运动学方程 …… 113
7.3.4 导弹绕质心转动的运动学方程 …… 114
7.3.5 导弹质量方程 …… 115
7.3.6 其他方程 …… 116
7.4 求解流程 …… 117
思考题 …… 119
第8章 滚转导弹的运动方程 …… 120
8.1 坐标系和运动变量的定义 …… 120
8.1.1 准弹体坐标系 …… 120
8.1.2 准气流速度坐标系 …… 120
8.1.3 准航迹速度坐标系 …… 121
8.1.4 坐标系之间的关系 …… 121
8.2 作用在滚转导弹上的力和力矩 …… 125
8.3 滚转导弹的运动方程 …… 127

8.3.1 质心运动的动力学方程 …… 127
8.3.2 绕质心转动的动力学方程 …… 129
8.3.3 运动学方程 …… 130
8.4 求解流程 …… 132
思考题 …… 134
**第 9 章 运载火箭(弹道导弹)的运动方程** …… 135
9.1 坐标系和运动变量的定义 …… 135
9.1.1 拟垂线坐标系 …… 135
9.1.2 垂线坐标系 …… 135
9.1.3 发射坐标系 …… 136
9.1.4 发射点惯性坐标系 …… 136
9.1.5 气流速度坐标系 …… 136
9.1.6 弹道坐标系 …… 136
9.1.7 坐标系之间的关系及参量定义 …… 136
9.2 作用在火箭上的力和力矩 …… 139
9.3 质心运动方程 …… 141
9.3.1 发射段质心的运动方程 …… 142
9.3.2 再入段质心的运动方程 …… 144
9.3.3 自由飞行段质心的运动方程 …… 146
9.4 姿态运动方程 …… 147
9.5 其他方程 …… 147
9.6 求解流程 …… 148
思考题 …… 151
**第 10 章 人造地球卫星的运动方程** …… 152
10.1 中心引力运动 …… 152
10.1.1 运动的微分方程 …… 152
10.1.2 运动方程 …… 153
10.2 二体问题 …… 156
10.3 Kepler 轨道及其描述 …… 157
10.3.1 kepler 轨道 …… 157
10.3.2 速度分布 …… 158
10.3.3 轨道能量与轨道周期 …… 160
10.3.4 轨道要素 …… 162
10.3.5 轨道的时间历程 …… 163

10.3.6 相关坐标系的定义 …… 165
10.3.7 由 $r_0$、$V_0$ 计算轨道根数 …… 167
10.3.8 用正则方程研究 Kepler 轨道 …… 168
10.4 轨道摄动方程 …… 172
10.4.1 作用在卫星上的摄动力 …… 172
10.4.2 摄动运动的特点与描述方法、密切轨道 …… 176
10.4.3 摄动运动方程 …… 177
10.5 卫星的姿态运动方程 …… 181
10.5.1 卫星姿态的定义 …… 182
10.5.2 拟拉格朗日方程的具体形式 …… 182
10.5.3 刚体卫星的姿态运动 …… 187
10.5.4 刚体＋飞轮组合体卫星的姿态运动 …… 191
10.5.5 刚体＋单框架力矩陀螺组合体卫星的姿态运动 …… 197
10.5.6 刚体＋双框架力矩陀螺组合体卫星的姿态运动 …… 202
10.6 关于建模方法的选取问题 …… 206
思 考 题 …… 207
**第 11 章 深空探测航天器的运动方程** …… 208
11.1 三体问题 …… 208
11.2 限制性三体问题 …… 209
11.2.1 二体问题的解 …… 210
11.2.2 圆型限制性三体问题 …… 213
11.2.3 椭圆型限制性三体问题 …… 215
11.2.4 限制性三体问题的首次积分 …… 218
11.2.5 圆型限制性三体问题的平动点 …… 219
思 考 题 …… 221
**附录 A 球面三角基本公式** …… 222
A.1 球面角、球面二角形、球面三角形 …… 222
A.2 球面三角形的计算公式 …… 223
**参考文献** …… 226

# 上篇

# 力学原理与方法

# 第1章 绪 论

本书中所讨论的航天器包括：导弹、运载火箭、人造地球卫星、深空探测器等飞行器。

飞行动力学是研究飞行器运动规律的科学。飞行器运动包括：飞行器质心的运动和飞行器姿态的运动。

由牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}$$

可知，当给定作用于飞行器上的力 $\boldsymbol{F}$，就可以通过积分求出飞行器质心的运动速度 $\boldsymbol{v}$。其中 $m$ 是飞行器的质量。再通过积分

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$$

可进一步求得飞行器质心的位置 $\boldsymbol{r}$。

反过来讲，如果希望飞行器质心按给定的规律 $\boldsymbol{r}(t)$ 运动，则可以通过调节作用于飞行器上的力 $\boldsymbol{F}$ 来实现。

由动量矩定理(矩心取在质心)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_c$$

可知，当给定作用于飞行器上的力对质心的矩 $\boldsymbol{M}_c$，则可以通过积分求出飞行器相对于质心的动量矩 $\boldsymbol{H}_c$。进一步积分可求得姿态角(详细见 7.3.4 节相关内容)。

反之，如果希望飞行器姿态按给定的规律运动，则可以通过调节作用于飞行器上的力矩 $\boldsymbol{M}_c$ 来实现。

已知力求运动，是力学的正问题；已知运动求力，是力学的逆问题。从学科分类讲，正问题从理论上研究飞行器的运动与力的关系，归属于飞行动力学的研究内容；逆问题是在实践中控制飞行器的运动，归属于飞行器控制的研究内容。飞行动力学在于“认识”力作用下飞行器的运动特征，飞行器控制在于通过施加力来“实践”所需的运动。只有对运动有充分的认识，才能更好地实践运动。所以，飞行动力学是基础，飞行器控制是归宿。航天科技工作者，应该学好飞行动力学。

飞行动力学的研究内容可归纳为三部分：

第一，飞行器运动的描述。

不同类型飞行器的运动规律不尽相同。如：导弹按导引弹道飞行，运载火箭按发射轨道飞行，卫星在设计轨道上运动，深空探测器则依所需探测任务的轨迹飞行。如何正确、合理地

描述飞行器的运动，对深入分析飞行器的运动十分重要。

第二，建立飞行器的运动模型。

为了深入研究飞行器的运动，必须将飞行器的运动以数学方法表达清楚；即依据力学原理、数学方法，建立描述飞行器运动的数学模型。

第三，运动模型的解及解的特性。

通过一定的数学方法，分析、求解飞行器运动的数学模型，进一步得到运动的规律及特征性。导弹的动态特性包括：稳定性、操纵性、动态误差等。运载火箭的特性包括：射程、落点偏差、入轨参数等。卫星轨道特性包括：轨道根数、典型摄动运动等。

尽管不同类型航天器的运动规律和特性很不同，然而描述这些航天器运动、建立运动模型的思想是一致的。在上述研究内容中，第一、第二部分内容是必须掌握的，是飞行动力学的基础；第三部分内容可根据具体方向来作选择。本书系统地讲述前两部分内容，即飞行动力学的基础部分。第三部分内容由相应专门课程介绍。

应用中的大多数航天器可以看成一个刚体，建立这种航天器的模型相对简单。有些航天器则不能作为刚体，可能是挠性体、多个刚体或它们的组合体。建立这些航天器的数学模型相对要复杂得多。本书也要给出建立这些模型的理论和方法，为学生以后能够正确地分析、处理更为复杂的航天器打下基础。

本书的内容安排：

全书分为上、下两篇。上篇阐述建立飞行动力学模型所需的数学、力学理论和方法；下篇则应用上篇中的理论和方法具体建立各种航天飞行器的飞行动力学模型。

上篇注重总结、分析不同方法的特点和适用对象，便于以后能结合具体问题，更加合理、正确、恰当地选用相应的分析方法；下篇则强调力学分析过程，即运动分析－受力分析－力学原理和数学方法应用。

# 第2章 矢量与坐标变换

## 2.1 矢 量

矢量是一种既有大小又有方向的量，常用黑斜体字母表示，如 $\boldsymbol{u}$。在飞行动力学中，许多物理量都是矢量，如力、位移、角速度、动量矩等都是矢量。

由以上定义可知，矢量本身与坐标系无关。但在实际应用中，经常用坐标系上的投影表示矢量。

设有坐标系 $Ox_a y_a z_a$（简记为 $S_a$），其单位矢量为 $\boldsymbol{i}_a,\boldsymbol{j}_a,\boldsymbol{k}_a$。则矢量 $\boldsymbol{u}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{u}=u_{xa}\boldsymbol{i}_a+u_{ya}\boldsymbol{j}_a+u_{za}\boldsymbol{k}_a$$

称 $\{u_{xa}\quad u_{ya}\quad u_{za}\}^{\mathrm{T}}$ 为矢量 $\boldsymbol{u}$ 在坐标系 $S_a$ 上的分量列阵，记作

$$\{\boldsymbol{u}\}_a=\{u_{xa}\quad u_{ya}\quad u_{za}\}^{\mathrm{T}} \tag{2.1.1}$$

由此可见：当坐标系确定后，矢量的分量列阵才有意义，并且与矢量一一对应。在坐标系明确的情况下，有时也将分量列阵称为矢量。

矢量 $\boldsymbol{u}$ 和矢量 $\boldsymbol{v}$ 的点乘积可以表示为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(u_{xa}\boldsymbol{i}_a+u_{ya}\boldsymbol{j}_a+u_{za}\boldsymbol{k}_a)\cdot(v_{xa}\boldsymbol{i}_a+v_{ya}\boldsymbol{j}_a+v_{za}\boldsymbol{k}_a)=\{\boldsymbol{u}\}_a^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{v}\}_a=\{\boldsymbol{v}\}_a^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{u}\}_a$$

设矢量 $\boldsymbol{w}$ 是矢量 $\boldsymbol{u}$ 和矢量 $\boldsymbol{v}$ 的叉乘积，则

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(u_{ya}v_{za}-u_{za}v_{ya})\boldsymbol{i}_a+(u_{za}v_{xa}-u_{xa}v_{za})\boldsymbol{j}_a+(u_{xa}v_{ya}-u_{ya}v_{xa})\boldsymbol{k}_a$$

叉乘积的矩阵形式为

$$\{\boldsymbol{w}\}_a=\{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\}_a=[\boldsymbol{u}]_a^{\times}\{\boldsymbol{v}\}_a \tag{2.1.2}$$

其中 $[\boldsymbol{u}]_a^{\times}$ 称为矢量 $\boldsymbol{u}$ 在坐标系 $S_a$ 中的叉乘矩阵，定义为

$$[\boldsymbol{u}]_a^{\times}=\begin{bmatrix}0 & -u_{za} & u_{ya}\\ u_{za} & 0 & -u_{xa}\\ -u_{ya} & u_{xa} & 0\end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

显然，叉乘矩阵具有性质

$$([\boldsymbol{u}]_a^{\times})^{\mathrm{T}}=-[\boldsymbol{u}]_a^{\times} \tag{2.1.4}$$

## 2.2 坐标变换

航天器在飞行过程中，作用在其上的力有地球的引力、发动机的推力、空气动力等。一般

情况下，各种力分别表示在相应的坐标系中。例如：地球引力在地球固连坐标系上表示，发动机的推力在本体坐标系上表示，而气动力又便于在气流速度坐标系中表示，等等。而要建立航天器的动力学方程，必须将定义在各坐标系中的力变换到某个统一的坐标系中。因此，掌握好坐标系之间的变换关系十分重要。

### 2.2.1 坐标变换

坐标变换是指一个矢量在两个不同坐标系上分量列阵之间的关系。本书中的坐标系均采用右手直角坐标系。

如图 2.1 所示，$S_a$、$S_b$ 为两个坐标系，$\boldsymbol{u}$ 为一矢量，则

$$\boldsymbol{u}=u_{xb}\boldsymbol{i}_b+u_{yb}\boldsymbol{j}_b+u_{zb}\boldsymbol{k}_b=u_{xa}\boldsymbol{i}_a+u_{ya}\boldsymbol{j}_a+u_{za}\boldsymbol{k}_a \tag{2.2.1}$$

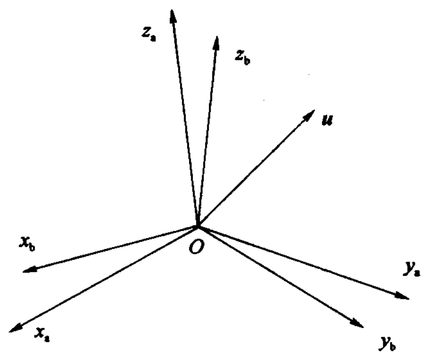


图 2.1 矢量与坐标系

式(2.2.1)两边点乘 $\boldsymbol{i}_b$

$$u_{xb}\boldsymbol{i}_b\cdot\boldsymbol{i}_b+u_{yb}\boldsymbol{j}_b\cdot\boldsymbol{i}_b+u_{zb}\boldsymbol{k}_b\cdot\boldsymbol{i}_b=u_{xa}\boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{i}_b+u_{ya}\boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{i}_b+u_{za}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{i}_b$$

由于单位矢量的正交性：

$$\boldsymbol{i}_b\cdot\boldsymbol{i}_b=1,\boldsymbol{j}_b\cdot\boldsymbol{i}_b=0,\boldsymbol{k}_b\cdot\boldsymbol{i}_b=0$$

所以上式可以表示为

$$u_{xb}=u_{xa}\boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{i}_b+u_{ya}\boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{i}_b+u_{za}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{i}_b$$

同理，在式(2.2.1)两边分别点乘以 $\boldsymbol{j}_b$、$\boldsymbol{k}_b$，可得

$$u_{yb}=u_{xa}\boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{j}_b+u_{ya}\boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{j}_b+u_{za}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{j}_b$$

$$u_{zb}=u_{xa}\boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{k}_b+u_{ya}\boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{k}_b+u_{za}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{k}_b$$

整理以上三式可得

$$\begin{Bmatrix}u_{xb}\\u_{yb}\\u_{zb}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{i}_b & \boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{i}_b & \boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{i}_b\\ \boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{j}_b & \boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{j}_b & \boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{j}_b\\ \boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{k}_b & \boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{k}_b & \boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{k}_b\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{xa}\\u_{ya}\\u_{za}\end{Bmatrix} \tag{2.2.2}$$

此式表示了矢量 $\boldsymbol{u}$ 在坐标系 $S_a$ 和 $S_b$ 上投影列阵之间的变换关系。

定义由 $S_a$ 到 $S_b$ 的变换矩阵

$$\boldsymbol{L}_{ba}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{i}_b & \boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{i}_b & \boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{i}_b\\ \boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{j}_b & \boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{j}_b & \boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{j}_b\\ \boldsymbol{i}_a\cdot\boldsymbol{k}_b & \boldsymbol{j}_a\cdot\boldsymbol{k}_b & \boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{k}_b\end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

则式(2.2.2)可以表示为

$$\{\boldsymbol{u}\}_b=\boldsymbol{L}_{ba}\{\boldsymbol{u}\}_a \tag{2.2.4}$$

坐标变换矩阵是正交矩阵[1]，具有以下性质：

$$\boldsymbol{L}_{ba}=(\boldsymbol{L}_{ab})^{-1}=(\boldsymbol{L}_{ab})^{\mathrm{T}} \tag{2.2.5}$$

$$\det(\boldsymbol{L}_{ba})=\pm1 \tag{2.2.6}$$

只有当坐标系 $S_a$ 和 $S_b$ 的左右手性质(左手坐标系、右手坐标系)不同，上式右边才取－1。在飞行动力学中均采用右手直角坐标系，所以上式右边取＋1。

分析式(2.2.4)和(2.2.3)可以看出：坐标变换由变换矩阵确定，而变换矩阵又取决于两个坐标系之间的关系。也就是说，当两个坐标系之间的关系给定后，即可确定坐标变换矩阵。所以，在不致概念混淆的情况下，本书中坐标变换也指坐标系到坐标系之间的变换。

### 2.2.2　坐标变换矩阵的传递性质

设有三个坐标系 $S_a$、$S_b$ 和 $S_c$，矢量 $\boldsymbol{u}$ 在这些坐标系之间的坐标变换关系为

$$\{\boldsymbol{u}\}_b=\boldsymbol{L}_{ba}\{\boldsymbol{u}\}_a,\ \{\boldsymbol{u}\}_c=\boldsymbol{L}_{cb}\{\boldsymbol{u}\}_b,\ \{\boldsymbol{u}\}_c=\boldsymbol{L}_{ca}\{\boldsymbol{u}\}_a$$

则

$$\{\boldsymbol{u}\}_c=\boldsymbol{L}_{cb}\{\boldsymbol{u}\}_b=\boldsymbol{L}_{cb}\boldsymbol{L}_{ba}\{\boldsymbol{u}\}_a$$

比较可以得出

$$\boldsymbol{L}_{ca}=\boldsymbol{L}_{cb}\boldsymbol{L}_{ba} \tag{2.2.7}$$

即坐标变换矩阵具有传递性质。

### 2.2.3　基元旋转矩阵

坐标系绕它的一个轴的旋转称为基元旋转。图 2.2 表示坐标系 $Ox_ay_az_a(S_a)$ 绕 $x_a$ 轴转过角 $\alpha$ 成为坐标系 $S_b$ 的一个基元旋转。这个旋转可以用符号表示为

$$Ox_ay_az_a(S_a)\xrightarrow{\boldsymbol{L}_x(\alpha)}Ox_by_bz_b(S_b)$$

其中由 $S_a$ 到 $S_b$ 的变换矩阵

$$\boldsymbol{L}_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \tag{2.2.8}$$