# 实变函数

SHIBIAN HANSHU

（第2版）

黄仿伦 编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

# 实变函数

（第 2 版）

黄仿伦　编著





北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

实变函数/黄仿伦编著．—2版．—合肥:安徽大学出版社,2012.9
ISBN 978-7-5664-0580-7

Ⅰ.①实… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①实变函数 Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第208954号

# 实变函数(第2版)

黄仿伦 编著

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路3号 邮编230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
印 刷:安徽省人民印刷有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:170mm×240mm
印 张:13.5
字 数:258千字
版 次:2012年9月第2版
印 次:2012年9月第1次印刷
定 价:25.00元
ISBN 978-7-5664-0580-7

责任编辑:武溪溪 张明举　　装帧设计:戴 丽
责任印制:赵明炎

# 第二版序

第二版按照安徽大学对数学科学学院各专业应具备的数学基础的要求，结合第一版以来的教学实践和教学研究，在保留第一版特色的原则下修订而成。除对第一版全书作全面的修订外，还对某些内容进行改写，使之更加严谨。全书教学需 72 学时，内含习题课 18 学时。

广大读者与教师为本书的修订提供了很多宝贵的建议和意见。本次修订工作得到安徽大学教务处以及数学科学学院领导的支持，特别得到安徽大学”211 工程”三期建设”创新人才培养”项目资金的资助，对此表示由衷的感谢。

在本次修订中，采纳了安徽大学数学科学学院胡舒合教授仔细审阅了全书后所提出的不少好的意见和建议。我还要特别感谢我的研究生汪巧云同学，她的精美打字和排版为本书增色不少。

修订后的版本虽经反复推敲，但由于作者水平有限，书中的不当之处仍难免存在，恳请广大同行和读者给予指正（敬请致函 flhuang@ahu.edu.cn ），以便进一步提高本书质量。

黄仿伦

安徽大学数学科学学院

2012 年 8 月

# 第一版序

本书是笔者长期在安徽大学数学系讲授《实变函数》课程的讲义的基础上形成的，与国内外同类教材相比，本书有如下特点：

1. 我们将前六章的内容都集中在一维数直线上的 Lebesgue 测度和积分理论，最后一章讲授一般集合上的测度与积分，等学生有了完整的数直线上的 Lebesgue 测度与积分理论以后，再去理解抽象的测度与积分，这正是国外同类教材的特点。

2. 书中我们写进一些实用性内容，如： Levi 定理中的非负性去掉，加上测度为有限的集合上的有界可测函数列条件， Levi 定理结论同样成立。又如 “ Riemann 可积一定 Lebesgue 可积，且积分值相等”，只需加上被积函数的保号性。同时增加了解释数学分析中 Riemann 可积的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续的完整理论，等等。

3. 简化了一些定理的证明，书中有些定理的证明是笔者在长期的教学过程中积累出来的。

4. 在习题的配备上，我们搜集了许多难度适宜的题目。

本书是安徽大学主干课程《实变函数》建设小组的成果，在此我非常感谢刘永生教授为此书编写了第七章，感谢胡舒合教授审阅了全书，在出版本书的过程中，得到了安徽大学出版社资金的资助及数学系的大力支持，笔者谨在此对他们表示诚挚的感谢。

在编写本书的过程中，我们参考了国内外许多同类教材，在此恕不一一列名致谢。

由于笔者水平有限，加上编写时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请读者批评指正。

黄仿伦

2001 年 4 月

# 目 录

# 第一章 集 合

## 1.1 集合及其运算

集合论自 19 世纪 80 年代由德国数学家 Cantor 创立以来，已成为现代数学的基础，实变函数论所需要的集合论知识只是非常基础而又十分有限的.

集合是一个不可以精确定义的数学基本概念之一，所以我们只给予一种描述. 我们把具有某种特定性质的对象的全体称为集合或简称为集，其中每个对象称为该集的元素或元. 例如自然数的全体是一集，每个自然数都是它的元素；又如直线上点的全体是一集，直线上每一点都是它的元素；实系数多项式全体为一集，每个实系数多项式都是它的元素.

一般地说，用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 来表示集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots, x, y, z$ 来表示集合的元素. 设 $A$ 是一个集，若 $a$ 是 $A$ 的元素，则记为 $a \in A$（读作 $a$ 属于 $A$）； $a$ 不是 $A$ 的元素用 $a \notin A$ 表示（读作 $a$ 不属于 $A$）. 我们约定：

i) 对给定的集，一元要么属于它，要么不属于它，二者必居其一；

ii) $A \notin A$, 即集自身不能看成 $A$ 的元；

若集 $A$ 的元只有有限个，称 $A$ 为有限集；不含任何元素的集称为空集，用记号 $\emptyset$ 表示. 一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集.

表示集合的方法有两种，第一是列举法，也就是说，在花括号 $\{\}$ 内将其元素一一列举出来，第二是用元素所满足的一定条件来描述它，即可表示为

$$A = \{x : x \text{ 具有性质} P\}.$$

例如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解组成的集合可表示为

$$\{1, -1\} \quad 或 \ \{x : x^2 - 1 = 0\}.$$

设给定一集 $A$ 与一性质 $P$, 用记号

$$\{a : a \in A, P(a)\}$$

表示 $A$ 中一切具有性质 $P$ 的元 $a$ 所成的集，有时简记为 $A\{P(a)\}$.

设 $A$ 和 $B$ 是两个集，若集 $A$ 的每个元素都是集 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的子集，记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A$$

分别读作 $A$ 包含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$.

若 $A \subset B$, 且存在一个元 $x \in B$ 而 $x \notin A$, 则称 $A$ 是 $B$ 的真子集. 为方便起见，我们规定空集 $\emptyset$ 是任何集的子集. 若 $A$,$B$ 是两个集，若同时有 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 成立，则称集合 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A = B$.

**定义 1.1** 设 $A$ 与 $B$ 是两个集，定义运算

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}, \\ A - B &= \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \end{aligned}$$

分别为 $A$ 与 $B$ 的并集、交集、差集。当 $B \subset A$ 时，差集 $A - B$ 又称为 $B$ 关于 $A$ 的补集，记为 $\mathscr{C}_A B$.

为直观起见， $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ 可用下列 Venn 图表示 (见图 1).

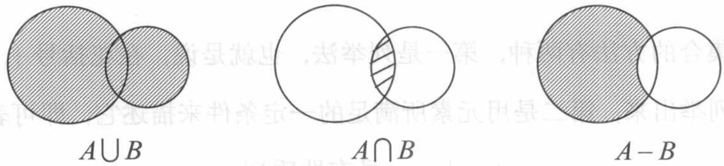


图 1

关于并与交运算有下列重要运算规律.

**定理 1.1** 设 $A,B,C$ 是集，则有

(i) 交换律 $A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A;$

(ii) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$$

(iii) 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

**证**：仅证 (iii) 第一条，其余留给读者自己证明.

因为 $A\cap B\subset A\cap(B\cup C)$ 且 $A\cap C\subset A\cap(B\cup C)$，所以 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$.

另一方面，对于每一个 $x\in A\cap(B\cup C)$，有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$. 若 $x\in B$，则 $x\in A\cap B$; 若 $x\notin B$，则 $x\in C$. 所以 $x\in A\cap C$，从而 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 这就证明了 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

定理 1.1 可以推广到无限多个集合的情形. 设 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ 是任意一族集，其中 $I$ 称为指标集，对于每一个指标 $\alpha\in I$，相应有一个集 $A_\alpha$ 与之对应，定义这族集的并集为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\text{存在}\alpha\in I,\ \text{使}x\in A_\alpha\};$$

定义这族集的交集为

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\forall\,\alpha\in I,\ \text{有}x\in A_\alpha\}.$$

不难验证分配律具有下列更一般的形式

$$A\bigcup\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\bigcup A_\alpha),\ A\bigcap\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\bigcap A_\alpha).$$

当两个集的交集非空时，称这两个集相交；当两个集的交集是空集时，称这两个集不相交；说一个集族是不相交的是指该集族中任何两个集都不相交.

当我们在研究问题时，如果所考虑的一切集都是 $X$ 的子集，这时便称 $X$ 为基本集. 例如限制在数直线上研究各种不同的点集，那么数直线是基本集，对于任一基本集 $X$ ，差集 $X-A$ 称为 $A$ 关于 $X$ 的补集或简称为 $A$ 的补集，记为 $\mathscr{C}A$.

对于补集，有下列简单事实：

$$\begin{array}{lll} A\cup\mathscr{C}A=X, & A\cap\mathscr{C}A=\emptyset, & \mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A, \\ \mathscr{C}X=\emptyset, & \mathscr{C}\emptyset=X, & A-B=A\cap\mathscr{C}B, \end{array}$$

$$A\subset B\Rightarrow\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B,\qquad A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\subset\mathscr{C}B.$$

**定理 1.2** 设 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 是基本集 $X$ 中的一族集，则有下列 De Morgan 对偶律：

(i) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$;

(ii) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$.

**证**：设 $x\in\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)$ ，故 $x\notin\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$ ，则对于每一个 $\alpha\in I, x\notin A_\alpha$ ，即：对于每一个 $\alpha\in I, x\in\mathscr{C}A_\alpha$, 因此 $x\in\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$, 所以 $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$. 同理可证 $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)\supset\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$ ，这样 (i) 得证.

由 (i) 取补集得 $\mathscr{C}(\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha))=\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha))$ ，即 $\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha=\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha))$ ，再把 $A_\alpha$ 换成 $\mathscr{C}A_\alpha$ ，即得 (ii).

## 1.2 映射与势

由数学分析中的函数概念，得到下面映射的定义.

**定义 2.1** 设 $A, B$ 是两个非空集, 若依一定的法则 $f$, 使对于每一个 $x \in A$，在 $B$ 中有一个确定的元素 $y$ 与之对应，则称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射，记为 $f: A \to B$; 称 $y$ 为 $x$ 在映射 $f$ 下的像，记为 $y = f(x)$ ，这时称 $A$ 为 $f$ 的定义域，称 $A$ 中所有元素的像的全体

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

为 $f$ 的值域.

设给定映射 $f: A \to B$, 如果 $B = f(A)$, 则称 $f$ 是满射或映上的. 由于 $f(A) \subset B$ 是恒成立的，所以验证一个映射 $f$ 是满射只需证明 $B \subset f(A)$, 即对 $\forall y \in B$, 存在 $x \in A$, 使得 $y = f(x)$.

设 $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ ，引入记号

$$f(A_0) = \{f(x) : x \in A_0\}, f^{-1}(B_0) = \{x : x \in A, f(x) \in B_0\},$$

称 $f(A_0)$ 为 $A_0$ 的像 (集)，而称 $f^{-1}(B_0)$ 为 $B_0$ 在映射 $f$ 下的原像 ( 集 ).

对于 $A$ 的任一子集族 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 及 $B$ 的任一子集族 $B_\lambda(\lambda \in \Lambda)$, 有下列简单事实:

$$\begin{aligned}
&f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0, && f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0 \\
&f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha), && f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(A_\alpha) \\
&f^{-1}(\bigcup_\lambda B_\lambda) = \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda), && f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda) = \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda) \\
&f^{-1}(\mathscr{C} B_0) = \mathscr{C} f^{-1}(B_0).
\end{aligned}$$

**定义 2.2** 设 $f: A \to B$, 若对于任何 $x_1, x_2 \in A$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个单射. 若单射 $f$ 也是满射，则称 $f$ 是

$A$ 到 $B$ 的双射或一一映射.

由于一命题与其逆否命题等价，所以要验证一个映射 $f$ 是单射只要验证由 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

**定义 2.3** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射 (这时 $B=f(A)$), 则对于每一个 $y\in B$, 有唯一的 $x\in A$. 使 $y=f(x)$, 我们称 $B$ 上的这个映射 (记为 $f^{-1}$)$f^{-1}:B\to A$ 为 $f$ 的逆映射. 存在逆映射的映射 $f$ 称为可逆映射.

设给定两个映射 $f:A\to B, g:B\to C$ ，由关系 $g(f(x))(x\in A)$ 所确定的映射称为 $f$ 与 $g$ 的复合映射，记为 $g\circ f$, 即 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

**定义 2.4** 设 $X$ 是基本集， $A\subset X$, 称函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

为集 $A$ 的特征函数.

显然，对于不同的子集，其特征函数也不同. 子集 $A$ 与它的特征函数之间的对应是一一对应的.

**定义 2.5** 设 $A,B$ 为两个集，如果存在一一映射 $f$, 使 $f(A)=B$, 则称 $A$ 与 $B$ 成一一对应或互相对等，记为 $A\backsim B$.

易见，对等关系具有下列性质:

(i) 自反性　$A\backsim A$;

(ii) 对称性　若$A\backsim B$则$B\backsim A$;

(iii) 传递性　若$A\backsim B$, $B\backsim C$, 则$A\backsim C$.

由对等的定义可知,当两个有限集互相对等时,它们的元素的个数必相同,

至于无限集采用“元素的个数”就不适宜了.

为了叙述方便，我们用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，而 $\mathbf{N}$ 表示自然数集.

**定义 2.6** 与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集称为可列集或可数集.

换句话说，可列集的一切元可用自然数编号，所以要证明一个集是可列集只需证明存在使此集与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的一一映射，或者证明它可以按自然数顺序排列.

**例 1**: 正偶数全体是可列集，因为存在一一映射 $f(n)=2n, n\in\mathbf{N}$.

**例 2**: $\mathbf{N}\backsim\mathbf{Z}$, 一一映射为 $f(n)=(-1)^{n+1}[\frac{n}{2}], n\in\mathbf{N}$.

可列集是无限集中“元素的个数最少”的一类集，这句话的精确含义由下列定理表出.

**定理 2.1** 任一无限集含有一个可列子集.

**证**：设 $A$ 为一无限集，取 $x_1\in A$, 再从 $A-\{x_1\}$ 中取一元，记为 $x_2,\cdots$, 设已选出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，因为 $A$ 为无限集，所以 $A-\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\neq\emptyset$, 于是又从 $A-\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\neq\emptyset$ 中可再选一元，记为 $x_{n+1}$, 这样，我们就得到一集合： $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots\}$ 。这是一个可列集，且是 $A$ 的子集.

**推论 1** 凡无限集必与它的一个真子集对等.

**证**：设 $A$ 是无限集，由定理 2.1, $A$ 存在可列子集 $\{a_n\}, n\in\mathbf{N}$, 令 $B=A-\{a_1\}$ ，则 $B$ 是 $A$ 的真子集. 作映射 $f:A\to B$, 当 $a\in A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$, $f(a)=a$, 当 $a\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$, $f(a_k)=a_{k+1}, k=1,2,\cdots$, 易见 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一一对应，所以 $A\sim B$.

所证事实是无限集的一个特征，因而也可作为无限集的定义.

**推论 2** 集 $A$ 是无限集当且仅当 $A$ 与它的某个真子集对等.

**定理 2.2** 若 $A_n(n \in \mathbf{N})$ 为可列集，则并集 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是可列集.

**证**：只需讨论 $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ 的情形，设

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1j}, \cdots\}, \\
&A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2j}, \cdots\}, \\
&\cdots \\
&A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots\}, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

则 $A$ 中的元素可排列如下：

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\}$$

其规则是 $a_{11}$ 排第一，当 $i+j = i'+j' = n > 2, i < i'$ 时， $a_{ij}$ 排在 $a_{i'j'}$ 前.

定理 2.2 可以解释为可列个可列集的并集为可列集.

**例 3**: 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

**证**: 这只需证明正有理数集 $\mathbf{Q}_+ = \{p/q\}$ 为可列集，其中 $p, q$ 都为正整数且互质，而将 $\mathbf{Q}_+$ 中的元素看成序对 $(p, q)$ 并应用上述定理.

**例 4**: $\mathbf{R}$ 上互不相交的开区间族至多是可列集.

**证**：这是因为每一个开区间可取一有理数，不同区间中的有理数不同.

下面定理表明不可列集是存在的.

**定理 2.3** 点集 $[0,1] = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ 是不可列集。

**证**：用反证法. 假定 $[0, 1]$ 可列，则 $[0, 1]$ 中的点可排为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

把区间 $[0,1]$ 三等分，则显然 $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ 中至少有一个不含有 $x_1$，用 $I_1$ 表示任一这样的区间，即 $x_1 \notin I_1$; 把 $I_1$ 三等份，在它的左与右两个闭区间中必有一个不含有 $x_2$, 用 $I_2$ 表示相应的区间，即 $x_2 \notin I_2$; 同样把 $I_2$ 三等分，又可得不含有 $x_3$ 的一个闭区间 $I_3, \cdots$，根据归纳法，得到闭区间列 $\{I_n\}, n \in \mathbf{N}$，满足条件：

(i) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$;

(ii) $x_n \notin I_n, n \in \mathbf{N}$;

(iii) 根据数学分析中的闭区间套定理，$I_n$ 的长度为 $3^{-n}$, 它当 $n \to \infty$ 时，趋于 0, 存在点 $\zeta \in I_n, n \in \mathbf{N}$. 由于 $x_n \notin I_n$ 对任一 $n$ 成立，故 $\zeta$ 不会是任一 $x_n$, 但 $\zeta$ 显然属于 $[0,1]$, 发生矛盾，这表明 $[0,1]$ 是不可列点集.

可列集是无限集中最简单的一类集. 设想把一切集进行分类，凡彼此对等的归于同一类，不对等的属于不同的类，对于每类集我们给予一个标志，表示"集合元素的多少"，并用势来称呼它. 例如，可列集的势记为 $\aleph_0$，(读作阿列夫零). 与区间 $[0,1]$ 对等的集的势记为 $\aleph$(读作阿列夫), 并称为连续集的势. 由定理 2.3 知道，$\aleph$ 与 $\aleph_0$ 不同，对于一般集 $A$，用 $\overline{\overline{A}}$ 表示它的势.

关于势的大小，仍借用对等来定义.

**定义 2.7** 设 $A, B$ 为两个集，而 $A$ 与 $B$ 的一个子集对等，则称 $A$ 的势小于或等于 $B$ 的势，记为 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$，或 $\overline{\overline{B}} \geq \overline{\overline{A}}$. 若 $A$ 与 $B$ 不对等，且 $A$ 与 $B$ 的一个子集对等，则称 $A$ 的势小于 $B$ 的势，记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

具有 $n$ 个元素的非空有限集的势记为 $n$，而空集的势记为 0，那么有下列势的关系

$$0 < n < \aleph_0 < \aleph.$$