上海财经大学信息系经济数学教研室 编

运筹学

同济大学出版社

运 筹 学

上海财经大学信息系
经济数学教研室编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了运筹学中常用的若干分支，主要内容有：线性规划、运输问题和分配问题、目标规划、动态规划、整数规划、图与网络、存储模型、决策和对策论、排队论和模拟等共十章。每一章除介绍基本原理和方法外，还列举了较多的结合经济管理方面的例题和习题。

本书可作为财经和工科各专业"运筹学"课程的教材或教学参考书，也可供企事业单位的管理人员和干部参考。

责任编辑：缪临平
封面设计：李志云

运 筹 学
上海财经大学经济数学教研室编
同济大学出版社出版发行
(上海四平路1239号)
常熟市文化印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：14.375 字数：367千字
1990年9月第1版 1990年9月第1次印刷
印数：1—5000 定价：5.80元
ISBN 7-5608-0695-3/O·73

前　言

为适应我校各专业对“运筹学”课程的需要，我室于1986年4月曾编写了《运筹学》教材。经本校和夜大学内四年来的教学实践，基本上能符合教学要求。现根据试用情况，在原教材的基础上加以修改和补充。在本教材的编写过程中，我们参考了国内外有关的运筹学教材，结合我国实际情况，力求深入浅出地叙述运筹学中各个分支的基本原理和计算方法，并着重介绍它们在经济管理中的应用。书中每一章末尾有较多的习题，书末有习题答案和提示。本书可作为财经和工科各专业“运筹学”课程的教材或教学参考书，也可作为夜大学、函授大学、干部专修班的教材和自学用书。

本书共分十章，每一章介绍运筹学的一个分支。除第一、二、三、五、七、八章作为基本内容外，其余各章可根据教学课时和教学要求适当选用。

参加本书编写的老师有：朱幼文(第五、八章)；翁曼君(第六、七章)；张小英(第九章)；赵可培(第三章)和吴立煦(第一、二、四、十章)。本书由吴立煦主编。

由于编者的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，希望能得到读者的批评和指正。

经济数学教研室

1990年5月

目　录

绪　论

运筹学是大专院校各种类型的管理专业所必修的一门主要课程。在现代化的管理中，运筹学正起着日益重要的作用。

什么是运筹学?对此有各种不同的说法，但它们是大同小异。在我国前几年出版的百科全书中对运筹学是这样定义的:“运筹学是应用分析、试验和定量化的方法对经济管理系统中的人力、物力和财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理”。

运筹学所研究的问题到处可见。例如，一家工厂应该怎样安排生产才能使产量最多、利润最大或成本最少;一个批发站应该怎样把商品调运到各个门市部才能既满足门市部的要求又能使总运费最少;一个基建部门应该怎样安排各道工序才能使总的工期最短;一个农场应该怎样对各种农作物进行布局才能使总产量最高，等等。以上这些问题都有一个共同的特点，就是都是在特定的客观条件下，以多、快、好、省的最佳方案来达到预定的目的，这就是运筹学的基本思想。

运筹学的这种基本思想在我国很早就产生了。公元前四世纪春秋战国有个“田忌赛马”的故事。田忌是齐国的一位大臣。有一天齐王要和他赛马，规定各人把马分为上、中、下三等，每一次各人从自己的三类马中任选一匹马来比赛。三次比赛中，上、中、下、三种马规定各选一次，每次胜者可得千金。当时就同等级的马来说，齐王的马都比田忌的好。如果田忌以上、中、下三种马的顺序对齐王同等级的马，那就要输三千金。谋士孙膑给田忌出了个主意，他叫田忌以下马对齐王的上马，以上马对齐王的中马，再以中马对齐王的下马，这样一负二胜，反而可赢千金。这就是运筹学中的

对策论思想。当然这种思想是很朴素的，由于当时的生产力水平还很低，这种思想只能零星地应用在个别问题上，不可能成为一门有系统的学科。

和其他学科一样，运筹学作为一门独立的学科也是在社会生产力发展到一定水平才产生的。在第二次世界大战期间，英国为了抵御德国飞机的轰炸，曾邀请了一批科学家来研究和全国空中及地面防御有关的战略战术问题，成立了一个作战研究小组，并把这个小组所进行的科学活动称为“Operations Research”。我国翻译成“运筹学”，这是出于《史记》汉高祖本纪中，高祖曰：“夫运筹帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房。”这里的“运筹”，有主持战略、“作战研究”之意。

二次大战后，英、美等国把对运筹学的研究从军事部门转移到工业和商业部门，对企业管理作出了很大贡献。最近二三十年更把运筹学扩大应用到运输业、公用事业、城市规划、财政金融、医疗卫生、农业、教育以及图书馆等各个领域中。随着电子计算机的不断更新，更为运筹学的进一步发展提供了极其有利的条件。

到目前为止，运筹学已形成了很多分支。本教材准备对“线性规划”、“运输问题和分配问题”、“目标规划”、“动态规划”、“整数规划”、“图与网络”、“存储模型”、“决策和对策论”、“排队论”和“模拟”等十个分支进行简要介绍。

第一章 线性规划

线性规划(Linear Programming)是运筹学中研究得比较早而又比较成熟的一个分支。由于它的应用相当广泛，更加强了它在运筹学中的重要性。和其他学科一样，线性规划也是随着生产力的不断发展而产生的。由于当前现代化生产的规模越来越大，各个部门之间的相互联系也越来越密切，因此在企业的生产组织和管理方面就迫切需要应用一些数学方法来解决问题。早在本世纪30年代末40年代初，康托洛维奇（Конторвич）和希奇柯克(Hitchcok)等人在生产组织和运输等方面就开始应用线性规划这一数学方法，到40年代末由旦茨格(Dantzig)等人进一步从理论上给线性规划奠定了基础。随着电子计算机的不断发展，计算能力大大提高，更为线性规划在经济领域中的广泛应用提供了极为有利的条件。

一般说，发展国民经济，提高经济效果有两种途径。一种是采用先进技术，使用新的生产设备和原材料，使产量增加和质量提高；另一种是在物质条件不变的情况下，合理安排人力物力，加强生产管理，使生产成果达到最优。在采用后一种途径时，线性规划就能发挥作用。它所适用的范围从工农业、商业、交通运输业一直到教育、文化、军事和医疗部门，非常广泛。因此，线性规划已成为实行科学管理的一种重要手段。

所谓线性规划问题是在一定的目标下（例如使利润最大或者使成本最小）将有限的资源最有效地分配到各项经济活动中去的一种数学模型。通常在一个数学模型中有若干个需要确定的未知数，这称为**决策变量**。把模型所要达到的目标表示成这些变量的函数，称为**目标函数**。在实现目标的过程中，必然会有各种客观条

件的限制。把这些限制表示成和变量有关的等式和不等式，这称为**约束条件**。线性规划模型的特点是目标函数和约束变量的一些条件都是线性的。

§1.1 线性规划的数学模型及图解法

在这一节中先举几个线性规划问题的例子，建立它们的数学模型，再作出线性规划的一般定义。最后讲一下线性规划的图解法。

一、线性规划问题的举例

例 1.1 (生产安排问题)。假定某工厂生产甲、乙、丙三种产品，都要经过三种不同的工序加工。每一件产品所需要的加工时间(分钟)和每天对各道工序的加工能力(每天多少分钟)以及销售各种产品的单位利润如下表：

工 序	每件产品加工时间(分钟)			每天加工能力(分钟)
	甲产品	乙产品	丙产品	
一	1	2	1	430
二	3	0	2	460
三	1	4	0	420
单位利润(元)	3	2	5	

假定所生产的三种产品都能全部售出，问这三种产品每天要各生产多少件才能使获得的利润最大？

解：设 x_1、x_2、x_3 是甲、乙、丙三种产品的产量，z 是工厂的总利润。那么，

$$z=3x_1+2x_2+5x_3$$

这里 z 是目标函数，而 x_1、x_2、x_3 是决策变量。由于各种产品

在三道工序的加工时间不能超过现有的加工能力，所以，

对于第一道工序，有：$x_1+2x_2+x_3\leqslant 430$

对于第二道工序，有：$3x_1+2x_3\leqslant 460$

对于第三道工序，有：$x_1+4x_2\leqslant 420$

这些限制变量的条件都是约束条件。又由于 x_1、x_2、x_3 是表示产量，当然有

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0$$

这些称为**非负性约束条件**。

所以这个问题就是要求出 x_1、x_2、x_3，它们满足以上四个约束条件，并使 $z=3x_1+2x_2+5x_3$ 的值最大。

例 1.2 （营养搭配问题）。如果有甲、乙、丙、丁四种食品，单价各不相同，都含有不同成分的维生素，其含量和单价如下表：

维生素	单 位	甲	乙	丙	丁	每人每天最低需要量
A	国际单位	1,000	1,500	1,750	3,250	4,000
B	毫克	0.6	0.27	0.68	0.3	1
C	毫克	17.5	7.5	0	30	30
单价(元)		0.8	0.5	0.9	1.5	

现在我们希望每天得到的维生素不少于所规定的最低需要量，问应该如何搭配各种食品才能使所花的费用最少？

解：设 x_1、x_2、x_3 和 x_4 是每天采购甲、乙、丙、丁四种食品的数量，M 是每天采购食品的费用，那么

$$M=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4$$

约束条件：

$$1,000x_1+1,500x_2+1,750x_3+3,250x_4\geqslant 4,000$$

$$0.6x_1+0.27x_2+0.68x_3+0.3x_4\geqslant 1$$

$$17.5x_1+7.5x_2+30x_4\geqslant 30$$

$$x_1、x_2、x_3、x_4 \geqslant 0$$

所以这个问题是要求出 $x_1、x_2、x_3、x_4$，它们满足以上的约束条件并使M的值最小。

例 1.3 （切割损失问题）。假定某个造纸厂接到三份订购卷纸的定单，其长和宽的要求如下：

定单号码	宽（米）	长（米）
1	0.5	1,000
2	0.7	3,000
3	0.9	2,000

该厂生产1米和2米两种标准宽度的卷纸。假定卷纸的长度无限制，即可以连接起来达到所需要的长度，问应如何切割才能使切割损失的面积最小？

解：每一种标准卷纸可以有好几种切割的方式。例如2米宽的卷纸可以切成四个0.5米宽的卷纸，也可以切成二个0.5米宽和一个0.9米宽的卷纸等等。所以我们要考虑两种标准卷纸在各种切割方式下所产生的切割损失。

设 x_{ij} 是第 i 种标准卷纸按照第 j 种方式的切割的长度。那么两种标准卷纸所有可能采用的切割方式及其切割损失如下表。

宽度（米）	1米宽卷纸			2米宽卷纸						需要量（米）
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
0.5	2	0	0	4	2	2	1	0	0	1,000
0.7	0	1	0	0	1	0	2	1	0	3,000
0.9	0	0	1	0	0	1	0	1	2	2,000
剩余宽度	0	0.3	0.1	0	0.3	0.1	0.1	0.4	0.2	

设 s_1、s_2、s_3 分别是把标准卷纸切成 0.5 米、0.7 米、0.9 米后的剩余长度，而 z 是总的切割损失，于是

$$z=0.3x_{12}+0.1x_{13}+0.3x_{22}+0.1x_{23}+0.1x_{24}+0.4x_{25}$$
$$+0.2x_{26}+0.5s_1+0.7s_2+0.9s_3$$

约束条件是：

$$2x_{11}+4x_{21}+2x_{22}+2x_{23}+x_{24}-s_1=10,000$$
$$x_{12}+x_{22}+2x_{24}+x_{25}-s_2=30,000$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{25}+2x_{26}-s_3=20,000$$

$x_{ij}\geqslant 0$，$s_i\geqslant 0$，对一切 i 和 j。

所以这个问题就是要求出上面所规定的各个 x_{ij} 和 s_i，它们满足以上的约束条件并使 z 的值最小。

例 1.4 （产品配套问题）。假定一个工厂的甲、乙、丙三个车间生产同一产品，每件产品包括四个 A 零件和三个 B 零件。这两种零件由两种不同的原材料制成，而这两种原材料的现有数额分别是 100 公斤和 200 公斤。每个生产班的原材料需要量和零件产量如下：

车间	每班进料数(公斤)		每班产量(个数)	
	第 1 种原材料	第 2 种原材料	A 零件	B 零件
甲	8	6	7	5
乙	5	9	6	9
丙	3	8	8	4

问这三个车间各应开多少班才能使这种产品的配套数达到最大？

解：设 x_1、x_2、x_3 是甲、乙、丙三个车间所开的生产班数。

由于原材料的限制，故约束条件是：

$$8x_1+5x_2+3x_3\leqslant 100$$
$$6x_1+9x_2+8x_3\leqslant 200$$

这三个车间所生产的 A 零件总数是 $7x_1+6x_2+8x_3$ 而生产的

B零件是 $5x_1+9x_2+4x_3$。因为目的是要使产品的配套数最大，而每件产品需要四个 A 零件和三个 B 零件，所以产品的最大产量将不超过

$$\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4} \quad 和 \quad \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}$$

中较小的一个。如果设 z 是产品的配套数，那么

$$z=\min\left(\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4},\ \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\right)$$

这个目标函数是非线性的，但可以通过适当的变换把它化为线性的。设

$$y=\min\left(\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4},\ \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\right)$$

因为事先不知道哪一个比较小，所以上式等价于

$$\frac{7x_1+6x_2+8x_3}{4}\geqslant y \quad 和 \quad \frac{5x_1+9x_2+4x_3}{3}\geqslant y$$

由于在最后装配数 y 达到最大的时候，它的上限是由上面两个不等式中左边较小的一个来确定的，所以这个问题是求 x_1、x_2、x_3。

使 $z=y$ 最大

约束条件：

$$7x_1+6x_2+8x_3-4y\geqslant 0$$
$$5x_1+9x_2+4x_3-3y\geqslant 0$$
$$8x_1+5x_2+3x_3\leqslant 100$$
$$6x_1+9x_2+8x_3\leqslant 200$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ y\geqslant 0$$

从以上几个例子可以看出很多生产实际问题可以归结为一个线性规划问题。有些模型看起来不是线性的，但只要可能，我们也要尽一切办法把它线性化。这是由于对线性规划问题已经有了一套完整的解题方法，比较容易地得到所要求的解。

二、线性规划的一般定义

从以上的几个例子可以看出，线性规划的目标函数可以是最大化类型，也可以是最小化类型，约束条件可以是“$\leqslant$”，“$=$”，或“$\geqslant$”类型。对一般线性规划的模型通常定义如下：

求一组变量 x_1、x_2、…、x_n 的值，

使 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 最大(或最小)

(或者求 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 的最大或最小值，简记为 $\max$ 或 $\min z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$)

满足下列约束条件：

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \geqslant)b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \geqslant)b_2\\
\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \geqslant)b_m\\
x_1,\ x_2\cdots,\ x_n\geqslant 0
\end{gathered}
$$

这里，c_j，b_i 和 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是由问题本身所确定的一些常数，而 x_j 是决策变量。从经济方面来看，可以把线性规划问题看成是一个把有限的资源(人力或物力)分配到若干生产活动上去的“分配”问题，如同上一节的第一个例子那样。b_i 就是第 i 种资源的可利用数额，而 c_j 则是第 j 种生产活动所产生的价值。目标函数是要求利润的最大值或成本的最小值。

在建立了线性规划的模型之后，下一步的工作就是要求出规划的解。由于线性规划的模型有各种表示形式，为方便起见，通常把它们化为以下两种形式之一，以便求解和分析问题。

1．典则形式

一般的线性规划问题可以化成以下的典则形式：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \ i=1, 2, \cdots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \ j=1, 2, \cdots, n$$

这种形式的特点是：

1）目标函数是最大化类型；

2）所有约束条件都是“≤”型

3）所有决策变量都是非负的。

假使一个线性规划的模型不是以上的典则形式，那么总可以通过以下五种变换化为典则形式。

(1) 如果模型的目标函数是最小化类型，那么它等价于把目标函数加一个负号而求它的最大值。例如要

求 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 的最小值

可令 $g=-z$，则上式等价于

求 $g=-z=-c_1x_1-c_2x_2-\cdots-c_nx_n$ 的最大值

所以任何线性规划问题的目标函数都可以化为最大化类型。

(2) 如果约束条件中有“≥”的不等号，可以通过在不等式两边乘“-1”，把不等号反向。例如

$$a_1x_1+a_2x_2 \geqslant b$$

等价于

$$-a_1x_1-a_2x_2 \leqslant -b$$

(3) 如果约束条件中有“=”的符号，可以用两个反向的不等式来代替。例如

$$a_1x_1+a_2x_2=b$$

等价于

$$a_1x_1+a_2x_2 \leqslant b \text{ 和 } a_1x_1+a_2x_2 \geqslant b$$

也就是等价于

$$a_1x_1+a_2x_2 \leqslant b \text{ 和 } -a_1x_1-a_2x_2 \leqslant -b$$

(4) 如果在约束条件中出现绝对值符号，也可以用两个不等式来代替。例如，对 $b>0$，