高中数学綜合习题选編

张家口市教育局教研室编印

前　　言

为培养学生综合运用数学知识的能力和适应高中毕业生复习的需要，我们编印了这本《高中数学综合习题选编》。这本书共选入一百一十一道综合性习题，并作出题解附在后面，供读者参考。

在编印这本书的过程中，张家口市数学学会中学数学分会（原中学数学中心教研组）的全体同志给予了大力支持，在此我们表示衷心感谢。

由于我们的水平所限，此书难免存在着缺点和错误，望读者批评指正。

编　　者

一九七九年二月六日

目　　录

一、习　　题

（一）代　　数

1．解方程$(m^2-1)x=m^2-m-2$，并且加以讨论．

2．解方程$m(x-1)=x-2$，m是什么实数的时候，方程的解是正数？是负数？等于零？

3．解方程$|x-4|+|x+1|=5$（x是实数）．

4．已知两个最简根式$\sqrt[2a+2]{4a+3b}$和$\sqrt[b+5]{2a-b+8}$是同类根式，（1）求a、b的值；（2）以a、b的负倒数为根作一个一元二次方程．

5．证明：连续的四个自然数的乘积与1的和是完全平方数．

6．证明：每个奇数的平方被8除必余1．

7．已知m为一正数n的小数部分，且有$m^2+n^2=24$，求此正数n．

8．若a、b为直角三角形的两直角边，斜边c为整数，且a与b互质，证明：a与c、b与c都互质，且c是奇数，a与b是一奇一偶．

9. 已知：$y=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}+\log_3 x$，求arctg x。

10. 两个对数函数$y_1=\log_a(2x^2-3x+1)$和$y_2=\log_a(x^2+2x-5)$，要使：（1）$y_1=y_2$；（2）$y_1<y_2$；（3）$y_1>y_2$，求 a和x的值。

11. 已知x_1、x_2是方程$2x^2+2\sqrt{\cos\alpha}\cdot x-\sin\alpha=0$的两个根，求当$0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$时，$x_1^2+x_2^2$的最大值。

12. 设x_1和x_2是方程$x^2-x\sin\alpha+\sin2\alpha=0$的两个根（$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$），

求证：$\log_{x_1+x_2}\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\log_{x_1+x_2}\frac{x_2}{\sqrt{2}}>1$。

并求：$\log_{x_1+x_2}\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\log_{x_1+x_2}\frac{x_2}{\sqrt{2}}=2$时$\alpha$的值。

13. 设方程$x^2+ax+bc=0$和$x^2+bx+ca=0$（$c\neq0$）有一公根，

求证：其他二根为方程$x^2+cx+ab=0$之根。

14. 如果a、b是方程$f(x)=x^3-3b^2x+2c^3=0$的根，那么以a、b、c为边的三角形是一个正三角形。

15．已知：$b = ak + \frac{c}{k}$，其中 a、b、k是有理数，

证明：方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根都是有理数。

16．解联立方程：$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} & ① \\ y^{x+y} = x^{3} & ② \end{cases}$（$x>0$，$y>0$）

17．解方程组：$\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$

18．已知：△ABC的三边 2、b、c成等差数列，

$2>b>c$，b边的对角是∠B，求证：∠B的度数小于60°。

19．设AM是△ABC中BC边上的中线，任作一直线分别交AB、AC、AM于P、Q、N，求证：$\frac{PB}{PA}$、$\frac{MN}{NA}$、$\frac{CQ}{AQ}$成等差数列。（提示：分别过B、C作AM的平行线，交PQ于E、D）。

20．如果 a、b、c、x都是实数，

且$(a^2+b^2)x^2 - 2b(a+c)x + b^2 + c^2 = 0$，

求证：a、b、c成等比数列，并且公比是x。

21．已知函数$y = ax^2 + bx + c$具有下列条件，

求a、b、c的值：①它的图象过（1，0）、（2，0）和（3，4）三点；②当$x = 0$的时候，函数的值是1，图象

顶点的坐标是（2，－3）；③当$x=\frac{1}{2}$的时候，函数有极大值25；当$x=0$的时候，函数的值是24。

22．设$f(x)=x^2+ax+b$，证明①$f(1)-2f(2)+f(3)=2$；②在$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中，至少有一个不小于$\frac{1}{2}$。

23．证明：①若$a>b>c$，则$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$

②若$a>0$、$b>0$、$c>0$、$d>0$，

则$a+b+c+d\geq 4\sqrt[4]{abcd}$。

24．当x是什么实数的时候，等式$\frac{x^2-6x+8}{x^2+2}=\mathrm{Sin}Q$（$0<Q<\frac{\pi}{2}$）成立。

25．直角三角形ABC中，斜边上的高$h=1$，两直角边a、b的和等于10，求这个三角形的面积。

（二）三　　角

26. 如果 $\cos 17x = f(\cos x)$，求证 $\sin 17x = f(\sin x)$。

27. 计算 $(0.5\text{tg}75°)^{20} \cdot (2\text{tg}15°)^{21}$ 的值。

28. 证明：$\cos\frac{2\pi}{15} + \cos\frac{4\pi}{15} - \cos\frac{7\pi}{15} - \cos\frac{\pi}{15} = \frac{1}{2}$。

29. 线段AB之三等分点依次为C、D，以CD为直径画圆，在圆周上任取一点P，设$\angle APC = \alpha$，$\angle BPD = \beta$，求证：$\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta = \frac{1}{4}$。

30. 已知：$X + Y + Z = X \cdot Y \cdot Z$，求证：

$$\frac{2X}{1-X^2} + \frac{2Y}{1-Y^2} + \frac{2Z}{1-Z^2} = \frac{8XYZ}{(1-X^2)(1-Y^2)(1-Z^2)}$$

31. 当x、y是什么实数时，$\cos^2\alpha = \frac{(x+y)^2}{4xy}$ 能成立？如果：$0° \leq \alpha \leq 360°$，这时 $\sin\alpha$ 之值是多少？

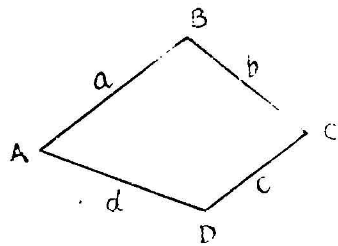
32. 证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半。

33．在直角三角形中，一个锐角为β，面积为１２．

①求该三角形外接圆的面积；

②当β取何值时，外接圆面积最小？

34．四边形ＡＢＣＤ是一个有活动接头的四边形，各边的长分别为a、b、c、d（如图１），可以把这个四边形的每一边想象成一根棒，每一个顶点是一个转轴，四边形可以拉长或压扁改变各个内角的大小，求证：四边形ＡＢＣＤ只有当它能内接于圆时，才有最大的面积。



（图１）

35．①试用直角三角形的斜边c和锐角三角函数来表达三角形的两直角边。

②斜边一定时，试求直角三角形面积的最大值。斜边一定时，求直角三角形周长的最大值。

36．直角三角形的锐角是多少度时，它的内切圆半径与外接圆半径之比最大？

37. 设A、B、C为三角形的三个内角，a、b、c分别为角A、B、C的对边，

求证：$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=0$。

38. 已知：一个正多边形的一个外角θ等于一个内角的$\frac{1}{5}$，求①一个内角的大小；②这个正多边形的边数；

③求证：$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta+\operatorname{tg}3\theta=\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}2\theta\cdot\operatorname{tg}3\theta$。

39. 已知：直角三角形的斜边为2，斜边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求证：这个直角三角形的两个锐角是方程

$\sin^2 x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$ 的两个根。

40. 实数p、q满足什么条件时，才能使$x^2+px+q=0$的两个根成为一直角三角形两锐角的正弦？

41. 设方程$a\cos x+b\sin x+c=0$，在区间$[0,\ \pi]$上有两个相异实根α和β，求$\sin(\alpha+\beta)$之值。

42. 设关于x的二次方程$(\sin\theta+1)(x^2-x)=(\sin\theta-1)(x-2)$有二实数根，且互为相反数，若其正根等于m，

求证：$\log_2 m^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}$。

43. 设$\sin\alpha$和$\sin\beta$是方程

$$x^2-(\sqrt{2}\cos 20°)x+\cos^2 20°-\frac{1}{2}=0$$

的两个根，其中α和β都是锐角，求α和β的度数。

44. 已知一个三角形的三个内角A、B、C成等差数列，最大角和最小角的正切值为方程$x(x-3)+2=\sqrt{3}(x-1)$的根，且这个三角形的面积为$3-\sqrt{3}$，解这个三角形。

45. 已知△ABC的三个内角A、B、C的大小成等差数列，$\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}C=2+\sqrt{3}$，求角A、B、C的大小。又知顶点C的对边c上的高等于$4\sqrt{3}$，求三角形各边的长。

46. 设$\sin\alpha$是$\sin\theta$与$\cos\theta$的等差中项，$\sin\beta$是$\sin\theta$与$\cos\theta$的等比中项，求证：$2\cos 2\alpha=\cos 2\beta$。

47. 已知：△ABC的三条边a、b、c成等差数列，

求证：$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$、$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$、$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$也成等差数列。

48. 把下面的参数方程化成普通方程：

$$\begin{cases} x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$$

49．求证：两直线 $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$，和 $x\sin\alpha - y\cos\alpha = b$ 垂直相交，并且求 α 变化时两直线交点的轨迹。

50．在等腰△ABC的底边BC的延长线上取一点D，过D作AB的垂线交AC于E，交AB于F，如果△AEF的面积等于△CDE的面积的二倍，则 $\frac{DE}{EF}=\frac{\sin C}{\sin A}$.

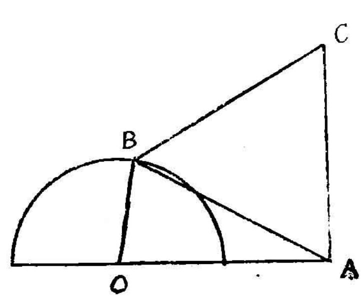
（三）平面几何

51. 半径为r的圆内有一直径AB，在圆周上取一点C，作AB的垂直平分线交AC、BC（或其延长线）于P、Q，设OP＝p，OQ＝q求证：lgP、lgr、lgq成等差数列。

52. 设PN切圆O于N，过P与PN的中点M作圆O_1与圆O相交于A、B。设BA的延长线交PN于Q，证明：MQ：QN：PM：PQ＝1：2：3：4。

53. 设△ABC的周长P＝2S为定值，试求△ABC的内切圆面积的最大值。

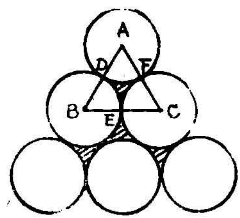
54. 如图2所示，半圆O的直径为2，A为延长线上的一点，而且OA＝2，B为半圆上的任意一点，以AB为一边作正三角形ABC，问B在什么位置时，四边形OACB的面积最大？并求这个面积的最大值。



（图2）

55. 等腰梯形的腰长为 c，上、下底长分别为 a和b，且顺次连结它们的中点所成四边形的四个角相等，则 c^2 为 a^2 和 b^2 的等差中项。

56. 如图 3，在平面上把一些半径为 r 的圆排成三角阵，顶排是 1 个，第二排是 2 个，第三排是 3 个……，第n排是n个，且其中每两个相邻的圆互相外切。问这些内阵空隙面积（阴影部分）的总和是多少？



（图 3）

57. 三角形三边成等差数列，且公差为 1。已知最大角为最小角的二倍，求三边的长。

58. 在△ABC中，M为BC边的中点，D为BM上的任意一点（不包括B、M点），过D作AM的平行线DF交AB于E，交CA的延长线于F。

①若令 $m=\dfrac{FE+FD}{AM}$，试确定m值的范围。

②当D以什么比值内分线段BM时，其

$m=1.5$。

59．一多边形的内角顺次为等差数列，其公差为10°，求这多边形的边数与最大的内角、最小内角。

60．平行四边形ABCD中，AB＝2，BC＝4，对角线AC和BD所成的角是45°，求它的面积。

61．已知半圆AEB及直线L，半圆之直径AB的延长线垂直L，垂足为C，自L上任一点M作半圆之切线ME，切点为E，以M为圆心，ME为半径作半圆交AB于D，

求证：$CD^2=CB\cdot CA$。

62．已知⊙O的半径为r，求其外切等腰梯形面积的最小值。

63．在直径AB＝4m的半圆的圆周上有C、D两点，顺次连接A、C、D、B成一个四边形，连半径OD、OC，又CD＝OC，四边形ACDB的面积为$(3+\sqrt{3})\ m^2$，求∠AOC。

64．△ABC中，AD为BC的中线，∠ADC＝45°，DE和DF分别平分∠ADB和∠ADC，并且分别交AB，AC各边于E、F，若AD＝EF，DE＝a，求△ABC的面积。

65. 设在△ABC中，$\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 2 : 1$，

求证：$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

66. 在△ABC中，$\angle C = 2\angle B$，（1）求证：

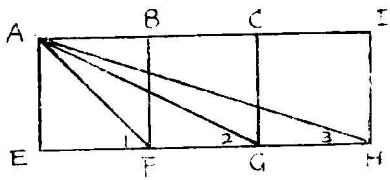
$c^2 = ab + b^2$；（2）计算 $\sin 18°$的值。

67. 已知AD、BE是△ABC的高，

求证：$AB^2 = AC \cdot AE + BC \cdot BD$.

68. 求证：如图4，三平方格中，

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°$.



（图4）

69. 已知直角三角形斜边上的高分其面积为中外比，求直角三角形的两个锐角。

70. 自定圆外一定点P，引任意割线PAB，

试证：$\tg\frac{\angle AOP}{2} \cdot \tg\frac{\angle BOP}{2}$为定值。

71. 一个三角形外接圆半径R必等于它的垂足三角形外接圆半径R_1的二倍。

（四）立体几何

72．空间两条直线的交角是θ，这两条直线和一个平面M的交角分别是α和β，求这两条直线在平面M上射影的交角ϕ的余弦（α、β都是锐角）．

73．线段AB平行于平面M，从A及B分别作这条线段的垂线AA_1及BB_1，分别交平面M于A_1和B_1，并使与平面M的倾角分别为β及α（$\alpha>\beta$），已知$AB=a$，$A_1B_1=b$求AB与平面M的距离．

74．已知二面角Q—CD—P的棱CD上的线段AB，M为面Q上的一个定点，AM与AB成α角，BM垂直于AB，设AM与面P成β角，求这个二面角的度数．

75．长方体的一条对角线，与过这对角线端点的三条棱的夹角分别为α、β、γ，求证：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$．

76．长方体的三度成等差数列，对角线长为$\sqrt{2}$m，又对角线与底面所成的角为$\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$，求它的体积．

77．有公共边的两个正三角形，一为不动的正三角形ABC，一为以BC为轴而动的正三角形SBC，问动正三角形和不动正三角形成多少度时，三棱锥S—ABC的体积最大．