

Mobility Modeling Technology  
for Ad Hoc Networks

# 无线自组网 移动性建模技术

刘宴涛 王雪冰 秦娜 著



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

# 无线自组网移动性建模技术

Mobility Modeling Technology for Ad Hoc Networks

刘宴涛 王雪冰 秦娜 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书详细介绍了无线自组网仿真研究中的移动性建模技术,包括基于 OPNET 进行无线自组网仿真的技术、移动模型的分类、个体移动模型的特点,以及移动模型对仿真网络连通性的影响等。此外,本书还介绍了移动模型分析所需要的概率论和随机过程的理论基础。

本书把理论分析与仿真实验相结合,图文并茂,部分实例还附上了仿真程序代码,适合于无线通信网络领域的工程师、研究生使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

无线自组网移动性建模技术/刘宴涛,王雪冰,秦娜著. —北京:电子工业出版社,2012.9  
ISBN 978-7-121-18199-3

I. ①无… II. ①刘… ②王… ③秦… III. ①自组织系统—无线网—建模系统 IV. ①TN92

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 210022 号

策划编辑:徐蔷薇

责任编辑:谭丽莎 文字编辑:王凌燕

印 刷: 三河市双峰印刷装订有限公司

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:720×1 000 1/16 印张:13 字数:270 千字

印 次:2012 年 9 月第 1 次印刷

印 数:2 000 册 定价:39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010) 88258888。

# 前 言

网络仿真对无线自组网进行研究的一项必要的技术,这项技术通过建立网络设备、链路和协议模型,模拟网络流量的传输,以获取网络的性能参数,改善网络运行状况。网络仿真是计算机仿真技术的一种,这种技术不是基于数学计算,而是基于统计模型,能够为网络的规划设计提供客观定量的依据,缩短网络建设周期,减少建设成本,降低投资风险。此外,仿真所建立的模型灵活度高,在高度复杂的网络环境中能够得到具有高可信度的结果,因此非常适合大中型网络的研发工作。网络建模技术包括协议建模、设备建模、拓扑建模、流量建模、移动性建模等。

移动性建模是无线自组网特有的建模技术,该技术依靠移动模型来规划仿真节点的移动轨迹,模拟真实世界的运动情况和网络的动态效果。无线自组网的各种研究工作都需要借助移动模型来仿真移动场景下的网络性能。随机点模型、随机方向模型和随机游走模型是三种最经典同时也是最广泛使用的无线自组网仿真移动模型,这些模型以节点运动的随机性和独立性为特征并采用折线型移动轨迹。其中,随机点模型已经在网络仿真软件包 OPNET、NS2 和 QUALNET 上实现模块化,用户可以即拿即用。尽管这些移动模型的使用已经有十几年的历史,但对模型自身特性的思考和剖析却是近几年来伴随着无线自组网仿真过程中发现的一些问题才逐渐展开的。近年来,研究发现一些随机移动模型存在着非均匀节点分布和非均匀速度分布等问题。这些问题反映出应用该模型的仿真网络存在相当长时间的瞬态过程,该过程造成了网络的短期行为和长期行为有很大差异,因此降低了在有限时间内收集到的仿真结果的可信度。从仿真方法论上来看,一个准确的仿真应该工作在系统的稳态并收集系统的稳态指标,所以移动模型的这些瞬态行为大大降低了仿真的准确度。此外,已有的很多理论研究工作,包括网络容量计算、功率控制、连通性和覆盖性分析及协议性能评估等,都是基于网络节点均匀分布或泊松分布的假设,当把这些研究在移动场景下付诸仿真时,由于移动模型造成的节点非均匀分布得到的仿真结果将会与这些理论分析的结果不一致。由此可见,深刻地理解和准确地把握移动模型的自身特性对于正确设计一个无线自组网仿真来说是至关重要的。

移动性建模技术是一个学科交叉色彩非常强的领域,涉及动态系统、随机过程、几何随机图等理论和网络仿真、数值计算等技术,因此具有较高的复杂性。本书以随机点模型、随机方向模型和随机游走模型为主要研究对象,采用几何概率、Palm 积分、随机过程和马尔可夫链等理论工具定量分析了网络中节点的平稳位置分布特征和平稳速度分布特征,得到了各种分布的概率密度函数并加以仿真验证。本书将有助于

无线自组网这一领域的研究者深入理解这几种随机移动模型的本质属性,为合理地选择和利用移动模型进行无线自组网仿真提供参考。

本书共分 10 章,前三章介绍了移动性建模技术所必需的集合论、概率论和随机过程的理论基础;第 4 章介绍了基于 OPNET 环境进行无线自组网仿真的理论与方法,其中主要针对信道接入协议和路由协议举例说明,并在附录中附上了程序代码;第 5 章讲述了无线自组网仿真的移动性建模基础,包括移动性建模技术的研究现状、分类和存在的主要问题;第 6 章分析了三种随机移动模型的速度分布问题;第 7 章至第 9 章分别采用不同的方法探讨了三种移动模型的节点分布问题;第 10 章根据前面的分析结果,深入研究了无线自组网移动模型对网络连通性的影响,本章还提出了一种性能优异的小世界网络模型。本书第 4 章、第 7 章至第 10 章由刘宴涛完成,第 1 章至第 3 章由王雪冰完成,第 5 章、第 6 章由秦娜完成,全书由刘宴涛统稿。

本书的完成要感谢北京理工大学现代通信与网络实验室的安建平、卜祥元、杨杰和李祥明等几位教授,本书的很多工作都是在他们的指导与合作下完成的;还要感谢渤海大学工学院的于忠党、迟峰和常晓恒等几位教授,与他们的学术交流获益匪浅,作者们写作的很多灵感是在工学院轻松快乐的学术氛围中产生的。

作者

# 目 录

第 1 章 集合论基础	(1)
1.1 集合的基本概念	(1)
1.2 集合的运算	(1)
1.3 集合的映射	(3)
1.4 集合的对等与分类	(4)
1.4.1 集合的对等	(4)
1.4.2 集合的基数	(5)
1.4.3 可列集与不可列集	(5)
1.4.4 集合的分类	(6)
1.5 测度理论基础	(6)
1.5.1 点集	(6)
1.5.2 开集、闭集和波雷尔集	(8)
1.5.3 测度	(8)
第 2 章 概率论基础	(9)
2.1 事件和概率	(9)
2.1.1 离散型随机试验	(10)
2.1.2 连续型随机试验	(12)
2.1.3 概率的公理化定义	(12)
2.1.4 条件概率	(13)
2.2 随机变量	(14)
2.2.1 基本概念	(14)
2.2.2 概率分布	(15)
2.2.3 分布函数	(17)
2.2.4 常用的随机变量	(18)
2.2.5 随机矢量	(24)
2.2.6 独立性	(26)
2.3 数字特征	(27)
2.3.1 数学期望	(27)
2.3.2 矩	(28)
2.3.3 方差	(29)

2.3.4	协方差和相关系数	(29)
2.4	特征函数	(30)
2.5	概率极限定理	(31)
2.5.1	大数定律	(31)
2.5.2	中心极限定理	(33)
2.6	几何概率	(34)
<b>第3章</b>	<b>随机过程基础</b>	<b>(38)</b>
3.1	随机过程的基本概念	(38)
3.2	马尔可夫过程	(40)
3.3	更新过程	(45)
3.4	随机点过程与 Palm 微积分	(48)
<b>第4章</b>	<b>无线自组网协议建模基础</b>	<b>(50)</b>
4.1	无线自组网仿真基础	(50)
4.2	接入协议的理论与仿真应用	(51)
4.2.1	简单的例: TDMA	(52)
4.2.2	复杂的例: DAP-NAD 协议	(52)
4.3	路由协议的理论与应用	(68)
4.3.1	简单的例: 泛洪协议	(69)
4.3.2	复杂的例: ODMRP 协议	(69)
<b>第5章</b>	<b>随机移动模型</b>	<b>(74)</b>
5.1	无线自组网移动性建模技术的研究现状	(74)
5.2	无线自组网移动模型分类	(81)
5.3	个体移动模型	(83)
5.4	群体移动模型	(87)
5.5	个体移动模型的典型问题	(88)
<b>第6章</b>	<b>随机移动模型的速度分布</b>	<b>(91)</b>
6.1	随机游走模型时间平均速度分布	(91)
6.1.1	时间型随机游走模型时间平均速度分布	(91)
6.1.2	距离型随机游走模型平均速度分布	(92)
6.2	随机点模型和随机方向模型时间平均速度分布	(96)
6.3	速度衰减问题的根本原因及解决方法	(97)
6.4	相关研究	(98)
<b>第7章</b>	<b>随机点模型的平稳节点分布</b>	<b>(100)</b>
7.1	一维区间分析	(100)

7.2	二维区域分析	(102)
7.3	相关研究	(108)
<b>第 8 章</b>	<b>随机方向模型的平稳节点分布</b>	<b>(109)</b>
8.1	圆形区域分析	(110)
8.2	方形区域分析	(112)
8.3	仿真实验	(129)
<b>第 9 章</b>	<b>随机游走模型的平稳节点分布</b>	<b>(131)</b>
9.1	无边界区域节点 Palm 分布	(132)
9.2	有边界栅格区域节点 Palm 分布	(135)
9.3	有边界连续区域节点分布	(138)
9.4	相关研究	(140)
<b>第 10 章</b>	<b>无线自组网的连通性分析</b>	<b>(143)</b>
10.1	相关背景	(143)
10.2	静态场景连通性分析	(145)
10.2.1	均匀网络连通性分析	(145)
10.2.2	泊松网络连通性分析	(147)
10.3	移动场景连通性分析	(148)
10.3.1	随机点模型网络连通性分析	(148)
10.3.2	随机方向模型网络连通性分析	(151)
10.3.3	随机游走模型网络连通性分析	(155)
10.4	应用小世界理论提高无线自组网连通性	(155)
<b>附录 A</b>	<b>TDMA 算法仿真程序</b>	<b>(162)</b>
<b>附录 B</b>	<b>DAP-NAD 算法仿真程序</b>	<b>(165)</b>
<b>附录 C</b>	<b>泛洪算法仿真程序</b>	<b>(172)</b>
<b>附录 D</b>	<b>ODMRP 算法仿真程序</b>	<b>(176)</b>
<b>附录 E</b>	<b>术语及缩略语</b>	<b>(184)</b>
	<b>参考文献</b>	<b>(185)</b>



# 第 1 章 集合论基础

## 1.1 集合的基本概念

一个数学系统必须从一些不可定义或无需定义的概念开始，集合就是这样一个概念。明确的能够相互区别的个体事物的全体称为集合，组成集合的个体事物称为元素，这是对集合的一个直观的描述性的说明。常用大写字母  $A, B, C, D$  表示某集合，用小写字母  $a, b, c$  或  $x, y, z$  代表元素。元素  $a$  如果是集合  $A$  中的某个元素，则称  $a$  属于  $A$ ，记作  $a \in A$ ；反之，称  $a$  不属于  $A$ ，记作  $a \notin A$ 。集合有两种表示方法。

(1) 列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，如  $\{a, b, c, d\}$  和  $\{0, 1, 2, \dots\}$ 。需要说明的是，集合中的元素是没有次序的，因此  $\{a, b, c, d\}$  和  $\{d, c, b, a\}$  是同一个集合。

(2) 描述法：用集合中元素的共有性质描述集合。比如  $A = \{x | x \text{ 是三年级同学}\}$  表示三年级全体同学构成的集合；再如  $B = \{x | x \text{ 是自然数}\}$ 。

与集合有关的另外一些概念如下：

(1) 没有任何元素的集合称为空集，用符号  $\emptyset$  表示，因此空集的元素个数为 0。 $\emptyset$  在集合论中扮演着代数中 0 的角色。

(2) 如果集合  $A$  的所有元素同时也是集合  $B$  的元素，则称  $A$  是  $B$  的子集，记作  $A \subseteq B$ ，读作  $A$  包含于  $B$ ，或  $B$  包含  $A$ ；如果  $A$  是  $B$  的子集，且  $B$  中存在着不属于  $A$  的元素，即  $\exists x \in B, x \notin A$ ，则称  $A$  是  $B$  的真子集，记作  $A \subset B$ 。规定空集  $\emptyset$  是任何集合的子集。

(3) 讨论某具体问题，需要选定一个“最大的”集合，使该问题涉及的其他所有集合都成为其子集，称这个“最大的”集合为全集，用符号  $\Omega$  表示。

(4) 以集合作为元素的集合称为集合类。因此，集合类可看做是“集合的集合”。

(5) 以集合为自变量的函数称为集合函数，简称集函数。因此，集合函数的定义域应该是集合类。

## 1.2 集合的运算

集合的运算是指集合与集合之间的运算，包括交、并、差、补、笛卡儿积和幂集，这些运算的结果是一个新的集合。可以用文氏图 (Voronoi diagram) 清楚直观



地表示集合的运算。在文氏图中，以大的矩形区域表示全集 $\Omega$ ，以矩形区域内部小的区域表示各个子集。

### 1. 交 ( $A \cap B$ )

交运算用描述法表示为： $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。 $A \cap B$  也可记作  $AB$ 。当两个集合没有交集，即  $A \cap B = \emptyset$  时，称  $A$  和  $B$  互不相容或互斥。

### 2. 并 ( $A \cup B$ )

并运算用描述法表示为： $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。当且仅当  $A$  和  $B$  互不相容时， $A \cup B$  也可以记作  $A+B$ 。特别地，当  $A \cap B = \emptyset$  且  $A \cup B = \Omega$  时，称  $A$  和  $B$  是对立的。推广到有限多个集合的情形，对于集合  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ，若

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{且} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

则称  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  为完备互斥的。

### 3. 差 ( $A \setminus B$ )

差运算用描述法表示为： $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ ，不难证明， $A \setminus B = AB^c$ 。

### 4. 补 ( $A^c$ )

集合  $A$  的补集定义为全集 $\Omega$ 和集合  $A$  的差集，即  $A^c = \Omega \setminus A$ ，集合  $A$  的补集由全集 $\Omega$ 中所有不属于集合  $A$  的元素构成，补集又称余集或绝对补集，也可记作  $\bar{A}$ 。

### 5. 笛卡儿积 ( $A \times B$ )

笛卡儿积又称为集合的乘积，其结果是一个新的集合，该集合由  $A$  和  $B$  中的元素组成的有序数对构成。因为是有序数对，所以笛卡儿积的运算不满足交换律，即  $A \times B \neq B \times A$ 。

### 6. 幂集

集合  $A$  的幂集是一个集合类，由  $A$  的全部子集所构成，用  $2^A$  表示。

集合的各种运算结果用文氏图表示如图 1-1 中的阴影部分所示。

集合运算具有如下一些性质：

(1) 交换律：

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(2) 结合律：

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 分配律：

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

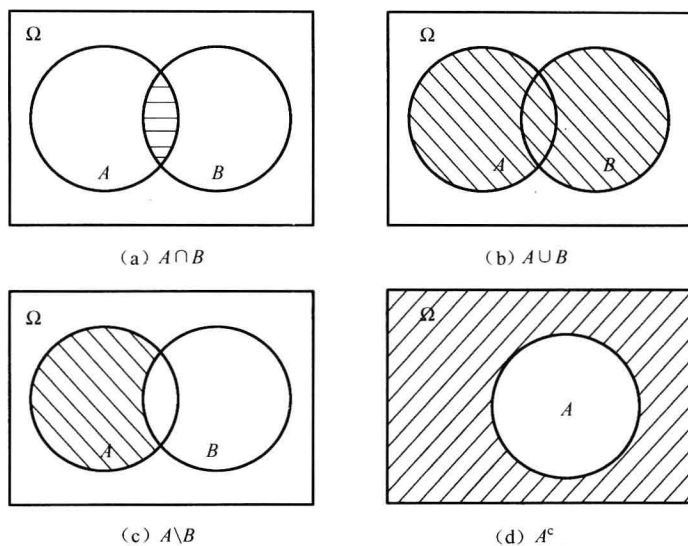


图 1-1 集合运算的文氏图表示

(4) De Morgen 律:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

这些性质可以应用文氏图自行检验。

## 1.3 集合的映射

### 1. 映射

设  $X$  和  $Y$  是两个非空集合, 若存在一个规则  $f$ , 使得对于  $X$  中的每一个元素  $x$ , 按照  $f$ , 都存在  $Y$  中的唯一一个元素  $y$  与之相对应, 则称  $f$  是定义在  $X$  上取值在  $Y$  中的映射, 记作  $f: X \rightarrow Y$ .  $X$  是  $f$  的定义域, 集合  $\text{ran}(f) = \{y | y = f(x), x \in X\}$  是  $f$  的值域;  $x$  和  $y$  分别称为映射  $f$  的原象和象。

### 2. 单射

对于映射  $f$  的值域  $\text{ran}(f)$  中的每个象元素  $y$ , 若唯一的存在自己的原象  $x$ , 则称该映射为单射。

### 3. 满射

如果集合  $Y$  中每个元素  $y$  都存在原象  $x$ , 即  $Y$  就是映射  $f$  的值域  $Y = \text{ran}(f)$ , 则称该映射为满射。



#### 4. 一一映射

既是单射又是满射的映射称为一一映射。

4种映射的示意如图 1-2 所示。

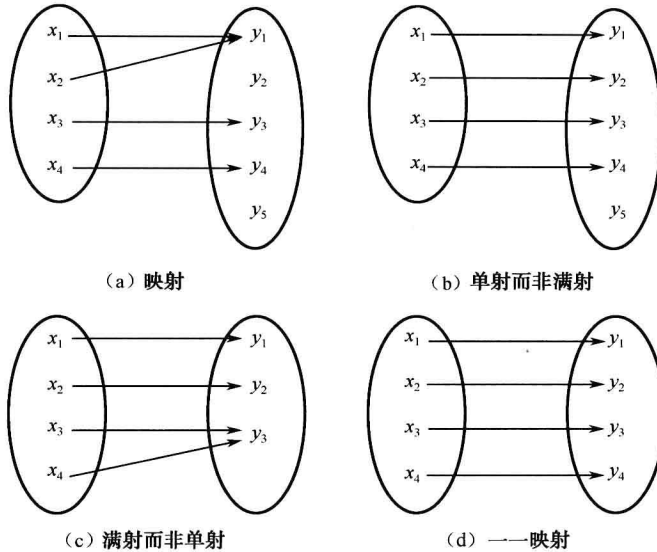


图 1-2 映射

## 1.4 集合的对等与分类

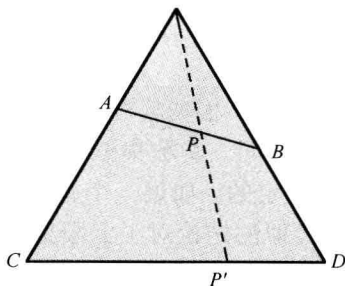
### 1.4.1 集合的对等

定义：若集合  $A$  和集合  $B$  之间存在一一映射，则称集合  $A$  和集合  $B$  对等，记作  $A \sim B$ 。

【例 1-1】集合  $\{1,2\}$  对等于集合  $\{0,2\}$ 。

【例 1-2】集合  $A=\{1,2,3,4,5,\dots\}$  对等于集合  $B=\{2,4,6,8,10,\dots\}$ ，在本例中，集合  $A$  和自己的一个真子集  $B$  存在着对等关系，这种与自身真子集存在对等关系的情况不可能发生在元素个数有限的集合（有限集）中，只有无限集合才可能具有这一性质。

【例 1-3】图 1-3 中线段  $AB$  和  $CD$  是点构成的集合，对于  $AB$  上的任意一点  $P$ ，都可以用图示的方法对应到  $CD$  上的一点  $P'$ ，反之亦然，所以集合  $AB$  和  $CD$  是对等的。

图 1-3 集合  $AB$  和  $CD$  对等

## 1.4.2 集合的基数

元素的个数是对集合大小的很自然的描述。对于有限集，元素的个数是可以数得过来的，或者说等于某个自然数。但对于无限集，由于其中元素个数为无穷多个，怎么比较大小呢？康托尔从对等的概念出发，认为互相对等的集合元素个数是相同的，把对等集合的这个公共的性质归纳出来，就称为集合的基数。我们把相互对等的集合归为一类，称其公共的“元素个数”为这一类集合的基数或势。规定空集的基数为零、有限集的基数为自然数、无限集的基数为超限数。

## 1.4.3 可列集与不可列集

集合论的魅力表现在无限集合中，我们遇到的第一个无限集合是自然数集合  $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4\cdots\}$ ，称自然数集  $\mathbf{N}$  的基数为  $\aleph_0$ ，读作阿列夫零。

定义：凡是能与自然数集  $\mathbf{N}$  对等的集合统称为可列集，不是可列集的无限集合称为不可列集。因此，所有可列集的基数都是  $\aleph_0$ 。

【例 1-4】如下 4 个集合都是可列集：

- (1)  $\{1,2,3,4\cdots\}$ ;
- (2)  $\{2,4,6,8\cdots\}$ ;
- (3)  $\{1,1/2, 1/3,1/4\cdots\}$ ;
- (4)  $\{\cdots-3,-2,-1,0,1,2,3\cdots\}$ 。

下面我们不加证明地给出可列集的一些性质：

- (1) 有限个可列集的并集是可列集；
- (2) 可列个可列集的并集是可列集；
- (3) 若集合  $A, B$  是可列集，则  $A \times B$  是可列集。



定理 1-1: 有理数集  $\mathbf{Q}$  是可列集。

定理 1-2: 实数集  $\mathbf{R}$  是不可列集。

把实数集  $\mathbf{R}$  的超限基数记作  $c$ , 根据集合论中连续统假设, 有  $2\aleph_0 = c$ , 且不存在集合, 其基数介于  $\aleph_0$  和  $c$  之间。实数集似乎已经很大了, 那么还有没有无限集合其基数大于  $c$  呢? 答案是肯定的。如果一个有限集  $A$  的基数是  $a$ , 则不难验证  $A$  的幂集  $2^A$  的基数是  $2^a > a$ 。类似的结论对于无限集也成立, 实数集的幂集的基数是  $2^c > c$ , 如果把这个取幂集的操作持续做下去, 则其基数将持续增长, 所以基数没有最大的。

## 1.4.4 集合的分类

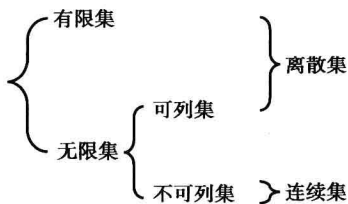


图 1-4 集合的分类关系

根据 1.4.2 节的讨论, 我们可以根据集合的基数对集合加以分类, 分为有限集和无限集, 无限集又分为可列集和不可列集。在工程应用中, 经常用术语离散集和连续集, 其中离散集包括了有限集和可列集, 连续集则指不可列集。其分类关系如图 1-4 所示。

按照基数从小到大的次序可以把各种集合排序, 如表 1-1 所示。

表 1-1 集合基数的比较

集合	$\emptyset$	有限集	可列集 ( $\mathbf{N}, \mathbf{Q}$ )	实数集 ( $\mathbf{R}$ )	实数集的幂集 $2^{\mathbf{R}}$	实数集幂集的幂集...
	0	自然数	$\aleph_0$	$c$	$2^c$	$2^{2^c} \dots$
基数	$0 < \text{自然数} < \aleph_0 < 2\aleph_0 = c < 2^c < 2^{2^c} < \dots$					

## 1.5 测度理论基础

### 1.5.1 点集

定义: 设  $X$  是非空集合, 对于  $X$  中任意的两个元素  $x$  和  $y$ , 按照某一法则都对应唯一的实数  $d(x, y)$ , 且满足



- (1) 非负性:  $d(x,y) \geq 0$ ;  $d(x,y)=0$  当且仅当  $x=y$ ;  
 (2) 对称性:  $d(x,y)=d(y,x)$ ;  
 (3) 三角不等式: 对于任意的  $x,y,z \in X$ , 恒有  $d(x,y) \leq d(x,z)+d(y,z)$

则称  $d(x,y)$  为  $x,y$  的距离, 并称  $X$  是以  $d$  为距离的距离空间, 记作  $(X,d)$ ,  $X$  中的元素称为点。

一维、二维和三维欧氏空间是我们最熟悉的距离空间, 以三维空间为例, 两点  $A(x_1,y_1,z_1)$  和  $B(x_2,y_2,z_2)$  的距离被定义为

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

虽然后面的讨论不限于欧氏空间中的点集, 但欧氏空间可以给我们提供直观的印象。

定义: 设  $(X,d)$  是距离空间, 称  $X$  中的点的集合

$$(1) B_r(x_0) = B(x_0, r) := \{x \mid x \in X, d(x, x_0) < r\}$$

为以  $x_0$  为中心, 以  $r$  为半径的开球, 也称为  $x_0$  的  $r$  邻域;

$$(2) \bar{B}_r(x_0) = \bar{B}(x_0, r) := \{x \mid x \in X, d(x, x_0) \leq r\}$$

为以  $x_0$  为中心, 以  $r$  为半径的闭球;

$$(3) S_r(x_0) = S(x_0, r) := \{x \mid x \in X, d(x, x_0) = r\}$$

为以  $x_0$  为中心, 以  $r$  为半径的球面。

定义: 设  $A$  是空间中某一点集

若  $\exists r > 0$ , 使得  $B_r(x) \subset A$ , 则称  $x$  为  $A$  的内点;

若  $\exists r > 0$ , 使得  $B_r(x) \cap A = \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的外点;

若  $\exists r > 0$ , 使得  $B_r(x) \cap A = \{x\}$ , 则称  $x$  为  $A$  的孤立点;

若  $\forall r > 0$ , 使得  $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的接触点;

若  $\forall r > 0$ , 使得  $B_r(x) \cap \{A \setminus \{x\}\} \neq \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的聚点, 也称极限点;

1 若  $\forall r > 0$ , 使得  $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$  且  $B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的边界点;

称集合  $A$  的内点的全体为集合  $A$  的内部, 记作  $A^\circ$ ;

称集合  $A$  的接触点的全体为集合  $A$  的闭包, 记作  $\bar{A}$ ;

称集合  $A$  的聚点的全体为集合  $A$  的导集, 记作  $A'$ ;

称集合  $A$  的边界点的全体为集合  $A$  的边界, 记作  $\partial A$ 。

【例 1-5】 $A = (0,1) \cup \left\{ 5 + \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

内点集合为  $(0,1)$ , 聚点集合为  $[0,1] \cup \{5\}$ ,  $5 + \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots$  是孤立点。



## 1.5.2 开集、闭集和波雷尔集

若点集  $A$  中的点都是内点，则称  $A$  为开集。因此，对于开集  $A$  有  $A=A^\circ$ ；若  $A$  等于  $A$  的闭包，则称点集  $A$  为闭集，也可定义闭集为开集的余集；以开集和闭集为对象，做至多可列次或交或并的运算得到的集合称为波雷尔（Borel）集。

## 1.5.3 测度

很多物理量和数学量都具有可加性，如两袋面粉总的质量等于这两袋面粉各自质量的和；两条线段连接在一起构成的线段的长度等于这两条线段各自长度的和。类似的性质在二维面积和三维体积中也存在。把这个概念推而广之，赋予一般的集合以类似的度量，就得到了测度的概念。

定义：测度是在一个给定集合  $\Omega$  的某个子集类  $\mathcal{F}$  上定义的一个满足可列可加性的非负的集合函数  $\mu(A), A \in \mathcal{F}$ ，即若  $A_i: i \in \mathbb{N}$  是  $\mathcal{F}$  中两两不相交的集合，且  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ ，则有

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad (1-1)$$

可见，测度就是一种集合函数，以集合类  $\mathcal{F}$  为定义域，以可列可加性为其根本特性。点集作为一种集合，对其测度的定义一直是数学家们孜孜以求试图解决的问题。历史上，Hankel、Cantor、Jordan 和 Lebesgue 都曾提出过针对点集的测度的定义方式，其中，应用最为广泛的是 Lebesgue 的测度定义。这里不对其做深入解释，有兴趣的读者可以参阅有关测度论或实分析的书籍。需要说明的是包括 Lebesgue 测度在内的所有测度定义方式都不能对所有点集满足可列可加性。C.Caratheodory 针对 Lebesgue 测度给出了一个条件，把  $\mathbf{R}^n$  中的点集分为 Lebesgue 可测集和不可测集。



# 第2章 概率论基础

## 2.1 事件和概率

如果某个实际的物理试验或想象中的试验，在试验前知道所有可能的试验结果，每次试验之前虽不能确定本次试验的结果，但知道该结果必为可能的试验结果之一，且该试验在相同条件下可以重复进行，则称这样的试验为随机试验  $E$ 。随机试验每个可能的试验结果称为该试验的一个基本事件（又称样本点），常用符号  $\omega$  表示，基本事件一定是彼此互斥的。随机试验所有可能的试验结果构成的集合称为该试验的基本事件空间（又称样本空间），常用符号  $\Omega$  表示。由若干基本事件组成的集合称为一个事件。由此可见，如果把基本事件空间  $\Omega$  看做是全集，那么事件  $A$  可以理解成  $\Omega$  的某个子集。一次随机试验做完后，如果试验结果是事件  $A$  中的某个基本事件，则称事件  $A$  发生了。对于一个基本事件空间  $\Omega$  可以构造出众多的事件（如果一个有限集合  $\Omega$  中的元素个数为  $n$ ，则  $\Omega$  共有  $2^n$  个子集，因此一共存在着  $2^n$  个可能的事件），在其中有两个特殊的事件值得注意，一个是不可能事件  $\emptyset$ ，该事件不含有任何基本事件，因此在该随机试验中不可能发生；另一个是必然事件  $\Omega$ ，该事件包含了全部基本事件，因此试验做完后必然事件一定会发生。经过上面的阐述，不难发现基本事件、基本事件空间和事件完全可以对应于集合论中元素、全集和子集等概念，如表 2-1 所示。

表 2-1 概率论与集合论术语的对应

概率论术语	集合论术语
基本事件	元素 $\omega$
基本事件空间	全集 $\Omega$
事件	子集
不可能事件	空集 $\emptyset$
必然事件	全集 $\Omega$

由于存在这样的对应关系，所以可以应用集合的观点看待事件，集合论中各种运算及性质都可以应用到对事件概率的分析中。