

奥数 题库



小学数学世界邀请赛 试题解答

朱华伟 孙文先 编著



科学出版社

奥数题库



CS1680316

G624.505

07



小学数学世界邀请赛 试题解答

朱华伟 孙文先 编著

重庆师大图书馆

G624.505
07

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书收录了“小学数学世界邀请赛”第一届(1998)至第十三届(2010)的全部试题,每届包含个人赛和队际赛两套试题.对每一道试题均给出详解,有些题还给出了多种解法,目的是使读者加深对问题的理解,从中得到有益的启发.

本书可供小学数学资优生,准备小升初数学考试的考生,准备参加各类小学数学竞赛的选手,小学数学教师,高等师范院校小学数学教育专业大学生,数学爱好者及数学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

小学数学世界邀请赛试题解答 / 朱华伟, 孙文先编著. —北京: 科学出版社, 2011

(奥数题库)

ISBN 978-7-03-030891-7

I. 小… II. ①朱…②孙… III. 小学数学课—题解 IV. G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 073481 号

责任编辑: 李 敏 赵 鹏 / 责任校对: 鲁 素

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2011 年 5 月第一次印刷 印张: 12 插页: 2

印数: 1—6 000 字数: 232 000

定价: 33.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于

青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了。

摘自《走进教育数学》丛书总序

前 言

1997 年，香港著名慈善机构保良局举办了“小学数学亚洲邀请赛”。为鼓励学生放眼世界，培养学生作多元交流和发展，1998 年，这一赛事正式更名为“小学数学世界邀请赛”，至今共举办了十三届，每年都吸引了世界各地多支参赛队伍赴香港角逐各个奖项。

19 世纪末的香港，局势动荡不安，由社会慈善名人联名上书港督轩尼诗爵士，于 1878 年成立了保良公局，旨在保赤安良。随着社会环境的转变，现在保良局是香港一所庞大的社会服务机构，服务范围包括教育、福利和康乐，致力为香港提供优质、专业及多元化的社会服务。保良局的教育服务部多年来积极推广小学数学竞赛，希望通过数学竞赛提高全港学生的数学水平和能力。保良局历年来举办的数学竞赛包括“香港小学数学精英选拔赛 (The Hong Kong Primary Mathematics Contest)”、“香港青少年数学精英选拔赛 (The Hong Kong Mathematical High Achievers Selection Contest)”及“小学数学世界邀请赛 (The Primary Mathematics World Contest)”等，在策划及推动数学竞赛方面积累了丰富的丰富经验。

“小学数学世界邀请赛”由香港保良局主办、香港教育学院协办，举办这项赛事的宗旨是为世界各国小学生提供一个国际数学交流的机会、促进世界各地小学生的友谊、发掘世界各地资优生学习数学的潜能。这项赛事通常在每年 7 月中旬举行。遵循国际数学奥林匹克 (International Mathematical Olympiad) 出题赛制，

各参赛队伍提供试题，再由筹委会委任的评判团和各队领队在领队会议上共同商定试题。“小学数学世界邀请赛”的试题尊重教育规律，适合多数国家，内容涵盖广泛，其中不少赛题设计新颖，生动活泼，展示了数学之美。

“小学数学世界邀请赛”的比赛项目分个人赛和队际赛。参加个人赛的选手必须在1小时30分钟内完成15道试题；队际赛分两部分进行，必须在1小时内完成。第一部分，全队4名选手首先在5分钟内商议分配其中8个试题，在45分钟内独立完成各自分配的部分，每位成员至少完成1题；第二部分比赛时间15分钟，由全队4名队员合作共同完成余下的2道试题。邀请赛不但要求学生有一定的逻辑思维和独立解题的能力，而且讲求协作精神。数学是一门需要与人沟通交流的学问，选手们要具有团队分工、互助合作的精神，这样才能取得好成绩。

本书收录了第一届（1998年）至第十三届（2010年）香港保良局小学数学世界邀请赛的全部试题，对每一道试题均给出了详细解答，有些题还给出了多种解法，目的是使读者加深对问题的理解，从中得到有益的启发。

在本书编写过程中，编者参阅了许多中外文文献资料，在此向原作者表示衷心的感谢。广州大学软件所数学奥林匹克方向硕士生杨姗同学对本书的编写提供了很大的帮助，在此向她表示真诚的感谢。对于本书存在的问题，真诚希望读者不吝赐教。

朱华伟 孙文先

2011年4月

于广州大学城

目 录

张景中谈奥数

前言

第1章 第一届小学数学世界邀请赛	1
1.1 个人竞赛试题	1
1.2 个人竞赛试题解答	3
1.3 队际竞赛试题	7
1.4 队际竞赛试题解答	8
第2章 第二届小学数学世界邀请赛	14
2.1 个人竞赛试题	14
2.2 个人竞赛试题解答	16
2.3 队际竞赛试题	20
2.4 队际竞赛试题解答	22
第3章 第三届小学数学世界邀请赛	26
3.1 个人竞赛试题	26
3.2 个人竞赛试题解答	28
3.3 队际竞赛试题	33
3.4 队际竞赛试题解答	35
第4章 第四届小学数学世界邀请赛	44
4.1 个人竞赛试题	44
4.2 个人竞赛试题解答	45
4.3 队际竞赛试题	49
4.4 队际竞赛试题解答	51
第5章 第五届小学数学世界邀请赛	55
5.1 个人竞赛试题	55
5.2 个人竞赛试题解答	57

5.3	队际竞赛试题	62
5.4	队际竞赛试题解答	64
第6章	第六届小学数学世界邀请赛	67
6.1	个人竞赛试题	67
6.2	个人竞赛试题解答	68
6.3	队际竞赛试题	72
6.4	队际竞赛试题解答	74
第7章	第七届小学数学世界邀请赛	79
7.1	个人竞赛试题	79
7.2	个人竞赛试题解答	81
7.3	队际竞赛试题	85
7.4	队际竞赛试题解答	88
第8章	第八届小学数学世界邀请赛	93
8.1	个人竞赛试题	93
8.2	个人竞赛试题解答	95
8.3	队际竞赛试题	99
8.4	队际竞赛试题解答	101
第9章	第九届小学数学世界邀请赛	104
9.1	个人竞赛试题	104
9.2	个人竞赛试题解答	106
9.3	队际竞赛试题	110
9.4	队际竞赛试题解答	112
第10章	第十届小学数学世界邀请赛	117
10.1	个人竞赛试题	117
10.2	个人竞赛试题解答	119
10.3	队际竞赛试题	122
10.4	队际竞赛试题解答	124
第11章	第十一届小学数学世界邀请赛	129
11.1	个人竞赛试题	129
11.2	个人竞赛试题解答	130

11.3	队际竞赛试题	137
11.4	队际竞赛试题解答	139
第 12 章	第十二届小学数学世界邀请赛	146
12.1	个人竞赛试题	146
12.2	个人竞赛试题解答	148
12.3	队际竞赛试题	153
12.4	队际竞赛试题解答	155
第 13 章	第十三届小学数学世界邀请赛	161
13.1	个人竞赛试题	161
13.2	个人竞赛试题解答	163
13.3	队际竞赛试题	170
13.4	队际竞赛试题解答	173

第1章 第一届小学数学世界邀请赛

1.1 个人竞赛试题

1. 计算: $29\frac{27}{28} \times 27\frac{14}{15}$.

2. 在图 1-1 的乘式中, 每一个方格 $\square$ 和英文字母都代表一个数字, 不同字母代表不同的数字, $\square$ 可填任意数字. 请问“HAPPY”所代表的五位数是什么?

$$\begin{array}{r} \square 1 \square \\ \times \quad 9 \square \\ \hline \square \square 9 \square \\ \square \square \square 7 \square \\ \hline \text{H A P P Y} \end{array}$$

图 1-1

3. 小明生病了, 医生嘱咐他必须每 8 小时服用一次 A 药, 每 5 小时服用一次 B 药, 每 10 小时服用一次 C 药. 如果小明在星期二上午 7 时第一次同时服用这三种药, 请问他在星期几的几点钟会再次同时服用这三种药?

4. 图 1-2 的三个图分别表示左右两边同重的三个天平, 请问一个 $\bigcirc$ 的质量相当于几个 $\square$ 的质量?

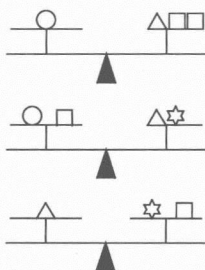


图 1-2

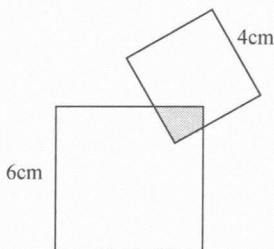


图 1-3

6. 大华和小明各带 100 元到文具店买练习簿. 大华的钱刚好买 7 本大的与 4 本小的练习簿; 小明买 5 本大的与 6 本小的练习簿, 剩下 5 元. 请问小的练习簿一本多少元?

7. 在某个班级中,有 40% 的女生和 50% 的男生成绩得到 A,共有 12 名学生成绩得到 A. 如果班上女生的总人数和男生的总人数的比例为 5:4,请问该班级共有多少名学生?

$$8. 997 - 996 - 995 + 994 + 993 - 992 + 991 - 990 - 989 + 988 + 987 - 986 + 985 - 984 - 983 + 982 + 981 - 980 + \cdots + 7 - 6 - 5 + 4 + 3 - 2 + 1 = ?$$

9. 一位化学家将浓度为 48% 的硫酸溶液和浓度为 80% 的硫酸溶液混合后,再加入 2 升蒸馏水,均匀混合后,结果他得到浓度为 40% 的硫酸溶液 10 升. 请问化学家使用了多少毫升浓度为 48% 的硫酸溶液? (1 升 = 1000 毫升)

10. 小明带 24 只鸡到市场去卖,早上每只鸡卖 7 元,卖出了不到总数的一半,下午他对每只鸡的价钱进行打折,折后的价钱仍是一个整数. 下午,他卖完剩下的鸡. 全天共收入 132 元,请问早上卖出多少只鸡?

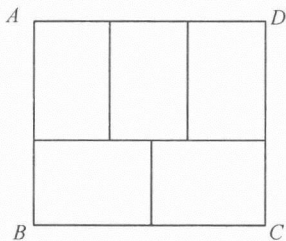


图 1-4

11. 如图 1-4 所示,长方形 ABCD 是由 5 个全等的小长方形所组成的,如果长方形 ABCD 的面积是 6750 cm^2 ,请问长方形 ABCD 的周长为多少 cm?

12. 一个正方体骰子中,三组相对的面分别标了 1 与 6, 2 与 5, 3 与 4. 如果将这样两个骰子任意投掷在桌面上,它们的顶面与底面的点数依照下列方式作乘法运算:

- (1) (第一个骰子顶面的点数) $\times$ (第二个骰子顶面的点数);
- (2) (第一个骰子顶面的点数) $\times$ (第二个骰子底面的点数);
- (3) (第一个骰子底面的点数) $\times$ (第二个骰子顶面的点数);
- (4) (第一个骰子底面的点数) $\times$ (第二个骰子底面的点数).

请问上述四个乘积的和是多少?

13. 一辆卡车从 A 地开到 B 地的速度为每小时 50 km;从 B 地开回 A 地的速度为每小时 70 km. 如果这辆卡车来回 3 趟共花费 18 小时,请问 A、B 两地之间的距离是多少 km?

14. 用 0, 1, 2, $\dots$, 9 配成五个两位数,每个数字恰好使用一次,当这五个数的乘积为最大时,这五个二位数中最大的数是多少?

15. 如图 1-5 所示,从 A 出发到 B,要求刚好经过六条线段走完(可利用横的线段、直的线段或斜的线段),请问最多有多少种走法?

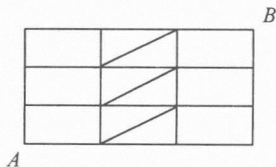


图 1-5

1.2 个人竞赛试题解答

1. 答案: $837\frac{1}{420}$.

解 可利用分配律简化计算过程:

$$\begin{aligned} 29\frac{27}{28} \times 27\frac{14}{15} &= \left(30 - \frac{1}{28}\right) \times \left(28 - \frac{1}{15}\right) \\ &= 840 - 2 - 1 + \frac{1}{420} \\ &= 837\frac{1}{420}. \end{aligned}$$

2. 答案: 20661.

解 令乘式为

$$\begin{array}{r} \text{a} \quad \text{1} \quad \text{b} \\ \times \quad \quad \text{9} \quad \text{c} \\ \hline \text{d} \quad \text{e} \quad \text{9} \quad \text{f} \\ \text{g} \quad \text{h} \quad \text{i} \quad \text{7} \\ \hline \text{H} \quad \text{A} \quad \text{P} \quad \text{P} \quad \text{Y} \end{array}$$

可知 $P=6$. 因为被乘数 $\overline{\text{alb}}$ 乘以 9 所得的数为 $\overline{\text{ghi7}}$, 其个位数为 7, 故 $b=3$, 也因此可知 $i=1, e=4$.

因为被乘数 $\overline{\text{alb}}$ 乘以 c 所得的数 $\overline{\text{de9f}}$ 的十位数为 9, 故可以知道 $c + (3 \times c \text{ 的十位数}) = 9$, 再由 $(3 \times c \text{ 的十位数}) \leq 2$ 可知 $c \geq 7$, 也因此知道 $(3 \times c \text{ 的十位数}) = 2$, 所以 $c=7$;

因为 $e=4, c=7$, 所以 $a=2$, 此时便可知完整的算式为

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ \times \quad \quad \quad 9 \quad 7 \\ \hline \quad \quad \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 1 \\ \quad 1 \quad 9 \quad 1 \quad 7 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 6 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

所以“HAPPY”所代表的五位数是 20661.

3. 答案: 星期三的晚上 11 时.

解 因为 8, 5, 10 的最小公倍数为 40, 故在第一次同时服用这三种药后 40

小时会再次同时服用这三种药,即星期三的晚上 11 时.

4. 答案:6 个.

解 由第一个图与第二个图可知 1 个☆的质量相当于 3 个□的质量,由第一个图与第三个图可知 1 个○的质量相当于 1 个☆的质量与 3 个□的质量和,所以 1 个○相当于 6 个□的质量.

5. 答案:20 cm^2 .

解 大正方形不重叠部分的面积为

$$6 \times 6 - (\text{重叠部分面积}) = 36 - (\text{重叠部分面积}),$$

而小正方形不重叠部分的面积为

$$4 \times 4 - (\text{重叠部分面积}) = 16 - (\text{重叠部分面积}),$$

所以两个正方形不重叠部分面积相差

$$\begin{aligned} & [36 - (\text{重叠部分面积})] - [16 - (\text{重叠部分面积})] \\ &= 36 - 16 = 20 (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

6. 答案:7.5 元.

解 小明比大华少买 2 本大的练习簿但多买了 2 本小的练习簿,且少花 5 元,故可知 1 本大的练习簿比 1 本小的练习簿贵 $5 \div 2 = 2.5$ 元,因此 7 本大的练习簿总价比 7 本小的练习簿总价多 $7 \times 2.5 = 17.5$ 元,即 11 本小的练习簿总价为 $100 - 17.5 = 82.5$ 元,因此 1 本小的练习簿价钱为 $82.5 \div 11 = 7.5$ 元.

7. 答案:27 名.

解 由于班上女生总人数:男生总人数 = 5:4,故可知女生与男生得到 A 的人数比为 $5 \times 40\% : 4 \times 50\% = 1:1$;已知共有 12 名学生成绩得到 A,故男、女生得到 A 的人数各为 6 人.再根据男女生中得到 A 的比例可求得全班人数为

$$6 \div 40\% + 6 \div 50\% = 15 + 12 = 27 (\text{人}).$$

8. 答案:167.

解 将该式按顺序以六个为一组运算:

$$\begin{aligned} & (997 - 996 - 995 + 994 + 993 - 992) + (991 - 990 - 989 + 988 + 987 - 986) \\ & + (985 - 984 - 983 + 982 + 981 - 980) + \cdots + (7 - 6 - 5 + 4 + 3 - 2) + 1 \\ &= (1 - 1 + 1) + (1 - 1 + 1) + (1 - 1 + 1) + \cdots + (1 - 1 + 1) + 1. \end{aligned}$$

此时可知共有 $(997 - 1) \div 6 = 166$ 组 $(1 - 1 + 1)$,故原式可改写为 $166 \times (1 - 1 + 1) + 1 = 167$.

9. 答案:7500 毫升.

解 可知硫酸共有 $10 \times 40\% = 4$ (升)的硫酸,浓度为 48% 的硫酸溶液和浓

度为80%的硫酸溶液共有 $10 - 2 = 8$ (升). 若8升全为80%的硫酸溶液, 则应有 $8 \times 80\% = 6.4$ (升) 的硫酸, 比现有的多 $6.4 - 4 = 2.4$ (升), 故浓度为48%的硫酸溶液有

$$2.4 \div (80\% - 48\%) = 7.5 \text{ (升)} = 7500 \text{ (毫升)}.$$

10. 答案:6只.

解 若所有的鸡按照早上的价钱出售, 则可收入 $24 \times 7 = 168$ 元, 但实际上仅收入132元, 一共少了 $168 - 132 = 36$ 元, 即为(折价) $\times$ (只数). 由于下午的价钱仍为整数, 故可求出可能的组合为 $6 \times 6, 4 \times 9, 3 \times 12$ 与 2×18 ; 再由早上卖出不到鸡总数的一半可知下午所卖出的鸡数至少为13只, 因此仅 2×18 满足, 即下午每只鸡折价2元, 早上卖出 $24 - 18 = 6$ (只).

11. 答案:330 cm.

解 由 $AD = BC$ 可知2倍的小长方形长的长度等于3倍的小长方形宽的长度, 故可得

$$\begin{aligned} & \text{长方形 } ABCD \text{ 的周长} \\ &= AD + CD + BC + AB \\ &= 5 \text{ 倍的小长方形宽的长度} + 4 \text{ 倍的小长方形长的长度} \\ &= 11 \text{ 倍的小长方形宽的长度}. \end{aligned}$$

因长方形 $ABCD$ 的面积是 6750 cm^2 , 故小长方形的面积是 $6750 \div 5 = 1350$ (cm^2), 即小长方形宽的平方为 $1350 \div 1.5 = 900$, 可知小长方形宽为30 cm, 因此长方形 $ABCD$ 的周长为330 cm.

12. 答案:49.

解 经观察可知相对面的点数和均为7.

$$\begin{aligned} & (\text{第一个骰子顶面的点数}) \times (\text{第二个骰子顶面的点数}) \\ & + (\text{第一个骰子顶面的点数}) \times (\text{第二个骰子底面的点数}) \\ & + (\text{第一个骰子底面的点数}) \times (\text{第二个骰子顶面的点数}) \\ & + (\text{第一个骰子底面的点数}) \times (\text{第二个骰子底面的点数}) \\ &= (\text{第一个骰子顶面的点数}) \times (\text{第二个骰子顶面的点数} \\ & \quad + \text{第二个骰子底面的点数}) + (\text{第一个骰子底面的点数}) \\ & \quad \times (\text{第二个骰子顶面的点数} + \text{第二个骰子底面的点数}) \\ &= (\text{第一个骰子顶面的点数}) \times 7 + (\text{第一个骰子底面的点数}) \times 7 \\ &= (\text{第一个骰子顶面的点数} + \text{第一个骰子底面的点数}) \times 7 \\ &= 7 \times 7 = 49. \end{aligned}$$

13. 答案:175 km.

解 由于卡车来回3趟共花费18小时,可知卡车来回1趟需 $18 \div 3 = 6$ (小时). 因卡车从A地驶到B地与从B地驶回A地的速度比为 $50:70 = 5:7$,且速度与时间成反比,故卡车从A地驶到B地与从B地驶回A地花的时间比为7:

5,即卡车从A地驶到B地共花费 $6 \times \frac{7}{12} = 3.5$ (小时),因此A、B两地之间的距离为 $50 \times 3.5 = 175$ (km).

14. 答案:90.

解 要使这五个数的乘积最大,这5个数的十位数应尽可能大,故十位数应取5、6、7、8、9,即这5个数为 $9a$ 、 $8b$ 、 $7c$ 、 $6d$ 、 $5e$,其中 a 、 b 、 c 、 d 、 e 为0、1、2、3、4. 因这5个数的乘积为 $(90+a)(80+b)(70+c)(60+d)(50+e)$,故最大的乘积会发生在 $90 \times 80 \times 70 \times 60 \times e$ 最大时,故 e 取4,因此可知其中有54,此时转变为求 $(90+a)(80+b)(70+c)(60+d)$ 的最大乘积,该值必发生在 $90 \times 80 \times 70 \times d$ 最大时,故 d 取3,因此可知其中有63,此时转变为求 $(90+a)(80+b)(70+c)$ 的最大乘积,该值必发生在 $90 \times 80 \times c$ 最大时,故 c 取2,因此可知其中有72,此时转变为求 $(90+a)(80+b)$ 的最大乘积,该值必发生在 $90 \times b$ 最大时,故 b 取1,因此 $a=0$. 故这五个二位数中最大数为90.

15. 答案:25种.

解 若只以水平或竖直线段行走,则六条线段恰为最短路径,因此可直接根据加法原理得到走法总数:

图1-6中的数字为从A点沿直线段走到该点最短路径的方法数,故可知走到B点有20种走法;接着考虑加入走斜线段的方法数(图1-7),则还有以下5种走法:

$A \rightarrow d \rightarrow i \rightarrow e \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow B$, $A \rightarrow d \rightarrow i \rightarrow e \rightarrow j \rightarrow n \rightarrow B$,

$A \rightarrow d \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow f \rightarrow k \rightarrow B$, $A \rightarrow d \rightarrow i \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow k \rightarrow B$,

$A \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow j \rightarrow f \rightarrow k \rightarrow B$.

因此共 $20 + 5 = 25$ 种走法.

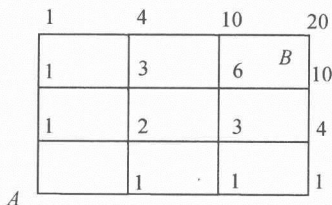


图 1-6

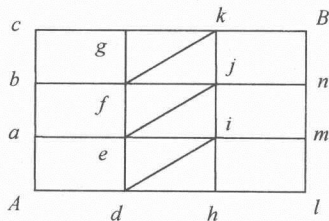


图 1-7

1.3 队际竞赛试题

1. 三角形 PQR 是边长为 3 个单位长的正三角形, 线段 $PU, UV, VQ, QW, WX, XR, RY, YZ, ZP$ 均长 1 个单位. 阴影部分四边形 $UWXY$ 的面积占三角形 PQR 面积的几分之几(图 1-8)?

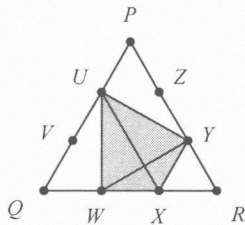


图 1-8

2. 计算:

$$\begin{aligned}
 & 1 \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) \\
 & + 3 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) \\
 & + 5 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) \\
 & + 7 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) \\
 & + 9 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) + 11 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) \\
 & + 13 \times \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) + 15 \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) + 17 \times \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) + 19 \times \frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

3. 用打字机把 1 到 1997 的所有整数都打在纸上, 共需按几次数字“9”的按键?

4. 某日清晨, 一艘渡轮从香港岛驶向九龙, 另一艘渡轮从九龙驶向香港岛, 两艘渡轮航速不相同. 它们同时出发, 于上午 8:20 首次相遇, 两艘渡轮继续航行到目的地, 停留 15 分钟后才返航, 两艘渡轮于上午 9:11 再度相遇. 假设两艘渡轮全程匀速行驶, 请问它们最初的开航时间是几点几分?

5. 下课时, 五名学生中, 有一名在黑板写了脏话, 当老师质问时, 学生回答如下:

学生 A 说: “是 B 或 C 写的.”

学生 B 说: “不是我也不是 E 写的.”

学生 C 说: “他们两个都说谎.”

学生 D 说: “不对, A、B 中只有一人说了实话.”

学生 E 说: “不, D 说的是假话.”