

考研数学复习指导系列丛书

2014

考研数学

基础篇

常考知识点解析

(数学二)

陈启浩 编著

可代替辅导班大班上课

让自学比听课效率更高



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学基础篇 常考知识点解析（数学二）

陈启浩 编著



机械工业出版社

本书是考研数学复习指导系列丛书中的一本,是第一阶段复习指导书.它特别适合时间紧、任务重的考生备考复习使用.全书精心解析了75个知识点,既覆盖了考试大纲,又整合融会了整个知识体系.书中的例题和练习题经过精心挑选,解答详尽、方法新颖.考生如果能认真阅读本书,则可在较短时间内,复习好考研数学的基本知识点,掌握参加入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法.

图书在版编目(CIP)数据

2014 考研数学基础篇常考知识点解析. 数学二/陈启浩编著. —北京:机械工业出版社, 2013.3

(考研数学复习指导系列丛书)

ISBN 978-7-111-41728-6

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 042748 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰 贺 伟

版式设计: 霍永明 封面设计: 路恩中

责任印制: 乔 宇

北京机工印刷厂印刷 (三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2013 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·20 印张·491 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-41728-6

定价: 39.80 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066 教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售一部: (010) 68326294 机工官网: <http://www.cmpbook.com>

销售二部: (010) 88379649 机工官博: <http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线: (010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

目 录

考研数学复习指导系列丛书介绍

前言

A. 高等数学

第一章 极限、连续与一元函数微分学	1
一、函数极限与左、右极限的关系	1
二、两个重要极限	2
三、无穷小的比较	4
四、函数连续的定义	6
五、函数的间断点	9
六、闭区间上连续函数的性质	11
七、数列极限存在准则	13
八、函数可导与导数的概念	15
九、导数的几何意义	19
十、复合函数、反函数及隐函数的导数计算	21
十一、高阶导数的计算	24
十二、函数微分的概念	27
十三、罗尔定理及其应用	30
十四、拉格朗日中值定理和柯西中值定理及其应用	32
十五、泰勒公式及其应用	35
十六、洛必达法则	39
十七、函数的单调性	42
十八、函数极值的计算	45
十九、函数最值的计算	48
二十、不等式的导数证明	50
二十一、方程不同实根个数的判定	53
二十二、曲线凹凸性、拐点的计算及曲率、曲率圆的概念	55
二十三、曲线渐近线的计算	59
练习题一	61
练习题一解答	65
第二章 一元函数积分学	70
一、不定积分的换元积分法	70
二、不定积分的分部积分法	74
三、有理函数不定积分的计算方法	77
四、定积分的概念及其计算方法	81
五、奇、偶函数和周期函数的定积分性质及一个重要公式	84
六、积分上限函数的求导方法	88
七、定积分大小的比较与估计方法	92

八、积分中值定理及其应用	95
九、含定积分的不等式的证明	98
十、积分和式极限的计算	101
十一、反常积分收敛性的概念及其计算	105
十二、平面图形面积的计算	110
十三、旋转体体积的计算	113
十四、曲线弧长与旋转曲面侧面积的计算	116
练习题二	120
练习题二解答	125
第三章 多元函数微积分学	130
一、二元函数极限与连续的概念、偏导数及二阶偏导数的计算	130
二、二元函数全微分	133
三、二元复合函数偏导数及二阶偏导数的计算	136
四、二元隐函数偏导数及二阶偏导数的计算	139
五、多元函数极值的计算	143
六、多元函数条件极值的计算	146
七、多元连续函数在有界闭区域上最值的计算	150
八、二重积分的计算	152
九、二次积分积分次序或坐标系的更换方法	158
十、二重积分大小的比较与估计	162
练习题三	166
练习题三解答	170
第四章 常微分方程	174
一、变量可分离微分方程、齐次微分方程的求解	174
二、一阶线性微分方程与伯努利方程	176
三、可降阶的二阶微分方程	178
四、二阶齐次线性微分方程	182
五、二阶非齐次线性微分方程	184
六、二阶欧拉方程	188
七、求解方程 $y(x) = \int_0^x g(x, y(t)) dt + h(x)$ 的方法	190
练习题四	193
练习题四解答	195
附录 高等数学的应用	199
一、变力做功的计算	199
二、引力、水的侧压力计算	200
三、由牛顿第二定律求质点的运动规律	203
B. 线性代数	
第五章 行列式、矩阵和向量	206
一、 n 阶行列式的概念	206
二、 n 阶行列式按一行 (或一列) 展开	209
三、矩阵的加法、数乘、乘法、转置运算及分块矩阵	212
四、矩阵的初等变换、初等矩阵及矩阵等价	216

五、伴随矩阵与矩阵求逆运算	219
六、矩阵的秩	223
七、向量组的线性相关性	226
八、向量组的极大线性无关组与秩	229
九、向量组的标准正交化与正交矩阵	232
十、 n 维向量空间	235
练习题五	239
练习题五解答	244
第六章 线性方程组、矩阵特征值与特征向量及二次型	251
一、 n 元齐次线性方程组及其解法	251
二、 n 元非齐次线性方程组及其解法	254
三、矩阵方程求解	258
四、两个线性方程组的同解与公共解	261
五、矩阵的特征值与特征向量	266
六、矩阵相似	269
七、矩阵的相似对角化	273
八、实对称矩阵正交相似对角化	278
九、二次型化标准形	283
十、二次型化规范形	290
十一、正定二次型与正定矩阵	293
练习题六	295
练习题六解答	302
参考文献	310

A. 高等数学

第一章 极限、连续与一元函数微分学

函数极限与左、右极限的关系

【主要内容】

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

注 (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 如果存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < x - x_0 < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(ii) 当 x_0 是分段函数 $f(x)$ 的分段点时, 总是通过计算左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 确定 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在.

2. 设 $f(x)$ 在 $|x| > N$ (N 是某个正数) 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

注 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $G > 0$, 使得 $|x| > G$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $G > 0$, 使得 $x < -G$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $G > 0$, 使得 $x > G$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

【典型例题】

例 1.1.1 设函数 $f(x) = \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

精解 由于

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

是分段函数, 所以计算它在分段点 $x=0$ 处的极限应从计算左极限与右极限入手.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2+0}{1+0} - 1 = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + 1 = \frac{0}{1} + 1 = 1,$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$

注 应注意 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$

例 1.1.2 确定使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在的常数 a 的值, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}}, & x < 0, \\ -\frac{1}{x} \ln(1+x), & x > 0. \end{cases}$$

精解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在且相等, 由此即可算出 a 的值.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{ax}{-\sqrt{2} \cdot \frac{x}{2}} = -\sqrt{2}a,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = -1,$$

所以, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 得 $-\sqrt{2}a = -1$, 即 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

例 1.1.3 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}.$

精解 由于 $x \rightarrow \infty$ 时, $x-1$ 与 $4x^2$ 相比可忽略不计, 同样 1 与 x 相比可忽略不计, $\sin x$ 与 x^2 相比可以忽略不计. 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2|x| + x}{|x|} = 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|},$$

其中, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$

所以, 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$ 不存在.

【主要内容】

两个重要极限是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

两个重要极限

它们的推广形式是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

注 以下四个极限也是常用的, 应与上面两个极限一起记住:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} &= \mu (\mu \text{ 为常数}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【典型例题】

例 1.2.1 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x$.

精解 用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的推广形式计算.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{-a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right)} \right]^x \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-a}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x} \\ &= \frac{1}{e^{-a} \cdot e^b} = e^{a-b}. \end{aligned}$$

例 1.2.2 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{2x} - 1} = 3$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

精解 由题设知 $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1] = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\sin x = 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin x}{e^{2x} - 1} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{2x} - 1} \cdot (\sqrt{1+f(x)\sin x} + 1) \cdot \frac{e^{2x} - 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{2x} - 1} = 3$ (题设),

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+f(x)\sin x} + 1) = \sqrt{1+0} + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \stackrel{\text{令 } t=2x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \times 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2} \times 1} = 12.$$

例 1.2.3 求使得极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 的常数 a 和 b , 其中函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} + a, & -1 < x < 0, \\ \frac{\ln(1 + bx)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

精解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$,

$$\text{即} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 1, \quad (1)$$

$$\text{其中} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x \right) + a = 1 \times 1 \times 0 + a = a,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{2x} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1 + bx)}{bx} \cdot b \right] = 1 \cdot b = b. \end{aligned}$$

将它们代入式(1)得 $a = b = 1$.

三、

无穷小的比较

【主要内容】

1. 无穷小的比较

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$), 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow x_0^-$, 或 $x \rightarrow x_0^+$) 时的无穷小;

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$), 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$, 或 $x \rightarrow +\infty$) 时的无穷小.

以下以 $x \rightarrow x_0$ 情形为例叙述两个无穷小的比较:

设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ (其中 $\beta(x) \neq 0$) 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小;

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小, 当 $\beta(x) = b(x - x_0)^k$ (其中 b, k

是常数, 且 $b \neq 0, k > 0$), 称 $\alpha(x)$ 是 k 阶无穷小. 特别当 $c = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x) (x \rightarrow x_0)$.

2. 常用等价无穷小

$x \rightarrow 0$ 时, 以下的等价无穷小是常用的:

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \neq 0), 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

3. 等价无穷小代替定理

设 $x \rightarrow x_0$ 时, 无穷小 $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ 满足 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在或为无穷大, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

这里的 x_0 若改为 x_0^+ , x_0^- , ∞ , $+\infty$ 或 $-\infty$, 上述结论仍成立.

【典型例题】

例 1.3.1 (单项选择题) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 为().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

精解 通过寻找 $x \rightarrow 0$ 时 $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$, $x \sin x^n$ 及 $e^{x^2} - 1$ 的等价无穷小即可算得 n 的值.

因为当 $x \rightarrow 0$ 时

$$(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^4,$$

$$x \sin x^n \sim x \cdot x^n = x^{n+1},$$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2,$$

所以, 由题设知 $4 > n + 1 > 2$, 即 $n = 2$, 因此选项 B 是正确的.

例 1.3.2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x(1 - \cos x)}}$.

精解 由于 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$e^{x^3} - 1 \sim x^3,$$

$$1 - \cos \sqrt{x(1 - \cos x)} \sim \frac{1}{2} [\sqrt{x(1 - \cos x)}]^2 = \frac{1}{2} x (1 - \cos x) \sim \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{4} x^3,$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x(1 - \cos x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{4}x^3} = 4.$$

例 1.3.3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x}$.

精解 利用公式 $A^b = e^{b \ln A}$ 得

$$(\cos x)^{\csc^2 x} = e^{\csc^2 x \ln \cos x},$$

然后计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln \cos x$ 即可.

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln [1 + (\cos x - 1)]}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln \cos x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

注 应记住公式 $A^b = e^{b \ln A}$, 它可将幂指函数转换成指数函数.

例 1.3.4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) + (\sqrt{1+x^3} - 1) \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$.

精解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) + (\sqrt{1+x^3} - 1) \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x(1 - \cos x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x \cdot \frac{1}{2}x^2} = 1,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (利用无穷小的性质: 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是无穷小, $\beta(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x) = 0$).

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) + (\sqrt{1+x^3} - 1) \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x} = 2 + 1 \times 0 = 2.$$

例 1.3.5 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x - 1} = 5$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

精解 由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x - 1} = 5$ (1)

得 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x}\right) = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 2x} = 0$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

于是由式(1)得

$$5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln 3 \cdot x \cdot \sin 2x} = \frac{1}{2 \ln 3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10 \ln 3$.

四、

函数连续的定义

【主要内容】

1. 函数在点 x_0 处连续的概念

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续 (即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$) 又右连续 (即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$), 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. 函数在开区间 (a, b) 内和闭区间 $[a, b]$ 上连续的定义

如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 的每一点处都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且在点 $x = a$ 处右连续, 在点 $x = b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

注 初等函数在其定义区间内或定义区间上连续.

【典型例题】

例 1.4.1 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}, & x \neq 1, \\ -\frac{4}{\pi^2}, & x = 1, \end{cases}$ 问 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处是否连续?

精解 按定义只要检验 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 是否成立即可.

$$\text{由 } f(1) = -\frac{4}{\pi^2},$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \stackrel{\text{令 } t = x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos t - 1))}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2} \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\frac{1}{2}t^2} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot 1 = -\frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, 所以 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处连续.

例 1.4.2 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax^2} - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3} - 1}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 求常数 a, b .

精解 根据 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续的充分必要条件有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0), \quad (1)$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax^2} - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2}{x \cdot \frac{x}{4}} = 4a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3} = 2,$$

$$f(0) = b.$$

将它们代入式(1)得

$$4a = 2 = b, \text{ 即 } a = \frac{1}{2}, b = 2.$$

例 1.4.3 设函数 $f(x) = \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$, 那么如何定义 $f(0)$ 的值, 使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续?

精解 由函数在点 $x=0$ 处连续的定义知, 只要

$$f(0) \stackrel{\text{定义}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

即可. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1}{x^3}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 &= e^{x \ln \frac{2+\cos x}{3}} - 1 \sim x \ln \frac{2+\cos x}{3} \\ &= x \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right) \sim -\frac{1}{3}x(1 - \cos x) \sim -\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{2}x^2 \\ &= -\frac{1}{6}x^3 \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

因此, 定义 $f(0) = -\frac{1}{6}$, 使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

$$\text{例 1.4.4 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2 e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x < 0, \\ \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x > 1, \end{cases} \quad \text{试将 } f(x) \text{ 的定义域扩充到 } (-\infty, +\infty),$$

并使 $f(x)$ 处处连续, 且在 $(0, 1)$ 内的图形是关于直线 $x = \frac{1}{3}$ 对称的抛物线.

精解 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 上连续. 设 $(0, 1)$ 上的抛物线方程为 $y = a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + b$. 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 必须在 $x=0, 1$ 上连续, 即常数 a, b 应满足

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + b \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2 e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[a\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + b \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{1}{9}a + b = 1, \\ \frac{4}{9}a + b = 2. \end{cases} \quad \text{解此方程组得 } a = 3, b = \frac{2}{3}.$$

$$\text{所以, 扩充定义域后的 } f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x < 0, \\ 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

五、

函数的间断点

【主要内容】

1. 函数间断点的定义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续 (即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义, 或虽然 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 都存在, 但它们不相等), 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

2. 函数间断点分类

(1) 第一类间断点

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 特别当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在) 时, 称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点; 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 时, 称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 第二类间断点

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 但不是第一类间断点, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 特别当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 时, 称 x_0 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 它是常见的第二类间断点.

【典型例题】

$$\text{例 1.5.1 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(ax^3)}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{e^{ax^2} + x^2 - 1}{1 - \cos 2x}, & x > 0, \end{cases} \quad \text{问常数 } a, b \text{ 为何值时, } x=0 \text{ 是 } f(x)$$

的可去间断点.

精解 根据可去间断点的定义有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0), \quad (1)$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arcsin(ax^3)}{x^2(\sqrt{1+x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x^2 \cdot \frac{1}{2}x} = 2a,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^2} + x^2 - 1}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{ax^2} - 1) + x^2}{\frac{1}{2}(2x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^2} - 1}{x^2} + 1 \right) = \frac{1}{2}(a+1), \end{aligned}$$

$$f(0) = b.$$

将它们代入式(1)得

$$2a = \frac{1}{2}(a+1) \neq b, \text{ 即 } a = \frac{1}{3}, b \neq \frac{2}{3}.$$

$$\text{例 1.5.2 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x < 0, \\ 3, & x = 0, \\ 3 + xe^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \end{cases} \text{ 求 } f(x) \text{ 的间断点(须指明类型)与连续区间}$$

(即使 $f(x)$ 连续的区间).

精解 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ 是连续的; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 3 + xe^{\frac{1}{x-1}}$ 除点 $x = 1$ 外, 处处连续, 所以 $f(x)$ 的可能间断点为 $x = 0, 1$.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3x}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 + xe^{\frac{1}{x-1}}) = 3$, 且 $f(0) = 3$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 所以 $x = 0$ 不是函数 $f(x)$ 的间断点, 而是连续点.

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 + xe^{\frac{1}{x-1}}) = \infty$, 所以, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 且是无穷间断点.

综上所述, $f(x)$ 有唯一的间断点 $x = 1$ (第二类间断点, 且是无穷间断点), 连续区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$.

例 1.5.3 求函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数.

精解 由于 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 是初等函数, 它的间断点为分母为零的点, 即 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)}{\pi x} = \frac{1}{\pi}, \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} \stackrel{\text{令 } t=x+1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(-2+3t-t^2)}{-\sin \pi t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(-2+3t-t^2)}{-\pi t} = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

且由 $f(x)$ 是偶函数可得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{\pi}$.

此外, 对 $k = \pm 2, \pm 3, \dots$, 有

$$\lim_{x \rightarrow k \sin \pi x} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \infty,$$

所以, $f(x)$ 仅有 3 个可去间断点, 它们为 $x=0, -1, 1$.

例 1.5.4 求函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点.

精解 $f(x)$ 有间断点 $x = -1, 0, 1$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x}{x+1} \cdot \sqrt{2} \right) = \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \text{ 不存在, 但不为无穷大,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x+1} \cdot \sqrt{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 只有一个无穷间断点, 即 $x = -1$.

六、

闭区间上连续函数的性质

【主要内容】

1. 最值定理

设函数在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值 M 与最小值 m , 即存在 $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, 使得 $f(\xi_1) = M, f(\xi_2) = m$.

2. 介值定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则对介于 $f(x_1), f(x_2)$ ($x_1, x_2 \in [a, b]$) 的任意实数 c , 存在介于 x_1 与 x_2 的 ξ , 使得 $f(\xi) = c$.

特别地, 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 其最大值与最小值分别为 M 与 m 时, 对任意 $c \in [m, M]$, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = c$.

3. 零点定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

零点定理有多种推广形式, 例如,

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = 0$.