考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学

基础篇

常考知识点解析

（数学二）

陈启浩　编著

可代替辅导班大班上课

让自学比听课效率更高

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学基础篇
常考知识点解析（数学二）

陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学复习指导系列丛书中的一本，是第一阶段复习指导书. 它特别适合时间紧、任务重的考生备考复习使用. 全书精心解析了75个知识点，既覆盖了考试大纲，又整合融会了整个知识体系. 书中的例题和练习题经过精心挑选，解答详尽、方法新颖. 考生如果能认真阅读本书，则可在较短时间内，复习好考研数学的基本知识点，掌握参加入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法.

图书在版编目（CIP）数据

2014考研数学基础篇常考知识点解析. 数学二/陈启浩编著. —北京：机械工业出版社，2013.3

（考研数学复习指导系列丛书）

ISBN 978-7-111-41728-6

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第042748号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 贺 纬
版式设计：霍永明 封面设计：路恩中
责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年4月第1版第1次印刷
184mm×260mm·20印张·491千字
标准书号：ISBN 978-7-111-41728-6
定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

目　录

B. 线性代数

A. 高等数学

第一章　极限、连续与一元函数微分学

一、函数极限与左、右极限的关系

【主要内容】

1. 设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

注　（ⅰ）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意$\varepsilon>0$，如果存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$-\delta<x-x_0<0$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$0<x-x_0<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

（ⅱ）当x_0是分段函数$f(x)$的分段点时，总是通过计算左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$确定$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在.

2. 设$f(x)$在$|x|>N$（N是某个正数）内有定义，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

注　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意$\varepsilon>0$，存在$G>0$，使得$|x|>G$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意$\varepsilon>0$，存在$G>0$，使得$x<-G$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意$\varepsilon>0$，存在$G>0$，使得$x>G$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【典型例题】

例 1.1.1　设函数$f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$，求极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

精解　由于

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\[2ex] \dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$$

是分段函数，所以计算它在分段点$x=0$处的极限应从计算左极限与右极限入手.

由于 $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+1=\frac{0}{1}+1=1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

注　应注意 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

例 1.1.2　确定使极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在的常数 a 的值，其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0,\\ -\dfrac{1}{x}\ln(1+x), & x>0.\end{cases}$$

精解　由$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在可得 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$存在且相等，由此即可算出 a 的值.

由于 $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin ax}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{ax}{-\sqrt{2}\cdot\frac{x}{2}}=-\sqrt{2}a,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=-1,$$

所以，由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$得 $-\sqrt{2}a=-1$，即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 1.1.3　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

精解　由于 $x\to\infty$ 时，$x-1$ 与 $4x^2$ 相比可忽略不计，同样 1 与 x 相比可忽略不计，$\sin x$ 与 x^2 相比可以忽略不计. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2}+x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2|x|+x}{|x|}=2+\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|},$$

其中， $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

所以，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$不存在.

二、两个重要极限

【主要内容】

两个重要极限是

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 和 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left(\text{或}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\right).$$

它们的推广形式是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k \text{ 和 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a.$$

注 以下四个极限也是常用的，应与上面两个极限一起记住：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu(\mu\text{ 为常数}),\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

【典型例题】

例 1.2.1 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$.

精解 用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的推广形式计算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{-a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}\right]^x\\&=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-a}{x}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x}\\&=\frac{1}{e^{-a}\cdot e^b}=e^{a-b}.\end{aligned}$$

例 1.2.2 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

精解 由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{1+f(x)\sin x}-1]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin x=0$，

所以，
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{e^{2x}-1}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}\cdot(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)\cdot\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}}\right],\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$（题设），

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)=\sqrt{1+0}+1=2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\xlongequal{\text{令 } t=2x}\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x\to 0}f(x)=3\times 2\times\frac{1}{\frac{1}{2}\times 1}=12.$$

例 1.2.3 求使得极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$的常数 a 和 b，其中函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin x}+a, & -1<x<0,\\ \dfrac{\ln(1+bx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

精解 由$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$知$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，

即
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{x^2}-1}{\sin x}+a\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+bx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=1, \tag{1}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin x}+a\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\right)+a=1\times 1\times 0+a=a$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+bx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+bx)}{2x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+bx)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+bx)}{bx}\cdot b\right]=1\cdot b=b.$$

将它们代入式(1)得 $a=b=1$.

三、无穷小的比较

【主要内容】

1. 无穷小的比较

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=0$，或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=0$），则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$（或 $x\to x_0^-$，或 $x\to x_0^+$）时的无穷小；

如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$（或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$），则称 $f(x)$ 是 $x\to\infty$（或 $x\to-\infty$，或 $x\to+\infty$）时的无穷小.

以下以 $x\to x_0$ 情形为例叙述两个无穷小的比较：

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$（其中 $\beta(x)\neq 0$）都是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小；

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，当 $\beta(x)=b(x-x_0)^k$（其中 b，k 是常数，且 $b\neq 0$，$k>0$），称 $\alpha(x)$ 是 k 阶无穷小. 特别当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to x_0)$.

2. 常用等价无穷小

$x\to 0$ 时，以下的等价无穷小是常用的：

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ e^{x}-1\sim x,\ (1+x)^{\mu}-1\sim\mu x(\mu\neq 0),\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}.$$

3. 等价无穷小代替定理

设 $x\to x_0$ 时，无穷小 $\alpha(x)$，$\alpha_1(x)$，$\beta(x)$，$\beta_1(x)$满足 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在或为无穷大，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

这里的 x_0 若改为 x_0^+，x_0^-，∞，$+\infty$ 或 $-\infty$，上述结论仍成立.

【典型例题】

例 1.3.1　(单项选择题)设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

精解　通过寻找 $x\to 0$ 时$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$，$x\sin x^n$ 及 $e^{x^2}-1$ 的等价无穷小即可算得 n 的值.

因为当 $x\to 0$ 时

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^2\cdot x^2=\frac{1}{2}x^4,$$

$$x\sin x^n\sim x\cdot x^n=x^{n+1},$$

$$e^{x^2}-1\sim x^2,$$

所以，由题设知　$4>n+1>2$，即 $n=2$，因此选项 B 是正确的.

例 1.3.2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

精解　由于 $x\to 0^+$时，

$$e^{x^3}-1\sim x^3,$$

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}[\sqrt{x(1-\cos x)}]^2=\frac{1}{2}x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{4}x^3,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3}{\frac{1}{4}x^3}=4.$

例 1.3.3　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$.

精解　利用公式 $A^b=e^{b\ln A}$得

$$(\cos x)^{\csc^2 x}=e^{\csc^2 x\ln\cos x},$$

然后计算$\lim\limits_{x\to 0}\csc^2 x\ln\cos x$ 即可.

$$\begin{aligned}\text{由于}\lim_{x\to 0}\csc^2 x\ln\cos x&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\sin x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\csc^2 x\ln\cos x}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

注　应记住公式 $A^b=e^{b\ln A}$，它可将幂指函数转换成指数函数.

例 1.3.4　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x-1)+(\sqrt{1+x^3}-1)\sin\dfrac{1}{x}}{1-\cos x}$.

精解

$$\lim_{x\to0}\frac{x(e^x-1)+(\sqrt{1+x^3}-1)\sin\dfrac{1}{x}}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(e^x-1)}{1-\cos x}+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x(1-\cos x)}\cdot\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x},\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot x}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}x^3}{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}=1,$$

$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$（利用无穷小的性质：设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$是无穷小，$\beta(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有界，则$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)=0$）.

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x\to0}\frac{x(e^x-1)+(\sqrt{1+x^3}-1)\sin\dfrac{1}{x}}{1-\cos x}=2+1\times0=2.$$

例 1.3.5　设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right)}{3^x-1}=5$，求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

精解　由题设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right)}{3^x-1}=5$　　(1)

得　$\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right)=0$，即$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin2x}=0$，并且$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

于是由式(1)得

$$5=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)}{\sin2x}}{x\ln3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln3\cdot x\cdot\sin2x}=\frac{1}{2\ln3}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}.$$

因此，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10\ln3$.

四、　函数连续的定义

【主要内容】

1. 函数在点 x_0 处连续的概念

设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称$f(x)$在点x_0处连续.

函数$f(x)$在点x_0处连续的充分必要条件是$f(x)$在点x_0处既左连续(即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$)又右连续(即$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$)，即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

2. 函数在开区间(a,b)内和闭区间$[a,b]$上连续的定义

如果函数$f(x)$在(a,b)的每一点处都连续，则称$f(x)$在(a,b)内连续.

如果函数$f(x)$在(a,b)内连续，且在点$x=a$处右连续，在点$x=b$处左连续，则称$f(x)$在$[a,b]$上连续.

注　初等函数在其定义区间内或定义区间上连续.

【典型例题】

例 1.4.1　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}, & x\neq 1,\\ -\dfrac{4}{\pi^2}, & x=1,\end{cases}$问$f(x)$在点$x=1$处是否连续?

精解　按定义只要检验$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$是否成立即可.

由　$f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\xlongequal{\text{令 } t=x-1}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\cos t}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+(\cos t-1))}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}\\&=-\frac{4}{\pi^2}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}t^2}=-\frac{4}{\pi^2}\cdot 1=-\frac{4}{\pi^2}\end{aligned}$$

知$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，所以$f(x)$在点$x=1$处连续.

例 1.4.2　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax^2}-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}-1}, & x>0\end{cases}$在点$x=0$处连续，求常数$a$，$b$.

精解　根据$f(x)$在点$x=0$处连续的充分必要条件有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax^2}-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^2}{x\cdot\dfrac{x}{4}}=4a$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3}=2,$$

$f(0)=b.$

将它们代入式(1)得

$$4a=2=b，即\ a=\frac{1}{2}，\ b=2.$$

例 1.4.3　设函数 $f(x)=\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$，那么如何定义 $f(0)$ 的值，使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续？

精解　由函数在点 $x=0$ 处连续的定义知，只要

$$f(0)\xlongequal{定义}\lim_{x\to0}f(x)$$

即可. 由于

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1}{x^3},\tag{1}$$

其中，$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}$

$$=x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim-\frac{1}{3}x(1-\cos x)\sim-\frac{1}{3}x\cdot\frac{1}{2}x^2$$

$$=-\frac{1}{6}x^3\quad(x\to0).$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

因此，定义 $f(0)=-\frac{1}{6}$，使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 1.4.4　设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x<0,\\ \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x>1,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 的定义域扩充到 $(-\infty,+\infty)$，并使 $f(x)$ 处处连续，且在 $(0,1)$ 内的图形是关于直线 $x=\frac{1}{3}$ 对称的抛物线.

精解　显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 上连续. 设 $(0,1)$ 上的抛物线方程为 $y=a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+b$. 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，必须在 $x=0$，1 上连续，即常数 a，b 应满足

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\left[a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+b\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}},\\ \lim\limits_{x\to1^-}\left[a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+b\right]=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{1}{9}a+b=1,\\[2mm] \dfrac{4}{9}a+b=2.\end{cases}$$
解此方程组得 $a=3$，$b=\dfrac{2}{3}$.

所以，扩充定义域后的
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x<0,\\[2mm] 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x>1.\end{cases}$$

五、函数的间断点

【主要内容】

1. 函数间断点的定义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续（即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，或虽然 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 都存在，但它们不相等），则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

2. 函数间断点分类

（1）第一类间断点

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 特别当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$（即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在）时，称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点；当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 时，称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

（2）第二类间断点

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，但不是第一类间断点，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点，特别当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 时，称 x_0 是 $f(x)$ 的无穷间断点，它是常见的第二类间断点.

【典型例题】

例 1.5.1　设函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin(ax^3)}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}, & x<0,\\[2mm] b, & x=0,\\[2mm] \dfrac{e^{ax^2}+x^2-1}{1-\cos 2x}, & x>0,\end{cases}$$
问常数 a，b 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

精解　根据可去间断点的定义有
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\neq f(0),\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\arcsin(ax^3)}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^3}{x^2\cdot\frac{1}{2}x}=2a$，

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax^2}+x^2-1}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{ax^2}-1)+x^2}{\frac{1}{2}(2x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax^2}-1}{x^2}+1\right)=\frac{1}{2}(a+1),$$

$f(0)=b.$

将它们代入式(1)得

$$2a=\frac{1}{2}(a+1)\neq b,\ 即\ a=\frac{1}{3},\ b\neq\frac{2}{3}.$$

例 1.5.2　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0,\\ 3, & x=0,\\ 3+xe^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\end{cases}$求$f(x)$的间断点（须指明类型）与连续区间（即使$f(x)$连续的区间）.

精解　当$x<0$时，$f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$是连续的；当$x>0$时，$f(x)=3+xe^{\frac{1}{x-1}}$除点$x=1$外，处处连续，所以$f(x)$的可能间断点为$x=0$，1.

由于　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 3x}{x}=3$，　　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3+xe^{\frac{1}{x-1}})=3$，且$f(0)=3$，即$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，所以$x=0$不是函数$f(x)$的间断点，而是连续点.

由于　$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3+xe^{\frac{1}{x-1}})=\infty$，所以，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点，且是无穷间断点.

综上所述，$f(x)$有唯一的间断点$x=1$（第二类间断点，且是无穷间断点），连续区间为$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$.

例 1.5.3　求函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数.

精解　由于$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$是初等函数，它的间断点为分母为零的点，即$x=0$，$\pm1$，$\pm2$，….

由于　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-x^2)}{\pi x}=\dfrac{1}{\pi}$，

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{令\ t=x+1}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{t(-2+3t-t^2)}{-\sin\pi t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(-2+3t-t^2)}{-\pi t}=\frac{2}{\pi},$$

且由$f(x)$是偶函数可得$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{2}{\pi}$.

此外，对$k=\pm2$，±3，…，有

$$\lim_{x\to k}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty,$$

所以，$f(x)$仅有3个可去间断点，它们为$x=0$，-1，1.

例 1.5.4　求函数$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$的无穷间断点.

精解　$f(x)$有间断点$x=-1$，0，1.

由于$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to-1}\left(\frac{x}{x+1}\cdot\sqrt{2}\right)=\infty,$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}\text{不存在，但不为无穷大，}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x+1}\cdot\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以，$f(x)$只有一个无穷间断点，即$x=-1$.

六、闭区间上连续函数的性质

【主要内容】

1. 最值定理

设函数在$[a, b]$上连续，则$f(x)$在$[a, b]$上必有最大值M与最小值m，即存在ξ_1，$\xi_2\in[a, b]$，使得$f(\xi_1)=M$，$f(\xi_2)=m$.

2. 介值定理

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，则对介于$f(x_1)$，$f(x_2)$(x_1，$x_2\in[a, b]$)的任意实数c，存在介于x_1与x_2的ξ，使得$f(\xi)=c$.

特别地，当$f(x)$在$[a, b]$上连续，其最大值与最小值分别为M与m时，对任意$c\in[m, M]$，存在$\xi\in[a, b]$，使得$f(\xi)=c$.

3. 零点定理

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则存在$\xi\in(a, b)$，使得$f(\xi)=0$.

零点定理有多种推广形式，例如，

(1) 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)\leqslant0$，则存在$\xi\in[a, b]$，使得$f(\xi)=0$.

(2) 设函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上连续，且$f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，则存在$\xi\in(a, +\infty)$，使得$f(\xi)=0$.