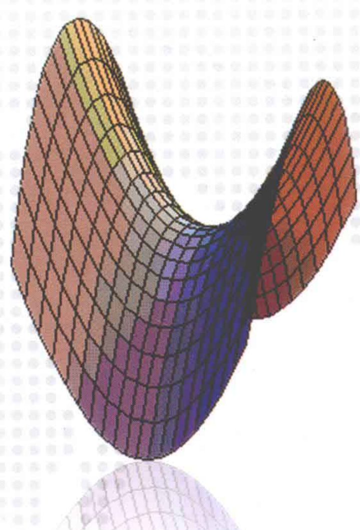
通高等学校“十二五”规划教材

概率论与数理统计学习辅导与提高

苏敏邦　杨庚华　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

概率论与数理统计学习辅导与提高

主编　苏敏邦　杨庚华

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是与主教材《概率论与数理统计》(苏敏邦主编、中国铁道出版社2011年出版)配套的同步学习辅导书，完全遵照主教材的体系编写，共8章，每章包括学习目标、内容提要、疑惑解析、补充例题、习题提示或解答、补充习题、补充习题提示或解答、自测题、自测题提示或解答等部分。

本书在例题和习题选取上力求代表性，由浅入深，深入浅出，力求让学生能够充分理解教材的知识点和基本公式。每个重要知识点都布置了一定量的习题，力求让学生看得懂，能理解，会做题，会应用。

本书适合作为普通高等学校非数学专业使用，尤其适合中等程度的学生使用，也可供成人、自考学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导与提高/苏敏邦，杨庚华主编．—北京：中国铁道出版社，2012.8
普通高等学校"十二五"规划教材
ISBN 978-7-113-14982-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①苏… ②杨… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第192444号

书　　名： 概率论与数理统计学习辅导与提高
作　　者： 苏敏邦　杨庚华　主编

策　　划： 李小军　　**读者热线：** 400-668-0820
责任编辑： 李小军　徐盼欣
封面设计： 付　巍
封面制作： 刘　颖
责任印制： 李　佳

出版发行： 中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街8号)
网　　址： http://www.51eds.com
印　　刷： 三河兴达印务有限公司
版　　次： 2012年8月第1版　　2012年8月第1次印刷
开　　本： 720mm×960mm　1/16　　**印张：** 15.25　　**字数：** 288千
书　　号： ISBN 978-7-113-14982-6
定　　价： 28.00元

前　言

本书是与主教材《概率论与数理统计》(苏敏邦主编、中国铁道出版社2011年出版)配套的同步学习辅导书,完全遵照主教材的体系编写。主要内容包括:

1. 学习目标

根据一般普通高等院校非数学专业《概率论与数理统计》的教学大纲要求编写。

2. 内容提要

概括本章的主要概念、定理和公式,以便快速查找。

3. 疑惑解析

对本章中容易产生疑惑的问题加以辨析,使学生能深入理解有关问题。

4. 补充例题

为了弥补教材中不宜列举过多的例题,我们在这里补充了一定量的例题,以利于学生更好地掌握相关知识。

5. 补充习题及提示或解答

由于主教材中只有解答题,所以在这里重点给出了一定量的选择题、填空题,以利于学生从不同的侧面理解各部分知识,并对某些易于混淆的概念及其法则加以辨析。

6. 自测题及提示或解答

每章都给出了一套自测题,以便学生和教师在学习或教学中随时检测本章知识的掌握情况。

7. 模拟试卷

由于不同院校对不同专业的要求不同,有的专业只学习概率论部分,而有的专业要学习全部内容,因此,我们在这里给出了两套概率论

模拟试卷，以及两套概率论与数理统计模拟试题，以方便教师与学生在复习中选用。

本书在编写过程中得到了佛山科学技术学院理学院、数学系众多领导和同事们的大力支持，许多人都付出了艰辛的劳动，特别是曲军恒老师给本书提供了一些的资料。戎海武博士仔细审读了本书书稿，作出了大量的修订，并给出了一些有益建议。佛山科学技术学院理学院王冬副院长、宋春玲博士对本教材出版给予了大力支持和帮助。在此向他们表示衷心的感谢！限于编者水平有限，且时间仓促，不当之处在所难免，恳请国内同行及广大读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月于佛山科学技术学院

目　录

第 1 章

随机事件与概率

1.0 学习目标

1. 理解随机事件和样本空间的概念；

2. 掌握事件之间的关系与基本运算；

3. 了解概率的统计定义及概率的公理化定义；

4. 理解概率的古典定义；

5. 掌握概率的基本性质并能应用这些性质进行概率计算；

6. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式，并能应用这些公式进行概率计算；

7. 理解事件独立性的概念，掌握用独立性进行概率计算的方法.

学习重点：事件的关系及其运算，概率的公理化定义及性质，古典概型的概念及其计算，条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的理解及其应用.

学习难点：随机事件概率的性质的运用，全概率公式、贝叶斯公式、二项概率公式的应用.

1.1 内容提要

1.1.1 随机事件

1. 随机现象

必然现象：在一定条件下必然出现的现象. 随机现象：在一定条件下可能出现也可能不出现的现象. 随机试验：对随机现象的重复观察，简称试验，记为 E.

随机试验的特征：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，并且事先可以确定试验的所有可能的结果；

(3) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间与随机事件

随机试验的所有可能的结果组成的集合称为样本空间，记为 Ω. 样本空间的一个子集称为随机事件，简称为事件，常用大写字母 A,B,C 等表示.

只含一个试验结果(即样本空间中的一个元素)的事件为基本事件；否则为复合事件. 随机试验中包含在随机事件中的随机试验结果出现时，称为该事件发生.

在每次试验中一定发生的事件称为必然事件，用 Ω 表示. 每次试验中肯定不发生的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$.

3. 事件的关系与运算

事件 A 包含于事件 B：若事件 A 发生必有事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，记成 $A\subset B$.

事件的相等：若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记成 $A=B$.

事件 A 与 B 的并或和：若事件 C 发生，当且仅当事件 A 发生或 B 发生，则称事件 C 为事件 A 与 B 的并或和，记成 $A\cup B$ 或 $A+B$.

事件 A 与 B 的积或交：若事件 C 发生，当且仅当事件 A 与 B 同时发生，则称事件 C 为事件 A 与 B 的积或交，记成 $A\cap B$ 或 AB.

特别地，当 $AB=\varnothing$时，称 A 与 B 为互斥事件(或互不相容事件)，简称 A 与 B 互斥.

事件 A 与 B 的差：若事件 C 发生当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生，则称事件 C 为事件 A 与 B 的差，记成 $A-B$.

特别地，称 $\Omega-A$ 为 A 的对立事件(或 A 的逆事件、补事件)等，记成 $\overline{A}$.

4. 事件的关系与运算的性质

基本性质：

$$\varnothing\subset A\subset\Omega;\quad A-B=A-AB=A\overline{B};\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

运算法则：

交换律 $$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA;$$

结合律 $$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A(BC)=(AB)C;$$

分配律 $$A(B\cup C)=AB\cup AC,\quad A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C);$$

对偶律 $$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B};$$

$$A-B=A\overline{B},\quad A=AB\cup A\overline{B}.$$

1.1.2 随机事件的概率

1. 事件的频率

$$f_n(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 发生的次数}}{\text{试验的总次数}}.$$

2. 频率的性质

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_k) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

3. 概率公理化

设 E 是一个随机试验，Ω 是它的样本空间. 对于 E 中的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，我们把满足下列条件的集合函数 $P(\cdot)$ 称为事件 A 的概率.

(1) 非负性，对于 E 中的每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 完备性，$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性，若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$

4. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(B)\geqslant P(A)$；

(5) 加法定理：$P(B\cup A)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

1.1.3 古典概率模型

古典概率模型的假设：

(1) 试验结果只有有限种；

(2) 各种结果出现的可能性相同.

古典概型的计算公式

$$P(A) = \sum_{r=1}^{k} P(\omega_{i_r}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中包含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

1.1.4 条件概率

1. 条件概率定义

设 $P(B)>0$，则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生条件下，事件 A 的条件

概率.

2. 条件概率的性质

(1) $0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega|B)=1$;

(3) 若 A_1, A_2,…互斥,则

$$P((A_1\cup A_2\cup\cdots)|B))=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots.$$

3. 乘法公式

若 $P(B)>0$,则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$. 若 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

4. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$为两两互斥的事件,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$;另有一事件 B,它总是与 $A_1,A_2,\cdots,A_n$之一同时发生,则有公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

5. 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互斥的事件,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$;另有一事件 B,它总是与 $A_1,A_2,\cdots,A_n$之一同时发生,则

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

1.1.5 事件的独立性

1. 两个事件的独立性

(1) 定义:若两事件 A, B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A 与 B 相互独立,简称 A, B 独立.

(2) 性质

① 若事件 A 与 B 独立,且 $P(A)>0$,则 $P(A|B)=P(A)$;

② 若事件 A 与 B 独立,则 $\overline{A}$ 和 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

2. n 个事件的独立性

(1) 定义: 如果事件 A,B,C 满足

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases},$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

推广　设 A_1, A_2,…, A_n是 n 个事件,如果对任意 $k(1<k<n)$,任意($1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$),等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立,则称 n 个事件 A_1, A_2,…, A_n相互独立.

(2) 计算 n 个独立事件并的概率公式.

设事件 A_1, A_2,…, A_n相互独立,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n});$$

(3) n 个相互独立事件具有如下两个重要结论:

① 若事件 A_1, A_2,…, A_n相互独立,则其中任意 $k(k<n)$个事件 A_{i_1}, A_{i_2},…, A_{i_k}也相互独立;

② 若事件 A_1, A_2,…, A_n相互独立,则 B_1, B_2,…, B_n也相互独立,其中 B_i或为 A_i,或为$\overline{A_i}$,$i=1, 2,\cdots, n$.

1.2 疑惑解析

1.2.1　什么是统计规律性?什么是随机现象?

现象在一定条件下发生,其结果是多样的,因而在现象发生前不能预知确切结果的不确定现象,其结果在大量重复试验中呈现出一种规律性.由于这种规律是根据统计数据分析出来的,因而称为统计规律性.

例如,两人射击.甲是神枪手,乙是普通射手.如果打一发子弹,甲可能打中也可能打不中,乙也可能打中也可能打不中,看不出什么规律.

如果两人比赛,各打 10 组,每组 100 发子弹,结果是:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	97	95	98	92	100	96	92	94	91	96
乙	50	52	47	56	45	54	44	43	48	47

我们可以看出规律性:甲可说几乎每发必中,乙只有大约一半的可能性打中.这种规律性称为统计规律性.在大量试验中才显示出来,不是个别试验显示的特性.

在一次试验或观察中结果不能预先确定,而在大量重复试验中结果具有统计规律性的现象称为随机现象.随机现象是概率论与数理统计的主要研究对象.

1.2.2 样本空间与必然事件之间有什么关系？

样本空间是随机试验 E 的所有可能结果的集合，而必然事件是指随机试验中一定会出现的结果. 虽然在一次试验中只有样本空间的一个元素发生，但在把样本空间视作一个整体时，我们说它在每次试验中都发生了. 因此，可以说样本空间是必然事件.

1.2.3 如何区分互逆事件与互斥事件？

如果两个事件 A 与 B 必有一个事件发生，且至多有一个事件发生，则 A、B 为互逆事件；如果两个事件 A 与 B 不能同时发生，则 A、B 为互斥事件.

因而，互逆必定互斥，互斥未必互逆.

区别两者的关键是：当样本空间只有两个事件时，两事件才可能互逆，而互斥适用于多个事件的情形. 作为互斥事件在一次试验中两者可以都不发生，而互逆事件必发生一个且只发生一个.

例如，掷一枚硬币结果只有两个，正面或反面，它们既是互逆事件也是互斥事件；而掷一枚骰子出现 1 点与出现 2 点是两个互斥事件但不是互逆事件.

1.2.4 如何区分两事件独立与两事件互斥？

两个事件相互独立，实质上是指事件 B 的出现对于事件 A 的出现没有影响，且事件 A 的出现对于事件 B 的出现也没有影响. 而 A、B 互斥，则是指 A 和 B 在一次试验中不能同时出现，即 $AB=\varnothing$. 在通常情况下，相互独立与互斥是两个互不等价、完全不同的概念，读者不能混淆. 但是这两个概念也有联系，因为在 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 的条件下，若 A、B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，而若 A、B 互斥，则 $P(AB)=0$，说明在 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 的情况下，相互独立不能推出互斥.

在实际问题中，对于事件的独立性，我们常常不是用定义来判断，而是由试验方式来判断试验的独立性，由试验的独立性来判断事件的独立性. 或者说根据问题的实质，直观上看一事件发生是否影响另一事件的发生来判断. 例如，甲乙两名射手在相同条件下进行射击，则“甲击中目标”与“乙击中目标”两事件是独立的. 如果对实际问题中的事件还难以判断它们是否独立，则需要通过已知的统计资料进行分析，这是统计学中的内容.

1.2.5 “频率”与“概率”之间有何关系？

随机事件的频率，指此事件发生的次数与试验总次数的比值，它具有一定的稳定性，即稳定在某一常数附近，而偏离的可能性很小. 为了说明这种规律，我们把这