江苏省五年制中学試用課本

初等数学

CHUDENG SHUXUE

第一册

江苏人民出版社

目　录

第一章　实　数

第二章 二次函数

第一章　实　數

I　实數的基本概念

§1 无理数的引入

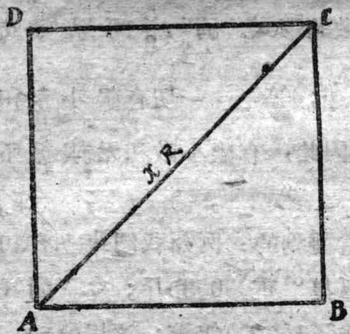
在小学里，我們已經学过整数（正負整数和零）和分数（正負分数），这些数总称为有理数．而任何一个有理数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式．例如$\frac{5}{8}$可以写成0.625；$-\frac{7}{9}$可以写成$-0.777\cdots\cdots$；等等，一切有限小数和无限循环小数都可以化成分数*，因此，有限小数和无限循环小数都是有理数．

有理数是我們日常生活中經常碰到的，例如我們班上有50个小朋友；甘肃省的一只南瓜"卫星"重200.35斤；今天的气温比昨天上升了$-1.2°C$（就是下降了$1.2°C$）等等；这里的50、200.35、-1.2、1.2都是有理数；又如在度量的問題上，在选定了度量单位以后，被度量后得到的量数，一般都是用整数和小数来表示的，例如用米尺去量6尺长的布就是2米，6尺4寸长的布就是2米1分米3厘米3毫米多，本来还可以継續量下去，但在实际生活中有时量到寸，有时量到厘米或毫米以后也就終止了；在我們这里由于最后剩下的部分还不到半毫米，

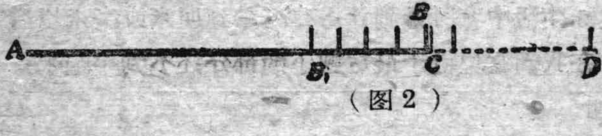
*这里不加証明

这一点剩余就不算了，我們說它的长度是2米1分米3厘米3毫米，也就是2.133米；可是6尺4寸长的布用米尺去量的眞正量数应該是2.13333……，这个数只要用3去除6.4就可以得到；这里的2米、2.1米、2.13333……米中的2，2.1，2.13333……，分别是整数，有限小数和无限循环小数，它們都是有理数。

但是在实际生活中，单靠用有理数来表示量是不夠的，有些量并不能用有理数来表示，我們还是以度量来說吧！譬如用单位长度AB做边作一个正方形$ABCD$（如图1），然后用AB去量它的对角綫AC，量了一次有剩余，量两次又不夠，再用$\frac{1}{10}AB$去量这个剩余，量了四次还有剩余，量五次又不夠，再用$\frac{1}{100}AB$去量这个新的剩余（如图2）。这样継續用十进度量的方法量下去，从表面上看似乎是量尽了，实际上用AB做度量单位，用十进度量的方法来量AC，一定是永远量不尽的。为什么这样說呢？倘若量到某一步驟后剛好量尽，那末AC的量数一定



（图1）



（图2）

是有限小数，也就是說，它的量数是有理数(設它是 x)．但是根据勾股弦定理得出：

$$x^2=1^2+1^2 \quad 或 x^2=2 \qquad (1)$$

对于有理数x来說，(1)是不能成立的①．

既然AC是永远量不尽的那末它的量数一定是无限小数，这个无限小数又不能是循环小数，因为无限循环小数可以化成分数，分数还是一个有理数．

根据以上的說明，AC的量数只能是无限不循环小数：1,41……,无限不循环小数是一个新数,我們把它叫做无理数．

在小学里我們学过的勾股弦定理，不但对于有理数适用，而且对于无理数也同样适用②；如图1中AC的量数設为无理数x,由勾股弦定理得出

$$x^2=1^2+1^2 \quad 或 x^2=2$$

我們把x記做$\sqrt{2}$并且認为：

$$(\sqrt{2})^2=2$$

一般地說，如果

$$x^2=a \quad (a 是自然数)$$

我們就把x（正値）記做$\sqrt{a}$，只要a不是一个自然数的平方数，那末$\sqrt{a}$都是无理数，例如$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$等等都是无理数．但$\sqrt{4}$不是无理数而是有理数2，因为$2^2=4$．

---

①因为，x不能是整数(任何整数的平方不能等于2)，也不能是分数(因为最簡分数的平方还是最簡分数，它也不能等于2)，就是說，x不能是有理数．

②这里不加証明．

§2 实　数

无理数在实际生活中是很多的．例如直徑为1（尺）的圓周長，我們知道是π（尺），π就是一个无理数，用小数写起来就是一个无限不循环小数，它的前几位小数是：

$\pi=3.1415926\cdots\cdots$；同样，$0.1010010001\cdots\cdots$，$1.212212221\cdots\cdots$，$4.353355333555\cdots\cdots$，等等，都是无理数．

无理数和有理数一样，也有正无理数和負无理数，負无理数就是正无理数的相反数；例如π的相反数是$-\pi$，$\sqrt{2}$的相反数是$-\sqrt{2}$等，这里的“$-\pi$”，“$-\sqrt{2}$”都是負无理数．

如果具有相反方向的量要用无理数表示的話，那末某一方向的量用无理数表示，和它相反方向的量就用負无理数表示．例如今天中午温度計上的水銀柱比昨天中午上升了一段，如果这一段高度就是以这只温度計上相隔1°C的長度做边所作的正方形的对角綫，那末，我們說：“今天中午的温度比昨天中午高$\sqrt{2}$°C”；如果下降了同样的長度，我們就說：“今天中午的温度比昨天中午高$-\sqrt{2}$°C”．

有理数和无理数总称为实数．过去我們已学过的数用表表示如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数（正負整数、零）}\\ \text{分数（正負分数）——有限小数或无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数——无限不循环小数．}\end{cases}$$

实数的絕对值的定义和有理数一样，正实数和零的絕对值就是这个数本身，負实数的絕对值就是和它相反的数，例如 $|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$；$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$；$|-\pi|=\pi$；$|0|=0$.

§3 实数大小的比較

有理数都可以用有限小数或无限循环小数来表示，而无理数是无限不循环小数，为了下面討論的方便起見，我們把整数和有限小数都写成循环节是 0（也有用循环节是 9）的无限小数的形式，例如 $2=2.000\cdots\cdots$，$0.3=0.3000\cdots\cdots$. 这样，每一个实数都可以写成无限小数（循环的和不循环的），对于两个实数（至少有一个是无理数）大小的比較，我們作如下的規定：

一、两个正实数写成无限小数以后，如果整数部分不同，那末整数部分大的数被認为是較大的；如果整数部分相同，而十分位上的数字不同，那末十分位上数字大的数較大，如果十分位上的数字也相同，而百分位上的数字不同，那末百分位上数字大的数較大；依此类推. 如果它們的对应位上的数字都相同，那末这两个数被認为是相等的.

二、两个負实数的大小由它們的絕对值的大小来决定，絕对值大的数較小，絕对值相等的数是相等的.

三、正負实数与零的大小的比較是和有理数一样的，任何正数都大于零，也大于任何負数，而任何負数都小于零.

例1. 比較 $\sqrt{2}$ 与 1.4 的大小：

解： 利用小学里学过的平方根表，查得

$\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$

而　$1.4=1.400\cdots\cdots$

$\sqrt{2}$与1.4写成无限小数的形式以后，它們的整数部分和十分位上的数字都相同，但$\sqrt{2}$的百分位上的数字是1，而1.4的百分位上的数字是0，这里$1>0$，所以$\sqrt{2}>1.4$.

例2. 比較π与$\frac{22}{7}$的大小.

解: π写成无限小数的形式是: $\pi=3.14159\cdots\cdots\cdots$

而$\frac{22}{7}=3.1428\cdots\cdots$

π与$\frac{22}{7}$写成无限小数的形式以后，它們的整数部分和十分位，百分位上的数字都相同，但π的千分位上的数字是1，而$\frac{22}{7}$的千分位上的数字是2，这里$2>1$，所以$\frac{22}{7}>\pi$.

例3. 比較$\sqrt{10}$与3.163的大小

解: 利用平方根表查得: $\sqrt{10}=3.162\cdots\cdots$

所以　$3.163>\sqrt{10}$.

例4. 比較$-\sqrt{10}$与-3.163的大小

解: 因为这两个数都是負数，要比較它們的大小，先要比較它們的絕对值的大小，而$|-\sqrt{10}|=\sqrt{10}=3.162\cdots\cdots$，$|-3.163|=3.163$，由例3知道$3.163>\sqrt{10}$，也就是$|-3.163|>|-\sqrt{10}|$，$\therefore -3.163<-\sqrt{10}$.

例5. 比較$\frac{1}{10}$和$-\pi$的大小

解：　这里$\frac{1}{10}>0$，$-\pi<0$，所以$\frac{1}{10}>-\pi$.

例6. 比較$-3.5047832\cdots\cdots$与$-3.5047833\cdots\cdots$的大小

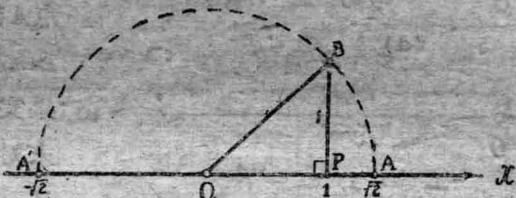
解：　$\because |-3.5047832\cdots\cdots|=3.5047832\cdots\cdots$，

$|-3.5047833\cdots\cdots|=3.5047833\cdots\cdots$

而　$3.5047833\cdots\cdots>3.5047832\cdots\cdots$

$\therefore$　$-3.5047833\cdots\cdots<-3.5047832\cdots\cdots$

和有理数一样，任何一个无理数都可以用数軸上的点来表示，如图3的A点就是表示无理数$\sqrt{2}$，A'点就是表示$-\sqrt{2}$；又如要在数軸上表示无理数$\pi=3.14\cdots\cdots$，我們可以从数軸上的



（图3）

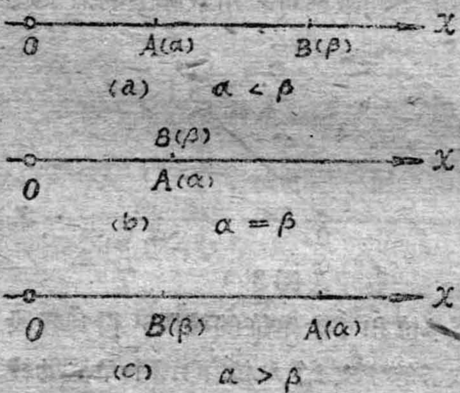
原点O向右截取各等于3个单位和4个单位的綫段，得到綫段A_0B_0，然后，从点O向右截取各等于3.1个单位和3.2个单位的綫段，得到綫段A_1B_1（綫段A_1B_1包含在綫段A_0B_0内），再从点O向右截取各等于3.14个单位和3.15个单位的綫段，得到綫段A_2B_2，等等．这样下去，每次所截得的綫段都比前一次所截得的綫段来得短，如果我們按照这样的方法无限制地截下去，那末在数軸上所截取的綫段也就无限制地縮短下去而趋于一点P（如图4），这个点P就是表示这个无理数π．

这样一来，对于任何一个实数，在数軸上都有唯一的一个

（图 4 ）

点和它对应；反过来，数轴上任何一点都有唯一的一个实数和它对应，换句話說，实数和数軸上的点是一一对应的．

因此从数軸上可以很明显的看出：如果实数α小于实数β，那末对应于实数α的点A在对应于实数β的点B的左方（如图5(a)）；如果实数α等于实数β，那末对应于它們的点A与点B重合（如图5(b)）；如果实数α大于实数β，那末对应于实数α的点A在对应于实数β的点B的右方（如图5(c)）．反之，也是成立的．



（图 5 ）

§ 4 无理数的近似值

我們已經知道无理数都是无限不循环小数，它不能用分数来表示，我們在实际应用它的时候，通常都用有限小数或分数来近似地表示它．

一个无理数，如果把它的十分位、百分位、千分位等后面

所有的数字舍去，就分别得到这个无理数精确到0.1、0.01、0.001等的不足近似值，把不足近似值的最末位数字加1，相应地就得到精确程度相同的过剩近似值.

例1. $\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$，它的近似值如下表：

精　确　到	0.1	0.01	0.001	0.0001	……
不足近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142	……
过剩近似值	1.5	1.42	1.415	1.4143	……
两个近似值的差	0.1	0.01	0.001	0.0001	……

例2. $\pi=3.1415926\cdots\cdots$，它的近似值如下表：

精　确　到	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	……
不足近似值	3.1	3.14	3.141	3.1415	3.14159	……
过剩近似值	3.2	3.15	3.142	3.1416	3.14160	……
两个近似值的差	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	……

从上面两个表里，可以清楚地看出：无理数总是大于它的不足近似值，而小于它的过剩近似值．当不足近似值与过剩近似值的小数位数无限制的增多时，对应的近似值的差也就无限制的减小；这就說明它們和无理数的差的絕对值越来越小，也就是和这个无理数越来越靠近．只要我們选取的精确度达到实际需要的程度，我們就可以用它的相应的近似值来代替这个无理数.

例如，我們在計算圓周长或圓面积时，对于$\pi=3.1415926\cdots\cdots$，只要取3.14，3.142，3.1416，或$\frac{22}{7}$来代替，这就是虽然不

能用有限小数或分数把无理数精确的表示出来，但可以用有限小数或分数表示它的不足近似值或过剩近似值，使其精确度到任意数位，也就是它和近似值的差可以小于任何指定的数.

§ 5 实数的运算

实数包括有理数和无理数两部分，而有理数是有限小数或者无限循环小数，无理数是无限不循环小数，根据上节所說，无限不循环小数总可以用有限小数或分数来近似地代替它，所以实数的运算通常都是取近似值（同是不足的或者同是过剩的）后再进行运算，至于取怎样的近似程度那就要看具体問題的需要了.

正是由于实数的运算通常都是用近似值来进行的，这样，就可以把实数的四则运算归結为有理数的四则运算，并且在有理数范圍内的运算律如加法交换律，加法結合律，乘法交换律，乘法結合律，乘法对加法的分配律，在实数范圍内也同样适用。

例1. 求$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$的和（精确到0.01）

解: $\because \sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$，

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{3}=(1.414\cdots\cdots)+(1.732\cdots\cdots)$

$=3.146\cdots\cdots\approx 3.14$

例2. 求π减去-3的結果(精确到0.001)

解: $\because \pi=3.1415\cdots\cdots$

$\therefore \pi-(-3)=(3.1415\cdots\cdots)+3=6.1415\cdots\cdots\approx 6.141$

例3. 計算$(1.252252225\cdots\cdots)\times 2$的結果

解: $(1.252252225\cdots\cdots)\times 2=2.504504450\cdots\cdots$

≈ 2.504504450

例4. $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

例5. $(0.1210210021\cdots\cdots)+(0.4345345534\cdots\cdots)$

$=0.5555555555\cdots\cdots=0.\dot{5}=\frac{5}{9}$

例6. $(0.4345345534\cdots\cdots)-(0.3234234423\cdots\cdots)$

$=0.1111111111\cdots\cdots=0.\dot{1}=\frac{1}{9}$

例7. $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2$

例8. $\sqrt{2}\div\sqrt{2}=1$

例4——例8，説明了两个无理数的加、減、乘、除（除数$\neq 0$）也能得出有理数.

有关乘除法較复杂的运算，将在近似計算中再行說明.

有理数范圍里不等式的运算性质，在实数范圍里也仍然保持. 例如α，β和γ是任何实数，并且$\alpha>\beta$，那么$\alpha+\gamma>\beta+\gamma$，$\alpha\gamma>\beta\gamma$（当$\gamma>0$时）；$\alpha\gamma<\beta\gamma$（当$\gamma<0$时）等等.

Ⅱ 方　　根

§6 方 根

我們在小学里已經学过：已知正方形的边长，就可以去求它的面积；已知立方体的边长，也可以去求它的体积. 現在我們提出两个相反的問題来进行研究：

(1) 如果一个正方形的面积是100平方米，那么它的边长是多少米？

(2) 如果一个立方体的体积是64立方米，那末它的边长是多少米？

設：正方形的边长为x米，那末$x^2=100$．我們曉得：知道了一个数的平方，求这个数的运算叫做开方．那末把100开平方就可以了，$\therefore x=10$（米）．

同样，設立方体的边长为x米，那末$x^3=64$，又怎样去求x呢？这里是知道一个数的立方等于64，而要求这个数，我們把求这个数的运算叫做开立方．

一般的如果一个数x的n次方等于a（即$x^n=a$，n是大于1的正整数），**那末这个数x就叫做a的n次方根．**

例如：$3^4=81$，3就是81的4次方根；

$(-5)^3=-125$，-5就是-125的3次方根．

a的二次方根又叫做a的**平方根**，a的三次方根又叫做a的**立方根**．例如：$5^2=25$，$(-5)^2=25$，5和-5都是25的平方根；又如：$4^3=64$，4是64的**立方根**．

求一个数的方根的运算叫做开方，求a的n次方根叫做把a开n次方，a叫做被开方数，n叫做根指数．开二次方又叫做**开平方**，开三次方又叫做**开立方**．

开方和乘方是两种相反的运算，例如：81开4次方是3和-3，而3和-3的4次方是81；又如：-125开3次方是-5，而-5的3次方是-125，因此，我們可以利用乘方来檢驗开方的結果是不是正确．

§ 7 方根的性质

一　奇次方根的性质：因为正实数的奇次冪是正数，負实数的奇次冪是負数，零的奇次冪是零，所以正实数的奇次方根必須是正数，負实数的奇次方根必須是負数，零的奇次方根还是零.

例如：$2^5=32$，32的5次方根是2；

$(-4)^3=-64$，-64的3次方根是-4.

因为在实数范圍里，任何不等于2的正数，它的5次方都不等于32，任何不等于-4的負数，它的立方都不等于-64．所以只有2是32的5次方根；-4是-64的三次方根.

从上面所說的，可以知道奇次方根有下述性質：

正数的奇次方根，是一个正数；負数的奇次方根，是一个負数；零的奇次方根就是零.

二　偶次方根的性質：因为正实数的偶次冪是正数，負实数的偶次冪也是正数，零的偶次冪是零，所以正实数的偶次方根可以是正数或者是負数，負实数的偶次方根在实数范圍里沒有意义，零的偶次方根还是零.

例如：$(-2)^4=2^4=16$，16的四次方根是2和-2，

$(-7)^2=7^2=49$，49的平方根是7和-7.

从这两个例子可以知道，正实数的偶次方根是两个相反的数.

从上面所說的可以知道偶次方根有下述性質：

正数的偶次方根，必須是两个相反的数，負数的偶次方根

在实数范圍里沒有意义，零的偶次方根就是零.

§8 方根的記法

我們把实数a的n次方根（n是正整数）用符号$\sqrt[n]{a}$来表示，例如：-64的三次方根表示为$\sqrt[3]{-64}$，因为正数的偶次方根是两个相反的数，所以規定在a是正数，n是偶数的情况下，符号$\sqrt[n]{a}$只表示两个方根里的正的一个，而負的一个用$-\sqrt[n]{a}$来表示. 例如：16的四次方根有两个，正的一个用符号$\sqrt[4]{16}$表示，負的一个用符号$-\sqrt[4]{16}$表示.

正数的正的方根，通常叫做算术根. 由上面規定，n是偶数的时候，符号$\sqrt[n]{a}$就表示算术根.

有时，我們把正数a的两个偶次方根合併写成$\pm\sqrt[n]{a}$的形式，例如：16的两个4次方根可以合併写成$\pm\sqrt[4]{16}$.

例1. 求下例各式的值：

① $\sqrt[3]{216}$　② $\sqrt[5]{-32}$　③ $\sqrt[4]{81}$　④ $\sqrt{(-6.8)^2}$

解： ① $\because 6^3=216$，　$\therefore \sqrt[3]{216}=6$；

② $\because (-2)^5=-32$，$\therefore \sqrt[5]{-32}=-2$；

③ $\because 3^4=81$，　$\therefore \sqrt[4]{81}=3$；

④ $\because (-6.8)^2=6.8^2$，并且$6.8>0$，$\therefore \sqrt{(-6.8)^2}=6.8$.

例2. 求适合下式的x：

① $x^3=64$，② $x^2=49$，③ $x^3=-27$ ④ $x^2=-25$

解： ①根据方根定义，$x=\sqrt[3]{64}=4$；

②根据方根定义，$x=\pm\sqrt{49}=\pm7$；