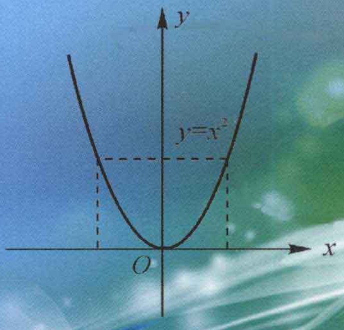
高等学校经典教材“三点”丛书

概率论与数理统计

浙大·第四版

重点 难点 考点辅导与精析

师义民 主编



西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是为《概率论与数理统计》(浙大第四版)编写的配套辅导书,全书共分12章(其章节顺序编排与教材一致,其中第10,11章略).内容包括概率论的基本概念,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律及中心极限定理,样本及抽样分布,参数估计,假设检验,方差分析及回归分析,随机过程及其统计描述,马尔可夫链,平稳随机过程.

考虑到报考研究生读者的需要,本书在介绍概率统计各章内容重点、难点的基础上,还对近年来全国硕士研究生入学统一考试中概率统计部分的真题做了详细解答.每章内容设计了四个板块:重点及知识点精析,难点及典型例题精析,考点及历年考研真题精析,课后习题解答.

本书可作为大学理工、管理和经济类等学生学习概率论与数理统计课程的参考书,也可供报考研究生的读者和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计重点 难点 考点辅导与精析/师义民主编. —西安:西北工业大学出版社,2012.4
(高等学校经典教材"三点"丛书)
ISBN 978-7-5612-3334-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①师… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第053401号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:(029)88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:727 mm×960 mm 1/16
印　　张:23.25
字　　数:396千字
版　　次:2012年4月第1版 2012年4月第1次印刷
定　　价:42.00元

前　　言

概率论与数理统计是高等院校理工、管理、经济类等专业的一门重要基础课程，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门必考科目. 概率统计包含的内容丰富，理论深刻，且应用广泛. 在概率统计的学习中，许多初学者深感理论抽象、习题难做，时常会碰到思路上的障碍. 为了满足广大读者学习概率统计课程及考研复习准备的需要，根据笔者多年从事概率统计教学及考研辅导班讲课的经验，编写了本书. 通过本书的学习，可以帮助读者正确理解概率统计的基本概念，掌握解题的方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力.

本书根据教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试，数学考试大纲》中概率统计部分的要求，并参考了浙江大学编《概率论与数理统计》(第四版)的章节次序来编写. 全书共分 12 章(其章节顺序编排与教材一致，其中第 10，11 章略)，内容包括概率论的基本概念，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，样本及抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析及回归分析，随机过程及其统计描述，马尔可夫链，平稳随机过程. 每章包括以下内容：

一、重点及知识点精析；

二、难点及典型例题精析；

三、考点及历年考研真题精析；

四、课后习题解答.

本书第 1，2，7 章由师义民编写，第 3，4，9 章由周丙常

编写，第 5，6，8 章由谢文贤编写，第 12，13，14 章由李凌编写. 全书由师义民统稿和定稿. 顾昕、谭伟、孙玉东、毛松等为本书的打印、校对做了很多工作，在此一并致谢.

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2012 年 1 月

目　录

第1章

概率论的基本概念

1.1 重点及知识点精析

1.1.1 样本空间与随机事件

1. 随机试验

具有下列特点的试验称为随机试验(简称试验):

(1) 试验可以在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前,不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,用 E 表示随机试验. 随机试验呈现出的现象称为随机现象.

2. 样本空间

把随机试验 E 所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S. 样本空间中的元素称为样本点.

3. 随机事件

把随机试验 E 的样本空间的子集称为随机事件,简称事件. 把单个样本点构成的集合称为基本事件. 称样本空间 S 为必然事件,不含任何样本点的空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

4. 事件间的关系及运算

(1) 包含与相等. 若事件A发生必然导致事件B发生,则称事件B包含事件A,记为$A\subset B$. 若$A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A与事件B相等,记为$A=B$.

(2) 和事件(或并事件). 如果"事件A与事件B至少有一个发生",则称这一事件为事件A与事件B的和事件,记为$A\cup B$. 以$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$表示$n$个事件$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$的和事件. 以$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件.

(3) 积事件(或交事件). 如果"事件A与事件B同时发生",则称这一事件为事件A与事件B的积(或交)事件,记为$A\cap B$或AB. 以$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$表示$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积(或交)事件. 以$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示可列个事件$A_1,A_2\cdots,A_n,\cdots$的积(或交)事件.

(4) 差事件. 如果"事件A发生,但事件B不发生",则称这一事件为事件A与事件B的差事件,记为$A-B$.

(5) 互斥(或互不相容)事件. 若二事件A与B不能同时发生,即满足$A\cap B=\varnothing$,则称A与B是互斥事件,或互不相容事件.

(6) 对立(或互逆)事件. 若事件A与B满足$AB=\varnothing$,且$A\cup B=S$,则称事件A与B是对立(或互逆)事件.

A的对立事件记为$\overline{A}$,$\overline{A}=S-A$. 两事件对立一定互斥,反之不一定成立.

(7) 事件间的运算律.

(Ⅰ) 交换律:$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(Ⅱ) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A(BC)=(AB)C$;

(Ⅲ) 分配律:$A(B\cup C)=AB\cup AC$, $A(B-C)=(AB)-(AC)$;

(Ⅳ) 对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

推广:$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

1.1.2 随机事件的概率及计算

1. 随机事件概率的定义

设E是随机试验,S是它的样本空间. 对于E的每一个事件A赋予一个实

数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 对于任一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing, i \neq j, i, j=1, 2, \cdots$

则
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$；

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4) 若 $B \subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且 $P(B) \leqslant P(A)$；

(5) 若 A, B 为随机事件，则有

$P(A-B)=P(A)-P(AB), P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个随机事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots-(-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots, A_n)$$

3. 古典概型

设 E 为随机试验，如果 E 具有下述两个特点：

(1) 样本空间中只包含有限个元素；

(2) 每个基本事件发生的可能性相同.

则称这种概率模型为古典概型. 对古典概型，事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 中所含的基本事件数}}{S \text{ 中所含基本事件的总数}}$$

4. 条件概率

设 A, B 为两个随机事件，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

5. 乘法定理

设 $P(A)>0$, $P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)=P(A)P(B\mid A)$$

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,则有

$$P(A_1,A_2,\cdots,A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\ P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})$$

6. 全概率公式与贝叶斯公式

(1) 全概率公式. 若随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成样本空间 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n,B$ 为任意事件,则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)\quad \text{(此式称为全概率公式)}$$

(2) 贝叶斯公式. 若随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成样本空间 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0$, $i=1,2,\cdots,n,B$ 为任意事件,且 $P(B)>0$,则有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},j=1,2,\cdots,n\quad \text{(此式称为贝叶斯公式)}$$

7. 事件的独立性

设 A,B 为两个事件,若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

成立,则称事件 A 与事件 B 相互独立.

设有 n 个事件 A_1, $A_2,\cdots$, A_n. 如果对于任意正整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 以及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 A_1, $A_2,\cdots$, A_n 相互独立. 且有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

1.2 难点及典型例题精析

本章的难点为随机事件间的关系及概率的计算(涉及随机事件间的相互

独立性、概率的性质、条件概率公式、全概率公式及贝叶斯公式等). 下文列举一些典型例题.

例 1-1 设 A,B,C 为 3 个随机事件,与 A 互斥的事件是(　　).

(A)$\overline{A}B \cup A\overline{C}$　　(B)$\overline{A(B \cup C)}$　　(C)$\overline{ABC}$　　(D)$\overline{A \cup B \cup C}$

解 由于 $A \cap (\overline{A \cup B \cup C}) = A \cap (\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = A\overline{A}\overline{B}\overline{C} = \varnothing$,故选(D).

例 1-2 对于任意二事件 A 和 B,与 $A \cup B = B$ 不等价的是(　　).

(A)$A \subset B$　　(B)$\overline{B} \subset \overline{A}$　　(C)$A\overline{B} = \varnothing$　(D)$B\overline{A} = \varnothing$

解 由 $A \cup B = B$ 知 $A \subset B$,因此 $A \cup B = B$ 与(A),(B),(C) 等价但与(D) 不等价. 故应选(D).

例 1-3 设 A,B,C 为 3 个事件,已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.8, P(C)=0.6, P(AB)=0.2, P(AC)=0, P(BC)=0.6$. 试求:

(1) $P(A \cup B)$; (2) $P(A\overline{B})$; (3) $P(A \cup B \cup C)$.

解 (1)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.8 - 0.2 = 0.9$$

(2)
$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

(3)
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.3 + 0.8 + 0.6 - 0.2 - 0 - 0.6 + 0 = 0.9$$

注:因为 $ABC \subset AC$, 所以 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AC) = 0$, 即 $P(ABC) = 0$.

例 1-4 已知 $P(A)=0.7$, $P(\overline{B})=0.6$, $P(A\overline{B})=0.5$,求:

(1) $P(A \mid A \cup B)$; (2) $P(AB \mid A \cup B)$; (3) $P(A \mid A \cup B)$.

解 $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$. 由 $P(A\overline{B}) = P(A-B) = P(A) - P(AB)$, 得
$$P(AB) = P(A) - P(A\overline{B}) = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

(1)
$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P[A(A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = \frac{0.7}{0.7 + 0.4 - 0.2} = \frac{7}{9}$$

(2)
$$P(AB \mid A \cup B) = \frac{P[AB(A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{0.2}{0.7 + 0.4 - 0.2} = \frac{2}{9}$$

(3)
$$P(A \mid \overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{P[A(\overline{A} \cup \overline{B})]}{P(\overline{A} \cup \overline{B})} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{AB})} = \frac{P(A\overline{B})}{1 - P(AB)} =$$

$$\frac{0.5}{1-0.2}=\frac{5}{8}$$

例 1-5 将一颗骰子投掷两次，依次记录所得点数，试求：

(1) 两骰子点数相同的概率；

(2) 两点数之差的绝对值为 1 的概率;

(3) 两点数之乘积小于等于 12 的概率.

解 (1) 用 A 表示"点数相同"这一事件,则 $A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

因为样本空间含有的基本事件数为 36,A 中包含的基本事件数为 6,所以

$$P(A)=6/36=1/6$$

(2) 用 B 表示"两点数之差的绝对值为 1",则

$$B=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$$

因为样本空间含有的基本事件数为 36,B 中包含的基本事件数为 10,所以

$$P(B)=10/36=5/18$$

(3) 用 C 表示"两点数之乘积小于等于 12",则因为样本空间包含的基本事件数为 36,C 的样本点数为 23,所以 $P(C)=23/36$.

例 1-6 某种产品共有 30 件,其中含次品 7 件. 从中任取 5 件. 试求被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品的概率.

解 设 A="被取出的5件中恰好有2件是次品". 由题设"从中任取5件"应理解为"一次取出 5 件"，故样本点总数 $n=C_{30}^{5}$. 事件 A 包含的基本事件数 $m=C_7^2C_{23}^3$,则所求概率为 $P(A)=C_7^2C_{23}^3/C_{30}^5=0.2610$.

本例的一般情形为:某件产品共 N 件，其中含次品 M 件，从中任取 n 件，其中恰有 m 件次品(设为事件 A) 的概率为

$$P(A)=C_M^mC_{N-M}^{n-m}/C_N^n$$

式中,$m=0,1,\cdots,\min\{M,n\}$. 上式称为超几何概率公式.

例 1-7 某口袋中有 4 只白球,2 只红球. 从袋中取球两次,每次随机地取一只. 考虑两种取球方式,(a) 有放回取球. (b) 无放回取球. 试就上面两种情况求：

(1) 取到的两只球都是白球的概率；(2) 取到的两只球颜色相同的概率.

解 (1) 令 A_1 表示事件"取到的两只球都是白球",则有放回取球：

$$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

无放回取球： $P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(2) 令 A_2 表示事件“取到的两只球颜色相同”，则

有放回取球： $P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$

无放回取球： $P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$

例 1-8 某种产品共10件，其中有4件不合格品. 从中任取2件. 已知所取的2件中有1件为不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

解 此题是求条件概率，关键是正确理解“已知所取的2件中有1件为不合格品”这句话的含义，它等价于“已知所取的2件中至少有1件为不合格品”. 设 $B=\{$所取的2件中有1件为不合格品$\}$，即所取的2件中至少有1件为不合格品.

$A=\{$所取的2件中另1件也是不合格品$\}$，即所取2件都是不合格品. 由古典概率的定义知

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},\quad P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$$

又 $B\supset A$，于是所求概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1}{5}$$

例 1-9 设有 n 个人，每个人都以同样的概率 $1/N$ 被分配在 $N(n\leqslant N)$ 间房中的每一间中，试求下列各事件的概率.

(1) 某指定的 n 间房中各有1人；

(2) 恰有 n 间房，其中各有1人；

(3) 某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人.

解 先求样本空间中包含的基本事件数. 首先，把 n 个人分到 N 间房中去共有 N^n 种分法；其次，求每种情形下事件所包含的基本事件数.

(1) 某指定的 n 间房中各有1人，所包含的基本事件数，即可能的分法为 $n!$；

(2) 恰有 n 间房中各有1人，所有可能的分法为 $C_N^n n!$；

(3) 某指定的一间房中恰有 m 人，可能的分法为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$.

于是可以得到3种情形下事件的概率分别为

(1) $n!/N^n$； (2) $C_N^n\cdot n!/N^n$； (3) $C_n^m(N-1)^{n-m}/N^n$.

在上述分房问题中，若令 $N=365,n=30,m=2$，则可演化为生日问题.

全班有学生 30 人，求下列事件的概率：

(1) 某指定 30 天，每位学生生日各占 1 天；

(2) 全班学生生日各不相同；

(3) 全年某天，恰有 2 人在这一天同生日.

利用上述结论可得到概率分别为

(1) $30!\ /\ 365^{30}$；(2) $C_{365}^{30}\cdot 30!\ /\ 365^{30}\approx 0.294$；(3) $C_{30}^{2}\ (364)^{28}/\ (365)^{30}$.

例 1-10 袋中有 $N-1$ 个黑球和 1 个白球，每次随机摸出 1 个球并换入 1 个黑球，求：第 k 次摸到黑球的概率.

解 设 $A=\{$第 k 次摸到黑球$\}$，$\bar{A}=\{$第 k 次摸到白球$\}$，则

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{(N-1)^{k-1}\times 1}{N^k}=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\times\frac{1}{N}$$

例 1-11 某班有 N 个学生，上体育课时老师发给每人 1 根绳子进行跳绳练习，跳了 10 min 后把绳子放在一堆，进行别的练习，后来每人又随机拿了一根绳子进行练习，问至少有 1 名学生拿到自己原先使用的绳子的概率.

解 令 $A_i=\{$第 i 个学生拿到自己原先使用的绳子$\}$，$i=1,2,\cdots,N$

$A=\{$至少有一个学生拿到自己原先使用的绳子$\}$，则

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{N}A_i)=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}P(A_iA_j)+$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)=$$

$$C_N^1\ \frac{1}{N}-C_N^2\ \frac{1}{N(N-1)}+C_N^3\ \frac{1}{N(N-1)(N-2)}-\cdots+$$

$$(-1)^{N-1}C_N^N\ \frac{1}{N!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{N-1}\ \frac{1}{N!}$$

例 1-12 某人忘记了电话号码的最后一位数，于是就随意拨号，求下列事件的概率：(1) 恰好第 3 次拨通；(2) 3 次内拨通.

解 设 A_i 表示第 i 次拨通，$i=1,2,3$. 则

(1) $$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)=$$

$$\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

(2) $$P(A_1+\overline{A_1}A_2+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=$$

$$\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

如果已知最后一位是奇数，则

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$$P(A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{3}{5}$$

例 1-13 设有甲、乙、丙 3 个小朋友，甲得病的概率是 0.05，在甲得病的条件下乙得病的概率是 0.40，在甲、乙两人均得病的条件下丙得病的概率是 0.80，试求甲、乙、丙 3 人均得病的概率.

解 用 A 表示“甲得病”，B 表示“乙得病”，C 表示“丙得病”，则

$$P(A)=0.05,P(B\mid A)=0.4,P(C\mid AB)=0.8$$

所求概率为

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)=0.05\times 0.4\times 0.8=0.016$$

例 1-14 盒中有 12 个球，其中 9 个新球. 第一次比赛从中任取 3 球，用后放回，第二次比赛从中再取 3 球. 求概率：

(1) 第二次取出的球都是新球；

(2) 若第二次取出的都是新球，第一次取出的都是新球.

解 设 $B=\{$第二次取出的都是新球$\}$，$A_i=\{$第一次取出 i 个新球$\}$，$i=0,1,2,3$，

(1) 由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=$$

$$\frac{C_3^3}{C_{12}^3}\times\frac{C_9^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}\times\frac{C_8^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}\times\frac{C_7^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\times\frac{C_6^3}{C_{12}^3}=$$

$$\frac{7\ 056}{(C_{12}^3)^2}=0.086$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}=\frac{C_9^3C_6^3/[C_{12}^3]^2}{7\ 056/[C_{12}^3]^2}=0.238$$

例 1-15 甲、乙、丙 3 门大炮对某敌机进行独立射击，设每门炮的命中率依次为 0.7，0.8，0.9. 若敌机被命中两弹或两弹以上则被击落，设 3 门炮同时射击一次，试求敌机被击落的概率.

解 用 A 表示“甲命中”，B 表示“乙命中”，C 表示“丙命中”，D 表示“敌机被击落”，则

$$P(A)=0.7,\quad P(B)=0.8,\quad P(C)=0.9$$

所求概率为

$$
\begin{aligned}
P(D)=&P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC\cup ABC)=\\
&P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)+P(ABC)=\\
&P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)=\\
&0.7\times 0.8\times 0.1+0.7\times 0.2\times 0.9+0.3\times 0.8\times\\
&0.9+0.7\times 0.8\times 0.9=0.902
\end{aligned}
$$

例 1－16 设两两独立的随机事件 A,B,C 满足条件 $ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$，求 $P(A)$ 的值.

解
$$
\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-\\
&P(AC)-P(BC)+P(ABC)
\end{aligned}
$$

而 $P(ABC)=0$，故 $P(A\cup B\cup C)=3P(A)-3[P(A)]^2=\dfrac{9}{16}$，解得 $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

1.3 考点及历年考研真题精析

1.（2000 数 1）设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________.

【详解】 答案为 2/3. 由题意有 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$，从而 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，则 $P(A)=P(B)$，因为 A 和 B 相互独立，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9}=P(\overline{AB})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\\
1-2P(A)+[P(A)]^2
\end{aligned}
$$

解得 $P(A)=\dfrac{2}{3}$（另一解 $P(A)=\dfrac{4}{3}>1$，舍去）

2.（2003 数 3）将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件（　　）.

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立

【分析】 按照相互独立与两两独立的定义进行验算即可. 注意应先检查两两独立，若成立，再检验是否相互独立.

【详解】 因为 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{2}$