大學用書

微分方程通論

ABRAHAM COHEN 著
李緒文
倪可權 譯

正中書局印行

大學用書

微分方程通論

ABRAHAM COHEM 著

李緒文
倪可權 譯

正中書局

中華民國三十四年七月初版
中華民國三十六年七月滬四版

微分方程通論

全一册　定價國幣十六元
(外埠酌加運費匯費)

編訂者　ABRAHAM COHEM

翻譯者　李緒文
　　　　倪可權

發行人　吳秉常

印刷所　正中書局

發行所　正中書局

(1887)

譯　序

本書於 1933 年經著者增加材料，改善編制，已在原序中略述。茲就譯者所見，將此增訂本與原版之異同，逐章比較如下：

第一章大部改編，由數理化各問題而引起微分方程之說明甚詳。初學讀此，當較原版易感興趣。

第二章與原版大體相同，新增齊權方程一節。

第三章之末新增應用問題甚多，除關於物理學者以外，亦有三數化學應用題．餘與原版大致相同．

第四、五兩章與原版無大區別．

第六章卽原版之第七章，所述平直方程諸解法，雙方大略相同．惟新增應用一節，內分九款，盡係平直方程在物理學各部門之應用，例解詳盡，習題尤多，此節竟占二十餘頁之篇幅．至於原版則僅有極少數之例題與習題耳．

第七、八兩章卽原版之第八、九章，兩者大致相同．

第九章卽原版之第十一章．著者在序文中曾言此章幾已完全改編．改編以後，較前明晰，存在定理敍述較詳，且新增 Frobenius 解法，指標方程有重根或倍根諸款，及 Legendre 方程，Bessel 方程等．

第十章卽原版之第六章，僅新增特別解法一節．

第十一章卽原版之第十章，兩者大略相同．

第十二章亦與原版大略相同.

第十三章新增一級偏微分方程之解之幾何意義一節,餘僅稍有更動.

第十四章新增特別之解,Fourier 級數及其應用數節.此兩者對於已知原始條件之應用問題頗切實用.餘尙無甚相異之處.

就全書言之,增訂較多者爲第一、三、六、九、十四諸章.餘若文字之修正,及其他微末之改易,隨處皆有,不勝枚舉.原版第六、十兩章移作第十、十一兩章,亦較合事理.因全微分方程及聯立方程組對於初學固稍嫌困難,且以其與偏微分方程關係甚切,允宜將其置於後者之前也.又在篇幅方面,本書較原版多五十餘頁,約當原版五分之一.經此增訂,原版晦澀不明、材料不豐、編制不善諸弊俱已除去,而新增實用問題,材料之多亦足以顯明微分方程效用之宏,尤爲本書特色,對於初學堪稱優良教本之一.

統觀全書,習數學者固可以此爲來日進窺高深理論之基礎,而理工學生用作教本或參考用書亦頗合宜.

本書譯述以直譯爲主,力求信達.數學名詞以最通用者爲準,物理學名詞悉遵二十三年教育部公布之審定名詞.初見各名詞皆附註原文,並於書後附列譯名表,以便查考.

譯文疵謬,在所難免,至希讀者隨時見示.

三十一年五月　　譯者謹識

增訂本原序

本書大概保存原版面目，惟其若干節目編排之次序及陳述之格式曾有重要之改進．就經驗所示，習題均已校訂並增加其數量．常微分方程及偏微分方程關於物理學之主要應用問題，增益尤多．以級數求積分一章幾已完全改編．

著者接受多方面之積極建議，曷勝榮幸，茲已採用之以改善原書矣．Johns Hopkins 大學之 John Williamson 博士與 Pennsylvania 州學院之 Teresa Cohen 博士曾詳讀本書之證，並賜以多數有價值之指示，著者尤為感荷．在準備稿件時承 Inez T. Loewus 夫人切實相助，亦深為銘感．

Abraham Cohen.

1933 年，三月．

原　序

著者曾在數年內爲有志進修工程學或其他物理科學，與志在繼續研習純粹數學及數學物理學之學生講授微分方程.本書卽就該學程內容編輯而成.

本書要旨，在使學生對於所習見之方程大率能瞭解其求積之原理與方法. 所示各種解法爲數雖多，曾習全年微積分學之學生當易領悟，且於多數方程及其各不相涉之種種解法當知如何融會貫通. 著者頗有意於使本書內容充分廣博，俾可用作參考手册而無害於其爲教本之功用. 許多小註與注意皆分别插入，此等註釋均不致令正文有間斷之弊，而其本身又予學生以興趣與實益. 書中又有若干歷史方面與參考文籍方面之敍述.

*　　*　　*　　*　　*　　*

著者嘗就方程之可藉初等方法解出者分類整理，並注意減少其解法. 爲令學生對於本學程之全部獲得更清晰之整個觀念起見，特於章末各附撮要，並於書末另附全書撮要，凡此皆可自證其各具相當價値.

在正文中與習題中引用之幾何應用題與物理科學之應用題爲數甚多.

多數習題雖曾散見各書，然新擬者亦不少，且所採納之題均足

以說明微分方程與積分學之各種解法．多數例題皆詳細演算，藉以解釋書中較重要之各種解法；學生自可應用積分表，但不宜稍存非此不可之念．多數之解，形雖簡而其涵義頗饒趣味．印校之誤曾極力減免．果仍有此，著者甚願讀者見告．

藉未定係數法求常係數平直方程特解解法之完備，據著者所知，當以此書爲始．

偏微分方程所賅至廣，本書僅述其少數要目，卽此已足以適應讀者之需要矣．

經熟慮後，著者決心放棄敍述 Lie 氏理論之一章，希能另撰專書述此重要部門．

Massachusetts 工業專校教授 F. S. Woods, Iowa 州大學 L. G. Weld 與 Illinois 州大學 E. J. Townsend 諸先生曾各以高見惠示，均著者所心感，謹誌其謝忱於此，以爲殿焉．

Abraham Cohen.

Johns Hopkins 大學,

Baltimore, Maryland,

1906 年．十月．

目　次

第一章　微分方程及其解

1·1. 微分方程　一方程式之含有微分 (differential) 或一個或多個導式 (derivatives) 者曰**微分方程** (differential equation).

此類方程乃由多種問題之解析的敍述所引起. 舉例言之, 任一幾何問題涉及曲線之斜率或曲率者, 當以解析方式表示時, 即得一微分方程. 例如以一曲線上任意一點 (x, y) 之切線垂直於至該點動徑 (radius vector) 之性質定該曲線, 則表此性質之解析式具下形式

(1) $$y' \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad \text{即} \quad xdx + ydy = 0.$$

若此切線不垂直於動徑而與之成一定角 α, 則此解析式爲

(2) $$\frac{y' - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{yy'}{x}} = m, \qquad \text{其中} \quad m = \tan\alpha.$$

上式去分數後亦可書作

(2′) $$mx + y - (x - my)y' = 0,$$

$$\text{即} \quad (mx + y)dx - (x - my)dy = 0.$$

若用極坐標, 則方程式 (2) 具較簡之形式

(3) $$\frac{\rho}{\rho'} = m, \qquad \text{即} \quad \frac{md\rho}{\rho} = d\theta.$$

某曲線之一切切線與原點之距離皆爲k之性質可表以微分方程

(4) $$\frac{y-xy'}{\sqrt{1+y'^2}}=k, \quad 即 \ (y-xy')^2=k^2(1+y'^2).$$

如一曲線有曲率半徑爲常數之性質，則表此事之解析式爲

(5) $$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=k, \quad 即 \ k^2y''^2=(1+y'^2)^3.$$

在可以數學方法駕馭之多種問題中，當其定律表以解析方式時，則得微分方程。試研究一質點沿一直線之運動，當其受一力作用而得一加速度與其至此直線上某定點之距離成比例，且其方向常對該點。如以定點爲原點，則表示此定律之解析式爲

(6) $$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu^2x,$$

其中μ乃一常數。

在化學方面吾人可引下列之事爲例。在某項化學反應中，一物質變質之速率與其在該時刻所存留之量成比例。以x表示至某時t此物已變質之量，以a表示其原有量，則此定律可以微分方程

(7) $$\frac{dx}{dt}=k(a-x)$$

表之，其中k爲一常數。

一曲面上每點(x, y, z)處之法線須與$z=0$平面遇於點$(x_0, y_0, 0)$而使$x_0/y_0=x/y$之性質可表以

(8) $$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

在緊張彈性索之運動情形,於某種假定之下,其運動律以微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \tag{9}$$

表示之,式中 x 乃一點在此索兩端聯絡線上量得之坐標,y 則爲其去平衡位置 (position of equilibrium) 之位移 (displacement).

I·2. **微分方程之分類** 微分方程之僅含一自變數者 (因之祇含有通常導式者),曰**常微分方程** (ordinary differential equation). 方程 (1),(2),(3),(4),(5),(6) 與 (7) 卽其例也.

一方程中之自變數如不祇一個,以致含有偏導式者,則曰**偏微分方程** (partial differential equation). 方程 (8) 與 (9) 卽屬此類.

所謂一微分方程之**級** (order) 者乃指其所含最高級導式之級. 方程 (1),(2),(3),(4),(7) 及 (8) 爲一級;方程 (5),(6) 及 (9) 則爲二級.

所謂一微分方程之**次** (degree) 者乃指其化爲有理且去分數後所含最高級導式之次. 方程 (1),(2),(3),(6),(7),(8) 及 (9) 爲一次;(4) 及 (5) 則爲二次.

I·3. **解** 聯絡自變數與應變數之一關係式*,不論自變數之值爲何,如恆能適合一微分方程,則稱爲該方程之**解** (solution).

微分方程爲其解所適合,可以下述各種方法驗之.最普通之方法

---

* 此種關係式常稱爲此微分方程之積分 (integral),而解一名詞則限用於應變數已解出之形式,卽其值已顯明表出者. 此乃通行歐陸之習慣,但本書之命名原則與英美所習用已久者相同.

爲求出應變數及其導式之値以自變數之函數表之，代入微分方程．其結果當爲一恆等式．

關係式 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=c$，（c 爲任意常數）爲 (1) 之解，因可求其微分以驗其無誤也．

又 $\rho=e^{\theta/m}$ 及 $\rho=ce^{\theta/m}$（c 爲任意常數）爲 (3) 之解，因可求其微分而得 ρ 與 ρ' 之値代入原方程驗其無誤也．

在方程 (4) 之情形，以 c 表任意常數，固可將 $y-cx=k\sqrt{1+c^2}$ 之導式代入 (4) 而驗明其爲一解，但 $x^2+y^2=k^2$ 亦甚易驗明其爲一解．

從微分方程 (5) 作成之方法觀之，a 及 b 表兩任意常數，則圓族 (family of circles) 方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$ 必適合 (5)．此可作一習題留待學者求兩次微分，以 y' 及 y 表 y''，以 x 及 y 表 y' 而自驗之．將兩者代入，則得一恆等式或與圓族方程相一致之關係式．

a 及 b 爲兩任意常數，則 $x=\sin\mu t$，或 $x=\cos\mu t$，或 $x=a\sin\mu t$，或 $x=b\cos\mu t$，或 $x=a\sin\mu t+b\cos\mu t$；經兩次微分後，吾人易見其皆能適合方程 (6)．

試求 $\partial z/\partial x$ 及 $\partial z/\partial y$，代入偏微分方程 (8)，易見 $z=x^2+y^2$，及 $z=a\sqrt{x^2+y^2}+b$（a, b 爲任意常數），及 $z=f(x^2+y^2)$〔$f(x^2+y^2)$ 爲 x^2+y^2 之任意函數〕皆爲其解．

仿此，$y=x+at$，$y=x-at$，$y=f(x+at)+\phi(x-at)$ 皆爲 (9) 之解〔f 及 ϕ 各爲 $(x+at)$ 及 $(x-at)$ 之任意函數〕．

由上述說明，可見一微分方程之解可有無限個．此恰爲應有之事，蓋學者咸知求一函數之積分後固當加一積分常數，如

$\int \cos x dx = \sin x + c$，此 c 即常數也.

在微積分中所習見之積分問題，無非微分方程問題之最特殊者耳. 求積分 $\int \cos x dx$ 乃求一函數 $\sin x + c$，其導式適爲 $\cos x$ 者. 就微分方程之方法言之，即求 $y' = \cos x$ 之通解 $y = \sin x + c$ 也.

若解中一常數之值可以隨意指定，則曰**任意常數**（arbitrary constant），如 $y = \sin x + c$ 常爲 $y' = \cos x$ 之解，固無論 c 之取何値也. 於上述解之說明中有須注意者，一級常微分方程之解含有一個任意常數，或不含任意常數. 至於二級微分方程之解則含有二個或一個任意常數，或竟不含任意常數.

爲與解中任意常數區別起見，(2) 及 (3) 中之 m，(4) 及 (5) 中之 k，(6) 中之 μ，(7) 中之 k 及 a 則曰**文字常數**（literal constants）. 敍述問題時此等常數之値可隨需要而指定*，但一經指定，則在此解中其値即不容更易.

如上所示，任意函數可出現於偏微分方程之解中. 偏微分方程之討論將於第十二章中述之. 吾人現在所論以常微分方程爲限. 然則常微分方程之解最多究能含若干任意常數之問題自將隨之而起.

I·4. 由原函數求微分方程 由關係式

(1) $$y = a \cos x$$

論之，其中 a 爲任意常數. 求其微分，得

(2) $$y' = -a \sin x.$$

---

* 在特殊問題中此等常數之値已預先規定，如 (2)，(3) 中 m 之値隨已知之 a 而定；(6) 中之 μ 則視所用儀器而定其値；其他亦然.

由上二式消去 a,得

(3) $$y'+y\tan x=0,$$

按(§I·3),此式乃一微分方程,而以(1)爲其解.

但此非以(1)爲解之唯一微分方程,求(2)之微分,得

(4) $$y''=-a\cos x.$$

由(1)及(4)消去 a,得

(5) $$y''+y=0,$$

爲以(1)爲解之二級微分方程.

或由(2)及(4)消去 a,而得

(6) $$y''-y'\cot x=0$$

爲以(1)爲解之另一微分方程.

或求(3)之微分,吾人又得二級微分方程

(7) $$y''+y'\tan x+y\sec^2 x=0,$$

該方程必仍以(1)爲其解,因(3)已如此也.

更進而求(4)之微分,從此結果分別與(1),(2),或(4)消去 a,則得三個三級微分方程,各以(1)爲其解.

此方法可無限進行.

a 及 b 爲任意常數,求

(8) $$y=a\cos x+b\sin x$$

之微分,則有

(9) $$y'=-a\sin x+b\cos x.$$

普徧言之,欲消去兩量如 a 及 b 者,須有含此兩量之三個關係式.故須再求(9)之微分以得第三關係式

(10) $$y''=-a\cos x-b\sin x.$$

吾人現可消去 a 及 b，並求得其結果爲微分方程

(11) $$y''+y=0,$$

按定義，該方程當以 (8) 爲其解.

求 (10) 之微分，則有

(12) $$y'''=a\sin x-b\cos x.$$

用此關係式及 (9) 以消去 a 及 b，吾人求得

(13) $$y'''+y'=0,$$

爲以 (8) 爲解之三級微分方程.

此方法亦可無限進行.

爲正確計，吾人將云與一含有一個或多個任意常數之已知關係式相當而以之爲原函數(primitive)之微分方程，乃一以之爲解之最低級微分方程.因此，以 (1) 爲原函數之微分方程爲 ( )，以 (8) 爲原函數者則爲 (11).

在通常情形，由一含有 n 個獨立的* 任意常數之關係式求 n 次

---

* 關係式中所含任意常數如何乃爲獨立之問題，在此討論殊太繁複．如一組常數不互相獨立，以視察法或其他淺易方法亦常可發現之．例如 $y=ae^b\sin x$ 中之 ae^b，並不較單一之任意常數 a 更爲普通．再於 $ax^2-2by+c=0$ 中實祇含兩獨立常數，而非三獨立常數．因任意選擇三者之一組值，較之任意選其二者對於第三者之比，並不更爲普通．又如關係式 $ax^2-2bxy+y^2=0$，就 y 解之，得

$$y=(b\pm\sqrt{b^2-a})x,$$

可見其祇含有一個任意常數而非二個任意常數，因其實與

$$y=cx$$

無異，並不更爲普通也．