

FUNDAMENTAL METHODS
OF MATHEMATICAL ECONOMICS

SECOND
EDITION

基礎經濟數學

上 冊

原著者 蔣 中 一
譯 者 李 嘉 淦

國立編譯館主編 東華書局印行

基礎經濟數學

第二版（1974年）

上 冊

原著者

蔣 中 一

譯 者

李 嘉 淦

國立臺灣師範大學數學系教授

國立編譯館出版
東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國六十六年十月初版

中華民國七十四年四月四版

大學
用書

基礎經濟數學

上册定價 新臺幣一百五十元整

(外埠酌加運費滙費)

譯作權 所有人	國立編譯館
補助機關	國家科學委員會
原著者	蔣中一
譯者	李嘉淦
發行人	卓鑫森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 電話：3819470 郵撥：6484
印刷者	合興印刷廠 臺北市大理街130巷2弄1號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

(66062)

譯者序

經濟學博大精深，由於所討論的範圍十分廣泛，所涉及的分析模式也就十分複雜，因此在經濟意義與數學模式之間，常有不易跨越的鴻溝出現，對於數學基礎不夠的初學者，數學模式的結構與所用的分析方法，常使學生困於數式中而不明白真正的涵義。對於已有數學基礎而有志於研究經濟學的學生，經濟模式的內涵又常使學生無法運用已有的數學能力。蔣中一博士的這本鉅著正是解決上述問題的鎖鑰。這本書涵蓋了經濟分析上所用的大部份數學工具，並極力使數學技巧與經濟分析相結合，以使學生不致忽略原意而捨本逐末。全書內容的編排採逐步分析式，以使初學者既能建立足夠的數學基礎，又能瞭解應用的方法，確是鴻溝上的一座橋樑，也是一本適於自修與教學用的範本。譯者不憚淺陋，歷半年翻譯完成，希望能使蔣博士鉅著加惠於國內學子，譯者雖竭盡一己能事，仍感詞不達意，誤謬之處尚祈海內學者先進不吝指正。

再版序

自初版發行後，許多經濟學者慷慨地惠賜筆者，極有價值的建議。爲了使這些建議及個人思索而得的其他概念，能夠公諸同儕，乃決定發行新版。並爲使新版書中的各項立論，能比舊版書所載的更確實有用，筆者已將原書中的一部份內容予以簡化，或作額外的詳論。

新版中最重要的不同點，是增添了對非線性規劃理論的討論，這部份列在第二十章中。在第二十章中介紹了柯恩氏與塔克氏(Kuhn-Tucker)的凹性規劃理論，以及後起的亞氏與恩氏(Arrow-Enthoven)的準凹性規劃理論。並以極多的篇幅來澄清“限制條件之檢定”的觀念。其次的不同點，是在第八章中應用隱函數理論，作爲分析比較靜態學中一般函數模式的基礎，並在以後各章中，對求取比較靜態導數的方法上，偏重於使用全微分量的方法，而非用全導數量的方法。

其他的不同點則分散於各章中，如：第九章及以後各章中都採用凸函數、凹函數等標準名詞；第十二、二十章中則加入了準凹函數，準凸函數的討論；第十一章介紹了方陣的特性方程式，作爲檢查二次式符號的方法，以與第十七章所述微分方程式及差分方程式的特性方程式，作一比較；第十二章另加入勞氏(L' Hopital)法則的討論及拉氏(Lagrange)乘數在經濟學中的意義，後者在其後的第十九章中並與線性規劃中對偶選擇變數有關；第十三章中加入了部份積分法；第十四章中則以較簡單的方法，導出恰當微分方程式的解；並在第十四章到第十七章中，對半永久式平衡與市場清銷式的平衡，作了審慎的區分。爲使學者能夠熟練地運用所學的各项技巧，並確實地把握住各關鍵所在點，筆者又加入了許多新的練習題。這些將確使學者建立自信心，不因無法解題而喪失興趣。

除了上述的許多變更外，新版仍然保持了原書的形式及思路。但

其用途較本來所意思的更具彈性。例如學生可在學完矩陣代數（第五章）之後，就可毫無困難的開始學習線性規劃（第十八，十九章）與競賽理論（第二十一章）。同樣地，學完受制擇優理論（第十二章）後，亦可直接開始第二十章的非線性規劃理論，而不需要先建立線性規劃的基礎知識。僅對擇優問題有興趣的讀者，可以略去一般函數模式的比較靜態分析（第八章）、第十一章第六節、及第十二章第四節，而直接從第七章跳到第九章。

新版內容的確定，受益於經濟學界諸先進之處甚多，筆者謹在此向下列諸先生誌謝：美利堅大學的巴瑞教授，耶魯大學的波恩柏教授，康乃狄克大學的布斯教授，瑞典戈登堡大學的狄克生教授，海軍研究院的福爾生教授，加州大學洛杉磯分校的賀希理弗教授，南康乃狄克州立學院的蘆教授，韓國國立漢城大學的郎教授，紐約大學商務管理研究所的夏普教授，愛阿華州立大學的斯塔立夫教授，及麻州大學的葉周南先生。由於未能完全採納各位先進的卓見，筆者願為本書的各項立論負完全責任。尤以，為了避免涉及或太深入變分學、擇優控制理論、及動態規劃理論，筆者也未採納加入動態擇優理論的建議。筆者以為，以上的各項教材，仍以另書討論為宜，以免超越本書的既定範疇。

ALPHA C. CHIANG

（蔣 中 一）

初版序

本書是為從事經濟學研究的人所寫的。全書的主要目標有二：(1)對某些基本的數學模式提出一份系統化的說明，(2)將這些數學技巧與各種形式的經濟分析方法，相互聯貫起來，使得兩種不同的分析方式，彼此間的相互關係得以明白地顯示出來。因此下列兩類的讀者，都將發現本書的有用之處：第一種是已有數學基礎，而希望能經由某種媒介，跨入經濟學領域的人，第二種是還沒有建立數學基礎而有志於研究經濟學的人。由於大部份的讀者，可能都屬於後面這一類，因此筆者以極大的耐性，來逐步推展各項技巧。假設讀者並沒有足夠的基礎知識，而一步一步地進行推導理論，來儘量減少讀者在學習過程中搞迷糊了的可能性。而且，筆者已將敘述的方式，簡化成比能使數學界人士滿意的方式為更非正式的形式，因為筆者深信，對於這本書的內容，其可讀性應該比數學的嚴謹性更優先考慮。

為使讀者能獲得足夠的數學知識，以探討現有的各種經濟方面的論著，而不致惶惑失措，因此在後續的各章中涵蓋了許多的數學專題，藉使讀者建立信心。即使各個專題的討論，都被限制在初等的程度，但對於認真讀完全書的讀者而言，他仍能得到關於集合概念，集合運算，函數與關係，矩陣代數，微積分，簡單的微分方程式，差分方程式，凸集合概念等的基礎知識，去閱讀更深的論著甚或足以運用。

為將這些數學論題與經濟分析方法相聯貫，書中例舉了許多以數學方式表示的經濟模式。甚至可以這麼說，本書的結構安排，是以經濟學為主著眼點，而不是以數學為重。第一篇的淺介討論數學模式的本質和結構，而本書的其他部份則分成五篇，每篇各自處理一個經濟專題：

第二篇：靜態分析（平衡分析）

第三篇：比較靜態分析

第四篇：擇優問題（平衡分析的特例）

第五篇：動態分析

第六篇：數理規劃與競賽理論（擇優理論的另一種形式）

適用於各篇的數學工具，皆以適當的次序予以介紹，以鑲合於既定的經濟分析形式。藉著將數學溶入經濟分析的方式，相信可使讀者對這兩種學問的關係瞭解得更清楚，而且在閱讀更專技的論著時能抓住重點。

上列的各項經濟專題的安排，有一個自然的順序，即由靜態學到比較靜態學再到動態學。這種安排方式將使得相關的數學資料得到有意義且方便、自然的表達方式。在第二篇平衡分析的討論中，提供了介紹矩陣代數的背景，因為平衡分析常涉及線性聯立方程組的求解。先行介紹矩陣代數的方式，在其他書中不常見，但因為這樣使向量、矩陣、及行列式能靈活地應用在本書的其他各章中，因此這種方式仍是合適的。在第三篇中，對比較靜態學的探討，導出了變率和導數的觀念，（包括了偏導數和全導數）這些將在第四篇的擇優問題上應用到。然而在第三篇和第四篇中，已用到前面所學到的矩陣代數。當進行到第五篇的動態學時，數學也從微分學的領域進入到積分學及微分方程式，並隨之開始差分方程式的討論。在此，讀者將再次發現矩陣代數的用處。最後，在第六篇的數理規劃與競賽理論中，最主要的工具是矩陣代數，同時也論及凸集合的概念。簡言之，在本書中有系統地建立了一個工具箱。所以讀者可依照所予的次序閱讀前四篇（前十二章）。而第五篇和第六篇則可依相反順序閱讀。在數學上，微分方程式直接排在微分學之後將較合理，但在經濟學上，在瞭解動態學之前，而在擇優問題之後，應該接上數理規劃與競賽理論。在這方面讀者可以自行選擇。

筆者寫本書時是依照可讀與可教的原則。在必要的地方更加上圖例以幫助說明。同時本書中更加入了許多交互引證的範例，使讀者能檢討比較，由各種不同論點所作的討論，並將之綜合聯貫。同時，對於某些特別的數學運算，也都加以直覺的或經濟的解釋，以使讀者能獲致前述的成果。幾乎每一節之後都附有許多練習題，讀者應該儘量多做，以得到最大的利益。

雖然本書的主旨是在介紹分析方法，但書中仍對許多經濟模式作了詳盡的討論，包括關於市場模式、工廠與消費者模式、國民所得模式、投入產出模式、及經濟成長模式等的探討。結果，除了與正規的數理經濟課程有相輔的關係外，很明顯地，本書對下列課程也是很好的補充教材，這些課程包括：價格理論、國民所得分析、商業循環、經濟發展及經濟成長等。

本書所列的各項教材已由過去筆者所授課的學生試用。他們的問題和見解，尤其是勞勃泰卡里夫人所提的，常有助於修訂現用的教材。此外，西北大學馬克芮羅夫教授曾細心閱讀手稿，並提供深入的討論與建議，確實促成了許多改進之處。耶魯大學的費景漢教授也閱讀過部份手稿，並提出有價值的意見。對這幾位先進，筆者深致謝意。筆者並感謝康乃狄克大學，在筆者執筆時減輕教學的負擔。最後，但不是不誠意的，筆者對拙荆深表謝忱，她在筆者執筆時放棄了無數原屬於她的時間，並熱誠地貢獻出她的智慧，以幫助筆者，並且代為將手稿打字，筆者在此也深致感激之意。

ALPHA C. CHIANG

上 冊 目 次

第一篇 淺 介

第 一 章 數理經濟的本質

1.1 數理經濟學與非數理經濟學之比較	2
1.2 數理經濟與計量經濟之比較	4

第 二 章 經濟模式

2.1 數學模式之要素	6
2.2 實數系	9
2.3 集合的觀念	10
2.4 函數與關係	17
2.5 函數的形式	24
2.6 二或多變數的函數	30
2.7 通性的標準	32

第二篇 靜態(或平衡)分析

第 三 章 經濟學平衡分析

3.1 平衡的意義	36
3.2 部份市場的均衡——線性模式	37
3.3 部份市場的均衡——非線性模式	41
3.4 一般市場平衡	47
3.5 國民所得之均衡分析	54

第 四 章 線性模式與矩陣代數

4.1 矩陣與向量	58
4.2 矩陣代數	62

x 基礎經濟數學（上）

4.3	向量代數之附記	72
4.4	交換律，結合律與分配律	83
4.5	單位矩陣與零矩陣	87
4.6	轉置矩陣與反矩陣	91

第 五 章 線性模式與矩陣代數（續）

5.1	方陣的非奇異性的條件	100
5.2	藉行列式測試非奇異性	105
5.3	行列式的基本特性	112
5.4	反方陣求法	119
5.5	克萊默原則	125
5.6	市場及國民所得模式的應用	130
5.7	利氏投入與產出模式	133
5.8	靜態分析學的限制	142

第三篇 比較靜態學

第 六 章 比較靜態學與導數概念

6.1	比較靜態學的本質	146
6.2	變率與導數	147
6.3	導數與曲線的斜率	150
6.4	極限的概念	152
6.5	不等式與絕對值	161
6.6	極限理論	166
6.7	函數的連續性與可微分性	170

第 七 章 微分法則與其在比較靜態學中的應用

7.1	單變數函數微分的定律	179
7.2	同變數之二或多個函數的微分法則	185
7.3	不同變數的函數之微分定律	197

7.4	偏微分	202
7.5	比較靜態分析學的應用	207
7.6	<u>亞可比</u> 行列式附記	214

第 八 章 一般函數模式的比較靜態分析

8.1	微分	219
8.2	全微分	226
8.3	微分法則	229
8.4	全導數	232
8.5	隱函數的導數	239
8.6	一般函數模式的比較靜態學	251
8.7	比較靜態學的限制	263

第四篇 擇優問題

第 九 章 擇優：特殊的平衡分析

9.1	最佳值與極值	266
9.2	相對極大值及相對極小值：一次微分檢驗法 ...	267
9.3	二次及高次導數	274
9.4	二次導數檢驗法	280
9.5	<u>馬克勞林</u> 及 <u>泰勒</u> 級數	290
9.6	單變數函數之 n 次導數檢驗法	299

第 十 章 指數與對數函數

10.1	指數函數的性質	305
10.2	自然指數函數及成長問題	311
10.3	對數	320
10.4	對數函數	326
10.5	指數與對數函數的導數	332
10.6	最佳時刻	342

10.7 指數與對數導數的進一步應用	346
--------------------------	-----

第十一章 多變數案例之研究

11.1 二階偏導數與全導數	353
11.2 二變數函數的極值	358
11.3 二次式的探討	365
11.4 多變數目標函數的探討	380
11.5 經濟學的實例	391
11.6 擇優理論的比較靜態學觀點	404

第十二章 受制擇優理論

12.1 限制條件的效用	410
12.2 逗留值的求法	412
12.3 二階條件	420
12.4 最高效用與消費者需求	430
12.5 齊次函數記要	443
12.6 投入的最低成本組合	453
12.7 一些結論	464

第一篇
淺 介

第一章

數理經濟的本質

數理經濟學不像財政學或國際貿易般自成一支，它是經濟學家應用數學理論和符號作為推理工具，來作經濟分析的一種方法。只要主題確定，不論是個體經濟論、總體經濟論、財政學或是未開發國家經濟學，都可應用此種方法。

大體而言，幾乎所有的經濟學教科書，都將數理經濟學以例子描述成一種幾何法則，並時常利用它推導理論結果，這種說法是太狹義了，形式上而言，數理經濟學是指那些應用到矩陣代數、微積分、微分方程式、差分方程式、集合論等數學技術所做的經濟分析。本書的目的，是在將日常所見，關於經濟學的著述中，所應用到的各種基本數學方法介紹給學者。

1.1 數理經濟學與非數理經濟學之比較

數理經濟學僅是做經濟分析的一種方法，因此它本身在基本上與非數理經濟學並無不同。不論是用何種方法，理論分析的目的，是要將已有的假設，經過推理之後，導出有用的結論。數理經濟學只是將假設和結論，以數學符號或方程式表示，更儘量使用已證明的數學定理，而不是使用詞句來表達；由此可知，由文字予以定義的符號，實際上與詞句是對等的，在推理時可隨意選用，而不致影響其結果。無疑地，使用符號可以使推理過程簡化，並使得理論敘述更為清晰明確。

採用文字邏輯或是數理邏輯是無關緊要的。但分析時所用之數學工具都必須在每一推理過程中，將所作的假定予以明確定義，因為數學理論都以“若…，則…”的形式敘述，分析時要想順利的導出結果，就一定要了解已知的條件，是確能與所採用的假設一致，否則就無法

繼續推理的過程。

那麼幾何法則是否可作為分析的工具呢？當然，幾何學是數學的一支，當我們使用它作分析時，顯然的已走出了文字經濟學的領域；而且使用幾何圖形來分析，也易於抓住重點而瞭解問題，但是自由度限制了幾何法則的應用範圍；因為使用幾何法則來解一個例題，比方說若消費者可獲得兩種物品的供應，則此一三度空間的圖形，就很難在平面上表出，至於要同時處理 3, 4, 以至 n 種貨品時，只有使用更富彈性的工具——方程式，故使用數理方式比幾何方式更為重要。

簡言之，用數理方法來處理的優點可分述於下：(1)語句簡明精確(2)有足夠使用之數理理論(3)可明確表出假設，應用數學理論，不致步入隱在的陷阱(4)誘導處理常見的多變數場合。

數理方法的缺點有二：(1)數學語言並非所有經濟學者通用的語言，使得數理經濟學者與非數理經濟學者難於溝通。除非先將數理經濟學者的研究結果，翻成文字的敘述。否則非數理經濟學者，無法利用數理經濟學者的研究結果。換句話說，數理經濟學者也無法利用非數理經濟學者具決定性的研究結果；嚴格說來，這並非數理方法的弊病，而是經濟學者以兩種方式研究彼此需要翻譯而形成的問題。

(2)數理經濟學者常困於下列問題①限用數理方法解決問題。②為了善用數學工具，而採用了不妥當的假設，因此專注於數學技巧，而忽略了經濟學原理。換句話說，一個人無心地將數學變成為主角而忽略了其為工具的地位。若是如此，就應由當事人負責，而不能歸咎於數理經濟學。

用數理方法研究經濟學常遭到的批評為“以數學方式陳述的理論是不切實際的”。顯然這句話是不正確的，不論是否使用數學方法作經濟分析，皆不該以“不切實際”批評之，理論本身為現實世界的一個抽象型，採用它是使重要的因素簡化，辨別其間的關係，研究問題的本體，而不為實際世界中所存在的複雜關係所困惑。故“理論是不切實際的”之說法是沒有意義的，只能視作陳腔濫調，不能視為對理

4 基礎經濟數學（上）

論的批評而予以接受。故得“任何一種理論方法都不切實際”之說法是不對的。例如：在完全競爭下的廠商理論與在不完全競爭下的廠商理論兩者都不切實際，此與上述理論是否以數學方法導出是無關的。

總而言之，使用數學方法是為了以較快的速度，由所設定的假設得到結果的一種運算方式。常識告訴我們，若一個人從甲地到2哩遠的乙地去，除非他有時間足供消磨，或是想鍛鍊腳力，否則他一定乘車而不願走路去。同樣地，一位理論家會發現這件事：若想要快些得到結論，就得使用適當的數學理論和技巧，如駕車一般，能達到目的而且速度較快。當然，駕駛車輛得先修習駕駛課程，又該課程的成果永能使用，修習課程時就得多花時間和功夫。

再以此比喻，對一位受過嚴格訓練的駕駛員，紮實的數學課程是必須的。根據社會科學研究會的推薦，社會學家應涉獵的數學領域包括下列各項：集合論、關係、函數、微積分、概率、矩陣理論、有限差、差分方程式、微分方程式、偏微分方程式與重積分等。當然，就基本用書而言，是不可能包含上述各項的，但在以後各章中上述各項均將討論到。故勤謹的讀完這本書，將至少能夠理解下列各期刊中所發表的著述的大部分內容。這些期刊包括：American Economic Review, Quarterly Journal of Economics, Journal of Political Economy, Review of Economics and Statistics, 及 Economic Journal。讀完本書後若能培養對數理經濟學的興趣，可以繼續對數學研究作更深入，更嚴格的訓練。

1.2 數理經濟與計量經濟的比較

在經濟學上所用的字，將因作者、時間、及上下文而有不同的意義。“計量經濟”實際上說是“個案”將更為恰當。根據定義，“計量經濟”是作理論分析時所用的特別方法，就是將經濟現象根據經驗予以測定衡量之後所得的資料，經由統計學的方法予以處理，而以明