

教育部審定

初審核定本

修正課程標準適用

新編

初中代數

第四冊

編者 高季可

校者 任誠



中華書局印行

民國三十年十二月廿四版

修正課程標準適用

新編初中代數 (全四冊)

◎ 第四冊定價國幣二角五分

(郵運匯費另加)

編者

高季

可

校者

張任 張鵬 徐天

飛誠 游

發行人

姚戟 中華書局有限公司代表 楣

印刷者

中華書局永寧印刷廠

上海澳門路四六九號

發行處

各埠中華書局

修正課程標準適用

新編

初中代數第四冊

目次

第十篇 比例 變數法

第一章 比及比例

92. 比.....1	95. 比例定理二.....12
93. 比例式及其變形.....6	96. 連比例.....16
94. 比例定理一.....8	97. 比例式的證明.....18

第二章 變數法

98. 正變.....21	100. 正反變的圖解.....25
99. 反變.....23	101. 聯變.....27

第十一篇 指數與對數

第一章 指數

102. 指數意義的擴充.....35	103. 應用.....37
---------------------	----------------

第二章 對數

104. 對數的意義.....43	106. 常用對數.....48
105. 對數的性質.....44	107. 對數表及其用法.....50

108. 對數計算.....	53	111. 利息算.....	61
109. 計算尺.....	59	112. 指數方程式.....	62
110. 計算尺的用法.....	60		

第十二篇 級數

113. 級數.....	68	118. 無窮等比級數及循 環小數.....	79
114. 等差級數(A. P.).....	68	119. 儲蓄.....	82
115. 等差級數的和.....	72	120. 關和級數(H. P.)及 其他.....	87
116. 等比級數(G. P.).....	75		
117. 等比級數的和.....	76		

模擬升學試驗

第一次.....	93	第四次.....	96
第二次.....	94	第五次.....	97
第三次.....	95	第六次.....	98

附 錄

對數表	中西名詞對照表	西中名詞對照表
-----	---------	---------

修正課程標準適用

新編

初中代數第四冊

第十篇

比例 變數法

第一章 比及比例

92. 比

研究問題

1. 求下面各比的比值：

(1) $4:3$.

(2) 1時30分 : 3時20分.

2. 化下列各比為最小的整數比：

(1) $\frac{7}{12} : \frac{5}{18}$.

(2) $24 : 40$.

3. 求 $5:2$, $4:3$ 同 $2:25$ 的複比.

關於比的定義,各種術語以及運算的方法,在代數學上和算術上完全一樣;所不同的,在算術上,祇有數字數,在代數學上,除數字數而外,更

有文字數罷了。現在再把一些重要事件，簡括的寫在下面，給大家復習一下。

I 比的意義 甲量是乙量的幾倍或幾分之幾，叫甲對乙的比。例如 4 斤是 2 斤的 2 倍，我們說 $4 \text{ 斤} : 2 \text{ 斤} = 2$ 。

4 斤叫前項，2 斤叫後項，2 叫比值。所以

$$\text{比值} = \frac{\text{前項}}{\text{後項}}$$

不同種類或雖同種類而不同單位的兩個量能相比嗎？比值是名數還是不名數？

II 比和分數及除法的關係 填下面的表！

比	除 法	分 數
前 項		
後 項		
比 值		

III 比的性質

比的前項後項同以一數乘除，比值不變。

因為 $a : b = \frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} = ma : mb$ 。

學習問題

求下列各比的比值：

1. $3a^2b : 6ab^2$.

2. $a^2 - b^2 : a^3 + b^3$.

3. $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$.

4. $1 + \frac{b}{a} : 1 - \frac{b}{a}$.

IV 正比和反比 交換一個比的前後項所成的比，叫原來的比的反比，原來的比，叫正比。

如 $a : b$ 的反比是 $b : a$ 。

反比等於正比的逆數比。

因 $b : a = \frac{b}{ab} : \frac{a}{ab} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ 。

V 單比和複比 幾個比的前項相乘積做前項，後項相乘積做後項，如此所成的比，叫原來諸比的複比。對複比而言，祇有一個比，叫單比。

學習問題

求下列各複比的值：

1.
$$\begin{cases} 6bc : 8xy \\ 24ax : 36bz \\ \frac{3}{4}yz : \frac{5}{6}ca. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} a : b \\ a : b. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} a : b \\ a : b \\ a : b. \end{cases}$$

如上面 2, 3 兩題，由同一單比所得的複比，等於單比前後項乘方的比，分別叫做二乘比，三

乘比等。

上面都是在算術上已經學過的,不過把意義推廣到文字數上面,現在舉幾個代數上的問題,例解如次:

例一 $x:y$ 的值是 0.2, 求 $\frac{6x+2y}{3x-y}$ 的值。

$$\text{[解]} \quad \frac{6x+2y}{3x-y} = \frac{6\left(\frac{x}{y}\right)+2}{3\left(\frac{x}{y}\right)-1} = \frac{6 \times 0.2+2}{3 \times 0.2-1} = \frac{3.2}{-0.4} = -8.$$

學習問題

1. $x:y$ 的值是 2, 求 $\frac{5x^2-2xy+4y^2}{x^2+y^2}$ 的值。

例二 $2a^2-9ab+10b^2=0$, 求 $a:b$ 的值。

[解] 原式可化爲 $2\left(\frac{a}{b}\right)^2-9\left(\frac{a}{b}\right)+10=0$

$$\left(\frac{a}{b}-2\right)\left\{2\left(\frac{a}{b}\right)-5\right\}=0$$

$$\therefore \frac{a}{b}=2 \text{ 或 } \frac{5}{2}.$$

答: $a:b$ 的值是 2 或 $2\frac{1}{2}$ 。

學習問題

2. $\frac{6x-y}{4x-y} = \frac{y+x}{y-x}$, 求 $x:y$ 的值。

例三 父子年齡的比是 9:2, 20 年後年齡的比是 2:1, 求父子的現年.

[解] 設父年 x 歲, 子年 y 歲, 則

$$\begin{cases} x:y=9:2 \dots\dots\dots(1) \\ x+20:y+20=2:1 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

根據比的意義, 知上兩式可寫成分式如次:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{9}{2} \dots\dots\dots(3) \\ \frac{x+20}{y+20} = 2 \dots\dots\dots(4) \end{cases}$$

解之, $x=36, y=8.$

答: 父年 36 歲, 子年 8 歲.

學習問題

3. 二數的比是 2:3, 若各加 9, 則成 3:4 的比, 求二數.

練習問題九十

1. 化簡下列各比:

(1) $12abc^2 : 15a^2bc.$

(2) $\frac{2a}{3}(x+2y) : \frac{5a}{12}(x^2-4y^2).$

(3) $\begin{cases} 0.8a : 0.5b \\ 2.5b : 3.2a. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} a^2 : b^2 \\ \frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3}. \end{cases}$

(5) $3a : 2b$ 的三乘比.

(6) $5x^2y : (-2xy^2)$ 的二乘比.

2. $a:b$ 的值是 2, $c:d$ 的值是 $\frac{1}{3}$, 求 $ac:bd$ 和 $a^2:b^2$ 的值.

3. $x:y$ 的值是 $\frac{1}{2}$, 求 $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 的值.

4. 求 $(a^2:4) : (a^3+a-4a^2-4)$ 的反比.

5. $7(5x-y) = 5(2x+3y)$, 求 $x:y$.

6. $6x^2+7xy-5y^2=0$, 求 $x:y$.

7. 二數的比是 4:7, 若從小數減 21, 大數加 21, 則二數的比等於原比的反比, 求二數.

8. $a:b$ 的前後項各加何數, 則比值等於 $b:a$?

9. x, y 都是正數, 問 $(x+3y) : (x+2y)$ 和 $(x+2y) : (x+y)$ 的比值那個大?

10. 若 $m:n$ 與 $\frac{m+x}{n+x}$ 的二乘比相等, 那麼 $x^2=mn$, 試證之. (但 $m \neq n$).

93. 比例式及其變形

研究問題

1. 什麼叫比例式? 比例式共有幾項? 什麼是外項, 內項和第四比例項? 外項相乘積和內項相乘積有什麼關係? 試根據你已有的算術知識舉例說明.

2. 解比例式 $24:18=16:x$.

關於比例式的意義及各項的名稱,在算術裏也已經學過了. 現在把重要的部分再提出來講講,並且利用文字數的幫助,作更進一步的研究.

I 比例式的性質 外項相乘積等於內項相乘積.

[證] 設 $a:b=c:d$.

$$\text{即 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

兩邊各乘以 bd , $\therefore ad=bc$.

因為有這個性質,所以在一個比例式中,含有一個未知數,我們可以求出牠的值來.

例一 解 $(200-x):x=7:18$.

[解] $(200-x):x=7:18$

$$7x=18(200-x)$$

$$25x=3600$$

$$\therefore x=144.$$

學習問題

解下列各比例式:

1. $96:72=4x:21$.

$$2. \quad a^2 - ab + b^2 : a^3 + b^3 = a - b : x.$$

II 化等積爲比例式 從上面比例式的性質,很容易逆推出來,如若有兩數的乘積和其他兩數的乘積相等,那麼以兩數同做內項,以其他兩數同做外項,可以作成一比例式.

例如已經知道 $ad = bc$, 我們便可作成許多比例式.

$$(1) \quad a : b = c : d.$$

$$(2) \quad a : c = b : d.$$

$$(3) \quad d : b = c : a.$$

$$(4) \quad b : a = d : c.$$

III 比例式的變形 上面寫出的四個比例式,都是由 $ad = bc$ 化出來的,其中有一個成立,其餘的都能成立. 如以(1)式爲主,拿其餘的和牠比較,便可知道比例式有兩個變形法則:

(一)一比例式中,二內項可以對換,二外項也可對換. 由(2),(3).

(二)一比例式中,左右兩比可以同時對換前後項. 由(4).

94. 比例定理一

比例的運算上有三個基礎定理:

I 合比定理 四數成比例時,前二數的和與第二數的比,等於後二數的和與第四數的比,即若 $a : b = c : d$,

則 $a + b : b = c + d : d$.

[證] 因 $a : b = c : d$,

$$\text{即 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

兩邊各加 1, $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$.

$$\text{即 } \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}.$$

$$\therefore a + b : b = c + d : d.$$

II 分比定理 四數成比例時,前二數的差與第二數的比,等於後二數的差與第四數的比,即若 $a : b = c : d$,

則 $a - b : b = c - d : d$.

由合比分比兩定理更可推得,

III 合分定理 四數成比例時,前二數的和與差的比,等於後二數的和與差的比.

即若 $a : b = c : d$,

則 $a + b : a - b = c + d : c - d$.

學習問題

1. 試證分比定理. 2. 試證分合定理.

例一 若 $a : b = c : d$, 試證

$$2a + 3b : 2c + 3d = 2a - 3b : 2c - 3d.$$

[證] $a : b = c : d$,

$$\text{即 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

$$\text{兩邊各乘以 } \frac{2}{3}, \quad \frac{2a}{3b} = \frac{2c}{3d}.$$

$$\text{應用合分定理, } \frac{2a + 3b}{2a - 3b} = \frac{2c + 3d}{2c - 3d},$$

$$\text{更換兩內項, } \frac{2a + 3b}{2c + 3d} = \frac{2a - 3b}{2c - 3d},$$

$$\text{即 } 2a + 3b : 2c + 3d = 2a - 3b : 2c - 3d.$$

注意: 證比例式時,常將比例式寫成分式,到最後再把分式寫成比例式.

學習問題

1. 若 $a : b = c : d$, 試證 $ma + nb : ma - nb = mc + nd : mc - nd$.

例二 解方程式 $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2}$.

【解】 應用合分定理，

$$\frac{(x^2+x+1)+(x^2-x-1)}{(x^2+x+1)-(x^2-x-1)} = \frac{(x^2-x+2)+(x^2+x-2)}{(x^2-x+2)-(x^2+x-2)}$$

即

$$\frac{2x^2}{2(x+1)} = \frac{2x^2}{-2(x-2)} \dots\dots\dots A$$

$$x^2(2-x) - x^2(x+1) = 0$$

$$x^2[(2-x)-(x+1)] = 0$$

$$x^2(1-2x) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } \frac{1}{2}.$$

注意： A 式何以不能用 x^2 分除兩邊？

練習問題九十一

1. 求下列各組數的第四比例項：

(1) a, ab, c . (2) $x^2, xy, 5x^2y$.

(3) $x^2-4x+3, x^2-1, x^2-5x+6$.

2. 解下列各比例式：

(1) $3x-1 : 6x-7 = 7x-10 : 9x+10$.

(2) $x+5 : 2x-3 = 5x+1 : 3x-3$.

(3)
$$\begin{cases} x+y+1 : x+y+2 = 6 : 7 \\ y+2x : y-2x = 12x+6y-3 : 6y-12x-1. \end{cases}$$

3. 若 $a : b = c : d$, 求證：

$$(1) 3a + b : b = 3c + d : d,$$

$$(2) 2a + 3b : 3a - 4b = 2c + 3d : 3c - 4d,$$

$$(3) \frac{a}{a-b} : \frac{a+b}{b} = \frac{c}{c-d} : \frac{c+d}{d}.$$

4. 解下列各方程式:

$$(1) \frac{2x-1}{x^2+2x-1} = \frac{x+4}{x^2+x+4},$$

$$(2) \frac{x^2-4x+2}{x^2-2x-1} = \frac{x^2-4x}{x^2-2x-2}.$$

5. 既知下列兩式,求證 $a : b = c : d$:

$$(1) 3a + 5b : 3a - 5b = 3c + 5d : 3c - 5d,$$

$$(2) (3a + 6b + c + 2d)(3a - 6b - c + 2d) \\ = (3a - 6b + c - 2d)(3a + 6b - c - 2d).$$

6. 已知二數和差的比是 k , 求這二數的比.

7. 已知 $\frac{x+6a+8b}{y+10a-12b} = \frac{3a+4b}{5a-6b}$, 求 $x : y$.

8. 某校三年級分甲乙兩組,人數的比是 13:9;若由甲組移 5 人到乙組,則人數的比是 6:5. 求兩組學生數.

95. 比例定理二

此外比例運算上還有兩個很重要的定理:

I 積比定理 幾個比例式相當項的乘積

仍成比例。

即若 $a : b = c : d, a' : b' = c' : d',$

則 $aa' : bb' = cc' : dd',$

因 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'},$ 故 $\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'}.$

如若幾個比例式皆相同,那相乘的結果,等於各項乘方,

即若 $a : b = c : d,$

則 $a^n : b^n = c^n : d^n,$

所以一個比例式中,各項的同次冪仍成比例。

例一 若 $a : b = c : d, b : x = d : y,$ 試證 $a : x = c : y.$

[證] $a : b = c : d,$ 即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

$b : x = d : y,$ 即 $\frac{b}{x} = \frac{d}{y}.$

兩比相乘, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{x} = \frac{c}{d} \times \frac{d}{y}.$

即 $a : x = c : y.$

學習問題

1. 解比例式 $\sqrt{x} + \sqrt{b} : \sqrt{x} - \sqrt{b} = a : b.$

II 和比定理 如若幾個比相等,則諸比