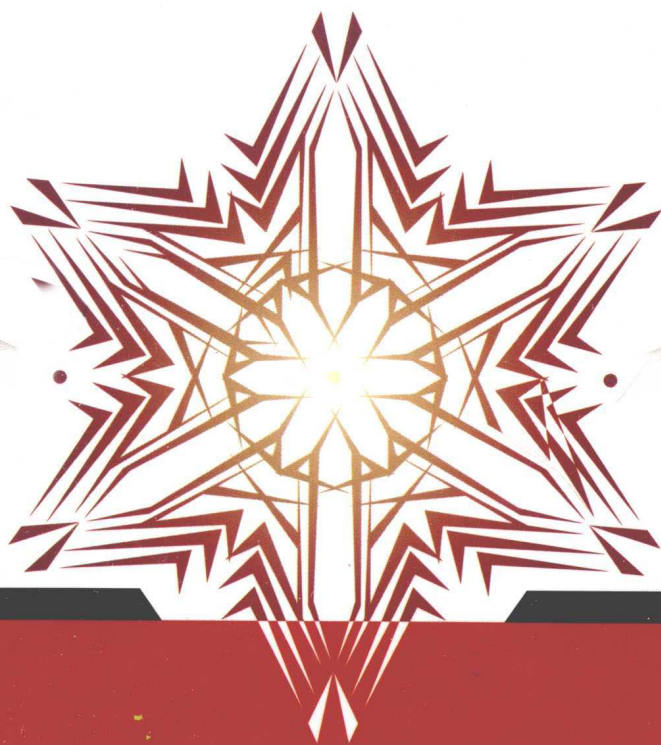


Robust Adaptive  
Beamforming Algorithms

稳健自适应  
波束形成算法

刘聪锋 著



西安电子科技大学出版社  
<http://www.xduph.com>

# 前 言

随着现代电子技术的发展,自适应阵列天线广泛应用于各种电子设备中,相应地,阵列信号处理就成为当前信号处理领域中的一个非常活跃的研究内容。自适应阵列天线具有传统天线无法比拟的优越性,如可以获得较高的空间分集增益,更重要的是可以有效实现空域滤波,而且可以极大地增加空间的信息获取量,为空间信号的检测和估计提供强有力的支持。

阵列信号处理主要研究空间分布传感器阵列的信号与信息处理的理论、技术及其应用等。而自适应波束形成技术作为阵列信号处理的基础,广泛应用于雷达、声呐、麦克风阵列语音处理、医学成像、无线通信,以及天文学、地震学中。许多其它阵列信号处理技术都可以作为自适应波束形成技术的推广,如空间谱估计、空时自适应处理等。更重要的是,自适应波束形成技术的许多研究成果可以推广应用于其它阵列信号处理技术。

最优的自适应波束形成就是使得波束形成器的输出信号与干扰加噪声的功率之比达到最大,即最优波束形成可以看做一个空间滤波器,使得感兴趣方向的有用信号通过,而使得噪声和干扰的输出功率尽可能地小。除去标量因子外,基本的波束形成算法加权矢量通常由  $R^{-1}s$  给出,其中  $R$  为接收信号的协方差矩阵,而  $s$  为有用信号的导向矢量。为了实现最优自适应波束形成,信号的导向矢量  $s$  必须精确地获得,然而这在实际应用中是无法实现的。同样,如果  $R$  带有一定的误差,也将会引起波束形成算法的性能下降。因此,稳健的自适应波束形成算法就成为应用阵列传感器系统的一个必需的组成部分。通常将在各种失配存在条件下仍试图保持良好性能的波束形成器称为稳健波束形成器。近几十年,随着自适应阵列的大量应用以及信号处理、最优化理论的深入研究,再加上对稳健自适应阵列处理算法的迫切需求,国内外掀起了对稳健自适应波束形成算法的研究热潮,也使得该算法成为信号处理和应用数学等领域研究人员的研究重点。

本书比较系统地研究了稳健自适应波束形成算法的基本原理、实现方法以及有关该技术的最新研究成果,比较充分地反映了当前稳健自适应波束形成算法的最新研究状况,其中大部分内容是作者近几年的最新研究成果。全书共六章,主要内容概括如下:

第1章为绪论,简单介绍了自适应波束形成技术、稳健自适应波束形成方法以及稳健方向图综合方法的研究现状及发展趋势,比较详细地阐述了当前研究成果的具体状况,并给出了稳健自适应波束形成方法和稳健方向图综合方法的发展趋势。

第2章为自适应阵列处理基础,主要介绍阵列信号处理中的基本理论,其中详细讨论了阵列信号处理中的信号模型,以及自适应波束形成的基本理论,并给出了度量波束形成算法的性能指标。

第3章为传统稳健波束形成算法,主要包括四部分内容:第一部分研究了对角加载稳健自适应波束形成算法,对其性能进行了详细的理论分析;第二部分研究了特征空间稳健波束形成算法,包括主分量波束形成算法、投影波束形成算法、互谱特征子空间波束形成

算法以及主模式抑制波束形成算法；第三部分研究了 LCMV 波束形成算法，重点研究了各种约束条件的目的及其实现，以及基于广义旁瓣对消器实现的原理；第四部分研究了协方差矩阵锐化技术，并对其进行了详细的性能分析。

第 4 章为模约束稳健波束形成算法，包括两部分内容：第一部分研究了基于模约束的稳健 Capon 波束形成算法，其中不仅研究了波束形成算法的求解，而且给出了准确加载电平的求解方法，并给出了加权矢量模约束参数的选取范围和依据，利用详细的仿真分析对理论分析进行了验证；第二部分研究了基于二次约束的稳健 LCMP 波束形成算法，其实该稳健算法是第一部分的推广，但是该算法可以通过强加干扰置零的线性约束来实现良好的干扰抑制性能，这部分不仅进行了详细的理论研究，还进行了详细的仿真分析。

第 5 章为不确定集约束稳健波束形成算法，包括五部分内容：第一部分研究了基于导向矢量不确定集约束的稳健 Capon 波束形成算法，不仅对该算法进行了正确的求解，而且给出了最优加权矢量的表达式以及准确加载电平的计算方法，并进行了详细的仿真分析；第二部分研究了稳健的 LSMI 波束形成算法，给出了最优 Lagrange 乘数的准确求解方法，并详细讨论了解的存在情况，利用详细的仿真分析验证了理论分析的正确性和算法的有效性；第三部分研究了基于线性干扰参数约束的稳健 LSMI 波束形成算法，即主要在第二部分的基础上增加了干扰置零的等式约束，以改善干扰抑制性能，并进行了详细的仿真分析；第四部分研究了通用信号模型稳健波束形成算法，以实现针对空间分布/散射信号源的稳健波束形成问题，其中不仅进行了详细的理论分析，而且进行了仿真试验，验证了理论分析的正确性和算法的有效性；第五部分研究了基于椭圆柱不确定集约束的稳健最小方差波束形成算法，不仅讨论了该算法的准确求解问题，而且进行了详细的仿真试验，并详细讨论了导向矢量不确定椭圆柱的建模和构造。

第 6 章为稳健方向图综合算法，包括五部分内容：第一部分研究了传统的方向图综合算法，即契比雪夫综合方法和泰勒综合方法，不仅进行了详细的理论分析，而且给出了方向图综合仿真实例；第二部分研究了基于自适应阵列方法的稳健方向图综合算法，分别讨论了全迭代和峰值迭代两种算法，并进行了详细的仿真试验，验证了该方法的有效性；第三部分研究了基于 LCMV 准则的稳健方向图综合算法，详细讨论了基于方向图幅度响应的导数约束及其实现，并深入研究了其中的干扰功率迭代公式，极大地提高了方向图综合效率，并利用详细的仿真分析验证了算法的有效性；第四部分研究了基于半正定规划的稳健方向图综合算法，主要讨论了具有目标幅度响应的阵列方向图综合算法和各种不确定性存在时的稳健阵列方向图综合算法，并利用仿真分析进行了算法的有效性验证；第五部分研究了基于凸优化的稳健方向图综合算法，包括最低旁瓣电平综合方法、最窄主瓣宽度综合方法、最小噪声功率综合方法以及宽带最低旁瓣阵列综合方法，并分别进行了详细的仿真试验，验证了算法的正确性和有效性。

国外近几年出版了几本关于稳健自适应波束形成的专著，国内也出版了类似的著作，其内容基本与国外的相近，其中大部分内容来自国内外公开发表的论文。本书的题材比较新颖，反映了近年来国际上关于稳健自适应波束形成算法的最新、最重要的研究成果以及作者本人的最新研究成果。本书系统性强，学术性和实用性相结合，具有较强的可读性。总之，作者希望能够为读者奉献一部全面、实用的专著，并以此抛砖引玉，以期对国内稳健自适应波束形成的研究和发展起到一些促进作用。当然，由于内容新、发展快，本书中

可能会出现错误或不足之处，恳请广大读者提出批评指正意见。

在本书的编写过程中，我的博士学位指导教师、西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室副主任、电子工程学院副院长廖桂生教授给予了指导和支持。廖老师从我攻读博士学位开始就指导我开展有关自适应阵列信号处理的研究，在此表示衷心的感谢。同时感谢我的博士后指导教师、西安电子科技大学智能感知与图像理解教育部重点实验室主任、电子工程学院院长焦李成教授的支持和指导。

我2004年由西安卫星测控中心转业到西安电子科技大学工作，一直得到了西安电子科技大学电子对抗研究所所长赵国庆教授的指导和帮助，是赵老师指导我开展有关电子战及其信息处理方面的科研工作，在此对赵老师表示诚挚的谢意。同时感谢我的硕士学位指导教师、解放军电子工程学院陈鹏举教授，是他最早指引我开展无线电侦察方面的学习和研究工作。陈老师对我的教导和培养使我受益终生，在此表示深深的谢意。

感谢曾经培养和帮助过我的部队领导、老师和亲密战友。最后感谢我的爱人杨洁女士和可爱的女儿，是她们无私的爱、鼓励和帮助，才使我能够全身心投入到本书的撰写中去。

在作者对本书大部分内容的研究过程中，得到了国家自然科学基金项目(No. 61072107)、博士后基金项目(No. 20090451252)、陕西省工业攻关项目(No. 2009K08—31, No. 2012K06—12)、中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(No. JY10000902025)等的资助，在此，一并表示感谢。

西安电子科技大学出版社的毛红兵编辑和各相关部门对本书的出版提供了很大的帮助和指导，在此也深表谢意。

由于作者水平有限，书中难免存在不当之处，敬希读者批评指正。

作 者  
2012年3月  
西安电子科技大学

# 目 录

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 自适应波束形成技术 .....	1
1.2 稳健自适应波束形成方法 .....	1
1.2.1 针对信号方向失配的稳健方法 .....	1
1.2.2 针对一般类型失配的稳健方法 .....	3
1.2.3 针对一般类型失配的不确定集约束方法 .....	4
1.2.4 针对一般类型失配的权矢量模约束方法 .....	5
1.3 稳健方向图综合方法 .....	6
1.3.1 最小均方差方向图综合方法 .....	7
1.3.2 二次规划方向图综合方法 .....	7
1.3.3 约束迭代方向图综合方法 .....	7
1.3.4 自适应阵列方向图综合方法 .....	8
1.3.5 极小极大方向图综合方法 .....	8
1.3.6 具有较高辐射效率的方向图综合方法 .....	9
1.4 本章小结 .....	9
1.5 参考文献 .....	9
<b>第 2 章 自适应阵列处理基础</b> .....	14
2.1 阵列天线 .....	14
2.1.1 机械扫描天线 .....	14
2.1.2 电子扫描天线 .....	15
2.1.3 自适应阵列 .....	15
2.2 信号模型 .....	17
2.2.1 有用信号 .....	17
2.2.2 噪声 .....	19
2.2.3 干扰 .....	19
2.2.4 信噪比和干噪比 .....	19
2.3 波束形成 .....	20
2.3.1 波束形成基础 .....	20
2.3.2 经典波束形成 .....	21
2.3.3 最优波束形成 .....	24
2.3.4 自适应波束形成 .....	26
2.4 性能度量 .....	32
2.5 本章小结 .....	34
2.6 参考文献 .....	34
<b>第 3 章 传统稳健波束形成算法</b> .....	36
3.1 对角加载稳健波束形成算法 .....	36

3.1.1	算法描述	36
3.1.2	性能分析	38
3.1.3	仿真分析	40
3.1.4	算法小结	44
3.2	特征空间稳健波束形成算法	44
3.2.1	主分量波束形成算法	44
3.2.2	投影波束形成算法	45
3.2.3	互谱特征子空间波束形成算法	46
3.2.4	主模式抑制波束形成算法	47
3.2.5	信号子空间及其维数的确定	48
3.2.6	特征子空间波束形成算法的性能分析	49
3.2.7	仿真分析	50
3.2.8	算法小结	54
3.3	LCMV 波束形成器	54
3.3.1	典型约束条件	55
3.3.2	最优 LCMV 波束形成器	58
3.3.3	广义旁瓣对消器	59
3.3.4	LCMV 波束形成器的性能分析	61
3.3.5	仿真分析	62
3.3.6	算法小结	69
3.4	协方差矩阵锐化(CMT)	69
3.4.1	协方差矩阵锐化	73
3.4.2	CMT 锐化损失	75
3.4.3	仿真分析	75
3.4.4	算法小结	81
3.5	本章小结	81
3.6	参考文献	81
<b>第 4 章 模约束稳健波束形成算法</b>		<b>85</b>
4.1	基于模约束的稳健 Capon 波束形成算法	85
4.1.1	标准 Capon 波束形成算法	86
4.1.2	模不等式约束的 Capon 波束形成算法	86
4.1.3	模不等式约束参数的选择	90
4.1.4	模等式约束的 Capon 波束形成算法	91
4.1.5	仿真分析	92
4.1.6	算法小结	99
4.2	基于二次约束的稳健 LCMP 波束形成算法	99
4.2.1	LCMP 波束形成算法	99
4.2.2	二次不等式约束 LCMP 波束形成算法	100
4.2.3	二次不等式约束参数的选择	105
4.2.4	二次等式约束 LCMP 波束形成算法	105
4.2.5	仿真分析	107
4.2.6	算法小结	114
4.3	本章小结	115

4.4 参考文献 .....	115
<b>第5章 不确定集约束稳健波束形成算法 .....</b>	<b>117</b>
5.1 导向矢量不确定集约束的稳健 Capon 波束形成算法 .....	117
5.1.1 稳健的 Capon 波束形成算法 .....	117
5.1.2 稳健 Capon 波束形成算法的求解 .....	119
5.1.3 最优 Lagrange 乘数的求解 .....	120
5.1.4 仿真分析 .....	121
5.1.5 算法小结 .....	125
5.2 稳健的 LSMI 波束形成算法 .....	125
5.2.1 加载样本矩阵求逆(LSMI)波束形成算法 .....	125
5.2.2 Lagrange 乘数的求解 .....	129
5.2.3 最优负加载和约束参数选取的讨论 .....	133
5.2.4 仿真分析 .....	134
5.2.5 算法小结 .....	144
5.3 基于线性干扰参数约束的稳健 LSMI 波束形成算法 .....	144
5.3.1 基于线性干扰参数约束的 LSMI 波束形成算法 .....	144
5.3.2 仿真分析 .....	146
5.3.3 算法小结 .....	153
5.4 通用信号模型稳健波束形成算法 .....	153
5.4.1 信号与算法模型 .....	154
5.4.2 稳健波束形成算法的模型 .....	157
5.4.3 稳健波束形成算法的求解 .....	158
5.4.4 稳健波束形成算法的对角加载解释 .....	159
5.4.5 稳健波束形成算法的扩充 .....	160
5.4.6 仿真分析 .....	161
5.4.7 算法小结 .....	167
5.5 稳健的最小方差波束形成算法 .....	167
5.5.1 信号与算法模型 .....	168
5.5.2 稳健最小方差波束形成算法 .....	169
5.5.3 稳健波束形成算法的求解 .....	170
5.5.4 椭圆体的建模 .....	174
5.5.5 仿真分析 .....	175
5.5.6 算法小结 .....	180
5.6 本章小结 .....	180
5.7 参考文献 .....	180
<b>第6章 稳健方向图综合算法 .....</b>	<b>184</b>
6.1 传统方向图综合算法 .....	185
6.1.1 契比雪夫综合方法 .....	185
6.1.2 契比雪夫综合方法的仿真实例 .....	190
6.1.3 泰勒综合方法 .....	193
6.1.4 泰勒综合方法的仿真实例 .....	195
6.1.5 算法小结 .....	198
6.2 基于自适应阵列方法的稳健方向图综合算法 .....	199

6.2.1	问题描述 .....	200
6.2.2	方向图综合算法 .....	201
6.2.3	仿真分析 .....	207
6.2.4	算法小结 .....	212
6.3	基于 LCMV 准则的稳健方向图综合算法 .....	212
6.3.1	LCMV 波束形成算法的导数约束 .....	213
6.3.2	基于 LCMV 准则的方向图综合算法 .....	220
6.3.3	干扰功率迭代公式的改进 .....	222
6.3.4	仿真分析 .....	223
6.3.5	算法小结 .....	229
6.4	基于半正定规划的稳健方向图综合算法 .....	229
6.4.1	半正定规划与 APS .....	231
6.4.2	具有目标幅度响应的阵列方向图综合 .....	233
6.4.3	稳健阵列方向图综合 .....	236
6.4.4	仿真分析 .....	239
6.4.5	算法小结 .....	245
6.5	基于凸优化的稳健方向图综合算法 .....	245
6.5.1	凸优化 .....	246
6.5.2	基于凸优化的最低旁瓣方向图综合 .....	247
6.5.3	基于凸优化的最窄主瓣宽度方向图综合 .....	249
6.5.4	基于凸优化的最小噪声功率方向图综合 .....	251
6.5.5	基于凸优化的宽带最低旁瓣阵列方向图综合 .....	253
6.5.6	算法小结 .....	256
6.6	本章小结 .....	257
6.7	参考文献 .....	257



# 第1章 绪论

## 1.1 自适应波束形成技术

自适应波束形成(adaptive beamforming)技术广泛应用于雷达、声呐、麦克风阵列语音处理、医学成像、无线通信和天文学、地震学等领域。自适应阵列天线可根据信号环境实时地调整其加权因子(weight factors),以使期望信号方向(desired signal direction)上达到一定的增益并抑制其它方向上的干扰,通常称这一过程为自适应波束形成。关于自适应波束形成技术的介绍可以参考文献[1-9]。

传统的自适应波束形成算法大都假设训练数据(training data)中不存在有用信号(desired signal),故波束形成器的稳健性(robustness)主要依赖于可利用的无信号训练数据(signal-free training data)。对于这种情况,自适应波束形成算法具有足够的稳健性用于克服有用信号的阵列响应误差(array response error)和有限训练样本数据(finite training sample data)所引起的影响,而且具有许多的快速收敛技术用于算法的实现。尽管无信号训练快拍的假设在一定条件下是成立的(即在某些雷达和有源声呐应用中),然而还存在许多实际应用情况,如移动通信、被动无源定位、麦克风阵列语音处理、医学成像以及无线电天文学等,在这些应用中,无信号训练数据单元是不可能获得的,对于这种情况,有用信号一直存在于训练快拍中,即只能得到有用信号训练数据(signal-in training data)。因此,自适应波束形成算法将变得对潜在的假设非常敏感,如环境、信号源或传感器阵列等参数。众所周知,即使在接收传感器阵列处的信号导向矢量(signal steering vector)是准确已知的,相对于无信号训练数据的情况,训练数据快拍中存在的有用信号必然会降低自适应波束形成算法的收敛性,而且在小训练样本数量时自适应波束形成算法的性能将急剧下降。

因此,当有用信号的假定阵列响应和其真实值之间存在失配(mismatch)时,波束形成器的性能将会急剧下降。同样,当信号的阵列响应准确已知时,较小的训练样本也会引起波束形成器的性能下降。因此,稳健性就成为自适应阵列处理的必需要求。

近30年内,国内外学者提出了许多方法用于改善自适应波束形成算法的稳健性。关于稳健自适应波束形成算法的文献非常多,更加详细的描述和分析可以参阅文献[18]和[19-25]。

## 1.2 稳健自适应波束形成方法

### 1.2.1 针对信号方向失配的稳健方法

对于信号方向失配(signal direction mismatch)的特殊情况,曾有学者提出了几种有效

的稳健方法, 其中最具代表性的例子就是线性约束最小方差(Linear Constraint Minimum Variance, LCMV)波束形成算法<sup>[26]</sup>(其它文献也称其为线性约束最小功率(Linear Constraint Minimum Power, LCMP)波束形成算法<sup>[27]</sup>)、基于信号分块(signal blocking - based)的稳健算法<sup>[10, 28]</sup>以及 Bayesian 波束形成算法<sup>[29]</sup>。尽管这些算法具有抑制信号方向失配的优良稳健性, 但是它们并不具备克服其它类型失配的稳健性, 诸如由较差的阵列校准(poor array calibration)、未知传感器互偶(unknown sensor mutual coupling)、近场波前建模失配(near-far wavefront mismodeling)、信号波前失真(signal wavefront distortions)、信源扩展(source spreading)以及相干/非相干局部散射(coherent/incoherent local scattering)等其它影响所引起的失配<sup>[17]</sup>。

LCMP 波束形成器的加权矢量是通过使波束形成器在形如  $C^H w = f$  的一系列线性约束条件下输出的功率最小来求解的, 其中  $C$  为  $N \times m$  维的约束矩阵(constraint matrix),  $f$  为  $m \times 1$  维的约束值矢量(constraint value vector),  $N$  为阵元数量。因此可以通过有用信号导向矢量的高阶( $k \geq 1$ )导数进行方向图控制, 使得主瓣方向图展宽或更加平坦, 或通过有用信号附近的多点约束以达到展宽主瓣的目的, 进而实现提高对有用信号指向失配的稳健性。而 LCMP 最优化问题可以描述如下:

$$\begin{cases} \min_w w^H R_x w \\ \text{s. t. } C^H w = f \end{cases} \quad (1.2-1)$$

其中  $R_x = E\{x(k)x^H(k)\}$  为数据协方差矩阵(data covariance matrix)。该最优化问题可以利用 lagrange 乘数方法进行求解, 其最优加权矢量(optimal weight vector)的表达式如下所示:

$$w = R_x^{-1} C (C^H R_x^{-1} C)^{-1} f \quad (1.2-2)$$

Chen 等人考虑了一种简单的导向矢量不确定集(steering vector uncertainty set), 该不确定集只包含了有用信号到达角(Direction - Of - Arrival, DOA)的不确定范围内的导向矢量<sup>[25]</sup>。尽管给出了封闭形式(closed - form)的解, 而且也给出了用于对角加载电平(diagonal loading level)计算的迭代方法(iteration method), 但是对于该方法如何确定有用信号的 DOA 不确定范围, 则还是一个悬而未决的问题。该稳健自适应波束形成算法的数学描述为

$$\begin{cases} \min_w w^H R_x w \\ \text{s. t. } |s(\theta)^H w| \geq 1, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases} \quad (1.2-3)$$

其中  $s(\theta)$  为方向角  $\theta$  处的导向矢量, 而  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为有用信号到达角的不确定范围的下限和上限。为了求解该问题, 文献[25]分别讨论了两点不等式约束和带有对角加载的两点约束稳健算法, 其中的两点不等式约束是指上、下限到达角处导向矢量的约束。然而对于只具有上、下限到达角处导向矢量的不等式约束, 可以将其转化为具有相似形式的 LCMP 波束形成器, 也可以看做是带有对角加载的两点约束稳健算法的一个特例。而后者的表达式为

$$\begin{cases} \min_w w^H R_x w + \gamma \|w\|^2 \\ \text{s. t. } |s(\theta_1)^H w| \geq 1, |s(\theta_2)^H w| \geq 1 \end{cases} \quad (1.2-4)$$

其中  $\gamma$  为加载量(diagonal loading factor)。在文献[25]中利用迭代搜索方式实现了加载量

的估计,进而获得了最优加权矢量的近似计算。

### 1.2.2 针对一般类型失配的稳健方法

当前的许多稳健算法都能够用于改善一般失配(general mismatch)的稳健性,如样本协方差矩阵对角加载(sample covariance matrix diagonal loading)<sup>[14, 16]</sup>(即对样本协方差矩阵增加一个标量对角矩阵)、基于特征子空间(digen-subspace)的波束形成器<sup>[11, 30, 31]</sup>,以及协方差矩阵锐化(Covariance Matrix Taper, CMT)方法等<sup>[33]</sup>。对于对角加载(diagonal loading)方法,一个严重的缺陷是没有一种可靠的方法来选择对角加载电平(diagonal loading level)。Vincent 和 Besson 提出了在导向矢量存在误差的条件下,通过使得输出的信噪比(Signal Noise Ratio, SNR)达到最大的准则来选择最优的加载电平,而且证明了加载量为负值。但是,他们没能给出精确的解,而是给出了相应的近似解,且没有给出导向矢量误差的表达式<sup>[35]</sup>。基于特征子空间方法的应用严格受限于输入信号的信噪比和信号加干扰子空间的维数,即在低的 SNR 和较高的信号加噪声子空间维数条件下,性能急剧恶化,而且信号加噪声子空间的维数在后续的处理中必须是已知的<sup>[31]</sup>。CMT 方法在非平稳干扰场景下可以提供良好的稳健性,但是该方法对于克服有用信号阵列响应失配的稳健性却不能令人满意,而且它也可以解释为加载技术<sup>[33]</sup>。

基于对角加载技术的稳健波束形成算法在许多文献中都被建模为如下的最优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_x + \gamma \mathbf{I}) \mathbf{w} \\ \text{s. t. } |\mathbf{s}(\theta_1)^H \mathbf{w}| = 1 \end{cases} \quad (1.2-5)$$

即该算法通过对加载量电平  $\gamma$  的控制来增加人工白噪声(White Noise)的方差,以达到进一步抑制白噪声的目的,进而降低了对干扰的抑制。因此,当有用信号的导向矢量失配存在时,信号将退化为干扰。由于加载后的波束形成器主要用于抑制噪声,因此有用信号相消的问题将会进一步降低,进而提高了波束形成算法的稳健性。

基于特征子空间的稳健波束形成器只能应用于点信号源(point signal source),它的主要思想是利用了假定导向矢量在样本信号加干扰子空间上的投影(projection),而非该假定导向矢量。如果令样本协方差矩阵  $\mathbf{R}_x$  的特征分解(eigenvalue decomposition)为

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}^H + \mathbf{G} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{G}^H \quad (1.2-6)$$

其中  $N \times (L+1)$  维的矩阵  $\mathbf{E}$  包含  $\mathbf{R}_x$  的  $L+1$  个信号加干扰子空间(signal plus Interference subspace)特征矢量(eigenvector),  $L$  为干扰数量。对角矩阵  $\mathbf{\Lambda}$  包含其相应的特征值(eigenvalue)。类似地,  $N \times (N-L-1)$  维的矩阵  $\mathbf{G}$  包含  $N-L-1$  个噪声子空间(noise subspace),  $\mathbf{\Gamma}$  为相应的特征值。其中干扰源的数量  $L$  假设是已知的。因此基于特征子空间的稳健波束形成器的加权矢量为

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{v} \quad (1.2-7)$$

其中  $\mathbf{v} = \mathbf{P}_E \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}$  为假定信号导向矢量(presumed signal steering vector),而  $\mathbf{P}_E = \mathbf{E}(\mathbf{E}^H \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^H = \mathbf{E} \mathbf{E}^H$  为估计的信号加干扰子空间的正交投影矩阵(orthogonal projection matrix)。当应用条件比较充足时,基于特征子空间的稳健算法可以很好地应用于具有任意导向矢量失配的场景。然而,该方法的一个严重缺点是其完全基于训练数据的低秩平稳模型,而且要求具有  $L$  的准确知识。此外,由于在低 SNR 时,极易发生子空间缠绕(subspace

swaps), 进而使得信号加干扰子空间的估计失败, 因此该方法只适用于高信噪比的场景。

### 1.2.3 针对一般类型失配的不确定集约束方法

最近几年, 有关专家提出了许多方法用于改善标准最小方差无失真响应 (Minimum Variance Distortionless Response, MVDR) 波束形成器的稳健性, 它们的主要思想是基于不确定集 (uncertainty set) 的定义, 以及利用了最差性能最优 (worst - case performance optimization) 的准则。但是, 所有算法都可以归类到对角加载技术。

Li 等人提出了基于导向矢量不确定集约束的稳健 Capon 波束形成算法<sup>[20]</sup>, 并在此基础上通过强加导向矢量模约束 (norm constraint) 提出了双约束 (double constraint) 稳健 Capon 波束形成算法<sup>[22]</sup>。对于这两种波束形成算法, 尽管给出了准确的加权矢量表达式, 以及最优加载电平的计算方法, 但是它们的性能改善并不是非常明显。实际上, 不确定集约束是这两种稳健波束形成器的核心, 因此这两种稳健波束形成算法具有相同的稳健性。Vincent 和 Besson 也对基于不确定集约束的波束形成算法进行了近似的性能分析, 但是没能给出准确的加载电平<sup>[36]</sup>。基于不确定约束的稳健 Capon 波束形成器的表达式为

$$\begin{cases} \min_s s^H R_x^{-1} s \\ \text{s. t. } \|s - \bar{s}\|^2 \leq \epsilon \end{cases} \quad (1.2-8)$$

其中  $s$  为有用信号的导向矢量, 而  $\bar{s}$  为其假定值,  $\epsilon$  为导向矢量球形不确定集 (spherical uncertainty set) 的约束参数。文献[20]对其进行了求解, 且最优解为

$$\hat{s} = \bar{s} - (I + \lambda R_x^{-1})^{-1} \bar{s} \quad (1.2-9)$$

其中  $\lambda$  为 Lagrange 乘数。同样可以得到稳健 Capon 波束形成算法的最优加权矢量, 即

$$w = \frac{\left(R_x + \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \bar{s}}{\bar{s}^H \left(R_x + \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} R_x \left(R_x + \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \bar{s}} \quad (1.2-10)$$

因此该波束形成算法也属于对角加载类算法, 而加载量为  $1/\lambda$ 。

Vorobyov 等人提出了针对任意未知信号导向矢量失配的稳健波束形成器<sup>[19]</sup>, 尽管文献中证明了所提出的方法等价于加载样本矩阵求逆 (Loading Sample Matrix Inversion, LSMI) 算法, 但是并没有给出直接求解最优加权矢量的方法, 而是基于二阶锥规划 (Second - Order Cone Programming, SOCP) 方式对原始问题进行了近似求解。Elnashar 等人利用对角加载技术实现了该稳健波束形成器<sup>[24]</sup>, 但是未能给出最优加载电平的准确计算方法, 只好通过利用最优变加载 (variable loading) 技术将对角加载集成到自适应更新方案中。Lorenz 和 Boyd 也利用 Lagrange 乘数技术对与之相类似的波束形成器进行了求解<sup>[23]</sup>, 但他们是通过将加权矢量和阵列导向矢量表示为相应的实部和虚部分量的直接和的形式进行建模和求解的。Mutapic 等人也指出具有多重加权矢量不确定集 (multiplicative weight uncertainty set) 约束的最差性能稳健波束形成算法也可以作为凸优化 (convex optimization) 问题进行求解<sup>[37]</sup>, 但是也没能给出求解的方法, 实际上文献[37]中提出的具有不确定加权矢量约束的稳健波束形成算法也可以等价转化成如同 Vorobyov 等人提出的稳健算法。文献[19]提出的稳健算法为

$$\begin{cases} \min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{s. t. } |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{s}}| \geq 1, \mathbf{s} \in A(\epsilon) = \{\mathbf{s} \mid \mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{e}, \|\mathbf{e}\| \leq \epsilon\} \end{cases} \quad (1.2-11)$$

其中参数定义同前,  $A(\epsilon)$  为导向矢量的不确定集, 而  $\mathbf{e}$  表示信号导向矢量误差。该式等价于加载样本矩阵求逆 (Loading Sample Matrix Inversion, LSMI) 波束形成算法, 即

$$\begin{cases} \min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{s. t. } |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{s}} - 1|^2 = \epsilon^2 \mathbf{w}^H \mathbf{w} \end{cases} \quad (1.2-12)$$

其最优加权矢量的表达式为

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{\lambda \bar{\mathbf{s}}^H (\hat{\mathbf{R}}_x + \lambda \epsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{s}} - 1} (\hat{\mathbf{R}}_x + \lambda \epsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{s}} \quad (1.2-13)$$

显然, 该稳健波束形成算法也属于对角加载类处理方法。

Shahram 等人研究通用秩信号模型 (general-rank signal models) 并提出了针对分布散射信号源 (distributed/scattered signal source) 的稳健波束形成算法<sup>[21]</sup>, 给出了非常完美的封闭形式解 (closed-form solution), 但是该算法的性能严重依赖于约束参数, 而且并未达到最优。该波束形成算法的表达式为

$$\begin{cases} \min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{s. t. } \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_s + \mathbf{\Delta}) \mathbf{w} \geq 1 \\ \|\mathbf{\Delta}\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (1.2-14)$$

其中  $\mathbf{R}_s$  为假定的信号协方差矩阵,  $\mathbf{\Delta}$  为一未知的 Hermitian 误差矩阵, 用于描述有用信号阵列响应失配的影响。其最优权矢量可以表示为

$$\mathbf{w} = P\{\mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\} \quad (1.2-15)$$

其中  $P\{\cdot\}$  表示求矩阵的主特征矢量 (principal eigenvector) 算子, 对应于最大特征值 (maximal eigenvalue) 的特征矢量 (eigenvector)。文献<sup>[21]</sup>还对其进行了推广, 增加了协方差矩阵失配的影响, 得到了相似的结论, 然而其优点和问题与该算法相似。

#### 1.2.4 针对一般类型失配的权矢量模约束方法

Li 等人提出了具有模不等式约束 (norm inequality constraint) 的稳健 Capon 波束形成方法来改善阵列导向矢量误差和噪声的影响<sup>[22]</sup>, 尽管给出了精确解, 而且给出了最优加载电平的计算方法, 但是通过分析和仿真发现, 所提出方法并没有达到预期的效果。其实对于该算法, 模约束决定着算法的稳健性, 但是如何选择约束参数, Li 等人所作论文中并没有进行讨论。该稳健波束形成算法的数学表达式为

$$\begin{cases} \min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{s. t. } \mathbf{w}^H \bar{\mathbf{s}} = 1 \\ \|\mathbf{w}\|^2 \leq \zeta \end{cases} \quad (1.2-16)$$

其中  $\bar{\mathbf{s}}$  为假设的有用信号 (Signal Of Interest, SOI) 导向矢量, 而参数  $\zeta$  为模不等式约束参数。利用 Lagrange 乘数方法对其求解, 可得最优加权矢量为

$$\mathbf{w} = \mu (\mathbf{R}_x + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{s}} \quad (1.2-17)$$

其中参数  $\mu$  的计算公式为

$$\mu = \frac{1}{\mathbf{s}^H (\mathbf{R}_x + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{s}} \quad (1.2-18)$$

而  $\lambda$  也为 Lagrange 乘数, 或称为加载电平, 因而该波束形成器也是对角加载技术。

针对 LCMP 波束形成器的加权矢量进行二次不等式约束 (quadratic inequality constraint) 也可以提高波束形成器针对指向误差 (pointing error) 和传感器参数的随机扰动 (random perturbations) 的稳健性<sup>[27]</sup>。通过在线性约束和权矢量模的不等式约束下, 使得输出功率最小化获得的最优权和最优 LCMP 波束形成器具有相同的形式, 不同之处是数据协方差矩阵的对角加载形式。但是, 最优加载电平并不能以封闭形式直接表示成约束条件的函数, 而且不能被精确地计算。因此, 它的应用直接受限于最优加载电平的选取。尽管提出了一些数值算法 (numerically algorithms) 来实现二次不等式约束的 LCMP 波束形成算法, 如最小二乘 (Least Mean Squares, LMS) 算法或递归最小二乘 (Recursive Least Squares, RLS) 算法, 但是它们的应用效果并没有期望的理想。该波束形成器可以描述如下:

$$\begin{cases} \min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{s. t. } \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \\ \|\mathbf{w}\|^2 \leq \epsilon \end{cases} \quad (1.2-19)$$

同样可得最优权矢量为

$$\mathbf{w} = (\mathbf{R}_x + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\mu} \quad (1.2-20)$$

其中:

$$\boldsymbol{\mu} = [\mathbf{C}^H (\mathbf{R}_x + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \quad (1.2-21)$$

显然, 该解与 LCMP 波束形成器的解具有相同的形式, 不同之处是对  $\mathbf{R}_x$  增加了一个对角加载项  $\lambda \mathbf{I}$ 。该波束形成器也属于对角加载类技术。

### 1.3 稳健方向图综合方法

目前存在两种阵列天线: 非自适应阵列天线 (non-adaptive array antennas) 和自适应阵列天线 (adaptive array antennas)。对于非自适应阵列天线 (亦可称之为传统天线阵) 而言, 天线方向图 (antenna pattern) 的形成是通过各阵元固定加权得到的, 其加权因子是离线非实时确定的, 先于阵列天线的具体应用。由此, 天线阵的具体应用决定了其具体配置。与非自适应阵列天线相比, 自适应阵列天线显得更加复杂, 它可以根据信号环境实时地调整其加权因子, 以使期望信号方向上达到一定的增益并抑制其它方向上的干扰。通常称这一过程为自适应波束形成 (adaptive beamforming)。然而, 如果在自适应波束形成过程中没有考虑非干扰方向上的旁瓣, 尤其是副瓣的控制, 将会导致这些旁瓣在不可接受的电平上。

阵列天线方向图综合 (array pattern synthesis) 是指按规定的方向图要求, 用一种或多种方法进行天线系统的设计, 以使该系统产生的方向图与所要求的方向图良好逼近。它实际上是天线分析的反设计, 即在给定期望方向图的前提下设计阵列天线的相关参数。阵列天线方向图综合设计参数包括阵列单元数目、阵元分布形式、阵元间距、各阵元激励幅度和相位。

随着阵列天线在通信、雷达等众多领域的广泛应用,阵列天线方向图综合问题成为了阵列信号处理的一项基础研究内容,受到了广泛的关注,且针对如何降低天线阵的副瓣电平和优化天线阵的方向性已有大量的研究。Dolph - Chebyshev 综合法和 Taylor 综合法是目前应用最广泛的两种天线综合方法,得到的激励分布分别称为 Chebyshev 分布和 Taylor 分布。天线方向图综合的重点是使综合得到的方向图形状与期望方向图形状尽量一致。实际应用中,大家关心的并不是方向图形状的具体细节,而是天线阵的一些关键性能指标,如最大副瓣电平、主瓣宽度、方向性系数等。

尽管当前提出了各种任意阵列方向图综合方法,然而这些方法不是迭代过程的运算量大,就是算法中迭代参数的选择比较困难,或者只是针对某些特殊的阵列配置,缺少通用性。尤其重要的是,由于各种误差的存在,将严重影响方向图的综合效果,且而当前提出的许多算法很难实时实现快速稳健的阵列方向图综合要求。

阵列天线方向图综合就是求解各阵列单元激励的加权值,以使天线阵列方向图趋近期望的形状。在过去的几十年里,天线方向图综合领域形成了一个持续的研究热点。1946年, Dolph 首次给出了如何获得均匀线性阵列的加权函数以实现切比雪夫方向图的方法<sup>[42]</sup>,从而实现了对于给定主瓣宽度、最大旁瓣电平最小意义上的最优解。在各种文献中曾经给出过各种各样的任意阵列方向图综合的方法,这些技术都有各自的优点和缺点。下面给出传统的经典阵列方向图综合方法。

### 1.3.1 最小均方差方向图综合方法

阵列方向图综合问题可视为最小均方差问题。Perini 提出了阵列方向图综合的最陡下降法<sup>[43]</sup>。该算法迭代地更新阵列权值,直至找到使综合方向图与期望方向图方差之和最小的点,相当于最小  $L_2$  范数,当求得最小误差或认为误差的改变足够小时,算法就停止。用同样的标准,可迭代地求解拟合线性方程来求得最优权值。其实在 Zhou 提出的基于自适应阵列方法的方向图综合算法中,对问题的描述也是基于加权最小均方误差构造目标函数的<sup>[50]</sup>。

### 1.3.2 二次规划方向图综合方法

Ng、Er 和 Kot 提出了一种非迭代的算法来使综合方向图和期望方向图之间的均方差最小化,即采用二次规划方法<sup>[44]</sup>,最优化的权值向量可在一步中求得,而不用迭代过程。该算法和前述最小均方差算法都应用  $L_2$  范数,无法保证某一区域的特定方向图形状或旁瓣区的特定响应电平。Lebret 和 Boyd 提出了基于凸优化的阵列方向图综合算法<sup>[55]</sup>,而且可以通过内点法进行有效的求解。Wang 等人提出了基于半正定规划的稳健方向图综合算法<sup>[56]</sup>,其中不仅考虑了具有目标幅度响应约束的任意阵列方向图综合,而且考虑了方向图综合过程中不确定性存在时的稳健阵列方向图综合,并分别利用半正定规划进行了有效的求解。

### 1.3.3 约束迭代方向图综合方法

Tseng 和 Griffiths 提出了一种算法,用最小输出功率的方法来迭代旁瓣峰值上的约束<sup>[45]</sup>。换言之,该算法在一系列旁瓣峰值约束的条件下计算阵列权值,以使阵列对于均

匀分布点源的响应功率最小。这一算法非常易于应用,不过可能会产生某些约束的线性相关。一旦产生了这种情况,约束矩阵可能会病态化,就必须删去一些约束。但是,删去这些约束会导致对旁瓣峰值控制的缺损,这是不希望看到的。Guo 等人提出了基于线性约束最小方差准则的任意阵列天线方向图综合方法(LCMV-PS)<sup>[57]</sup>。相比于传统的矢量加权方法,该方法具有较小的迭代次数以及较好的收敛性。

### 1.3.4 自适应阵列方向图综合方法

方向图综合的另一个途径是采用自适应阵列理论。在一个自适应阵列中,当某一方向的干扰增强时,该方向上的旁瓣响应就会减弱,干扰功率电平的变化将导致旁瓣相应电平的变化。利用这一特性,可以通过设置假想干扰或干扰机在方向图综合中达到想要的旁瓣控制。Sureau 和 Keeping 采用自适应天线技术来综合圆柱阵列的方向图<sup>[46]</sup>,假想干扰机功率随期望的旁瓣电平而变化。Ma 和 Griffiths 在同一时期研究了相似的方法<sup>[47]</sup>。尽管他们实现了一定的旁瓣控制,但是并没有针对调整干扰机功率来使旁瓣功率达到要求这一特性而提出系统化的方法。Dufort 提出令噪声功率谱为期望方向图功率的倒数,通过将输出噪声功率最小化、输出信噪比最大化来求得阵列权值<sup>[48]</sup>。然而,他的方法并没有直接给出综合方向图中旁瓣控制的方法。为了改进旁瓣控制,Olen 和 Compton 在 1990 年提出了一个著名的天线方向图综合算法<sup>[49]</sup>。与 Dufort 的方法相比,Olen 和 Compton 利用递归过程以获得用来产生期望旁瓣性能的干扰频谱。在这一算法中,提出了旁瓣控制的系统化方法,其中的迭代由期望方向图和综合方向图之间在旁瓣区的差异来驱动。然而,在 Olen 和 Compton 的算法中主瓣仍不能确定,因此,主瓣仍未定型。而且,这种方法的计算很复杂,因为每次迭代要计算大量的外部值。Zhou 提出了三种天线方向图综合算法,称为迭代加权最小平方算法<sup>[50]</sup>。该算法克服了约束迭代、二次方程规划、Olen 和 Compton 所提算法的缺点,但也存在着收敛速度慢、迭代中需要确定主瓣位置和迭代系数以及算法中的人工选择依赖于使用者的经验等缺点。

### 1.3.5 极小极大方向图综合方法

在实际中低旁瓣的阵列方向图通常令人感兴趣,一种重要的方向图类型就是极小极大方向图,在其中旁瓣电平的最大值被最小化。Dolph 发表了一篇著名的论文,文中他将天线方向图定为切比雪夫多项式,以获得均匀线性阵列的当前分布。结果方向图有均匀的旁瓣,这在某种意义上是最优的,即主瓣波束宽度固定,旁瓣电平最低。然而 Dolph 的方法只适合应用在均匀间隔的线性阵列上。

对于非均匀的任意阵列,必须另做努力。Ma 提出了一种极大极小方向图综合的扰动方法<sup>[47]</sup>。在每次迭代中,综合方向图对不同旁瓣峰值的下一响应值都做要求,不同单元权值的变化量是通过求解一系列同步代数方程来得到的。Ma 的方法是否成功很大一部分取决于下一要求的权值,而这些权值没有具体的定义。这些值通常来自于实验误差或人工循环,无法保证令人满意的结果。而且,这一方法中的方向图函数只有在天线设置有特殊要求的情况下才能方便地用数学式表达,例如对称线性阵列。

James 提出了一种迭代算法<sup>[51]</sup>,将目标问题建模为旁瓣最大值最小化,并加以一系列约束,以保证在视角方向和半功率点的响应值为期望值。每次迭代都做一阶线性近似,用



估算梯度向量来求解权值向量。Schjaer - Jacobsen 和 Madsen 也提出了一种相似的方法, 所不同的是需要最小化的值函数是期望方向图与实际方向图之间不同点的最大差值<sup>[52]</sup>。P. Y. Zhou 提出了以 IWLS 综合技术为基础的新的极大极小方向图综合算法<sup>[50]</sup>。与其他的极大极小综合算法不同的是, 这一算法既不需要实验误差调整过程, 也不需要方向图函数, 计算单元都以矩阵形式精确排列, 便于计算机编程。

### 1.3.6 具有较高辐射效率的方向图综合方法

当天线阵列用于发射时, 就要求有一定的辐射功率电平, 那么就要有相当的发射功率, 或实现消耗功率到辐射功率的转化。一个高性能的阵列方向图并不一定能保证期望的辐射效率。换言之, 一个看起来很不错的阵列方向图, 可能辐射效率非常低, 几乎没有任何功率发射出去, 阵列的输入功率大量转化为阵列单元的消耗功率。这通常是由于阵列间隔太紧或阵列的方向性太强造成的, 这就是所谓的超增益阵列。有几位研究人员提出过阵列综合的高辐射效率综合方向图问题。Lee 和 Lo 在将阵列方向性最大化的优化过程中采用了二次约束<sup>[53]</sup>。尽管他们的方法达到了一定的辐射效率和期望的方向性, 但是阵列方向图仍然未确定, 因为最大化方向与期望方向图未完全吻合。Dawoud 和 Anderson 提出了以多项式优化为基础的方法<sup>[54]</sup>, 在综合阵列中获得了高辐射效率, 然而他们的方法只能用于均匀线性阵列, 任意阵列的高辐射效率方向图综合问题仍需进一步的关注。

近几年, 有关阵列方向图综合的研究方法非常多, 而相关的研究文献也不胜枚举。但是, 综合分析近几年的方向图综合研究成果可以发现, 主要研究方向分为两大类: 一类为传统的矢量加权方法<sup>[42, 50, 56-58]</sup>, 而另一类为矩阵加权方法<sup>[59]</sup>。其中也提出了利用智能计算方法来提高最优加权矢量的计算效率, 如基于遗传进化算法和粒子群最优化算法<sup>[58, 60-62]</sup>, 以及基于傅立叶变换和树状搜索算法的快速方向图综合方法<sup>[63-65]</sup>。虽然近几年也提出了许多用于大型阵列、宽带阵列的方向图综合方法<sup>[66-68]</sup>, 但是具有一定方向图约束条件和克服阵列误差的稳健方向图综合算法<sup>[69-72]</sup>以及有关仅相位加权的阵列方向图综合算法非常少<sup>[73]</sup>。目前这些算法主要致力于在给定阵列参数条件下实现向目标方向图的无限逼近以及如何有效实现算法的快速收敛, 即降低算法的运算量。

## 1.4 本章小结

本章主要对稳健自适应波束形成算法进行了简单的综述。由于稳健自适应波束形成是当前阵列信号处理的研究重点和热点, 也是阵列信号处理中的基础研究内容, 因而其具有广泛的应用范围, 尤其在雷达、通信、声呐、声学、天文、地震以及医学成像等领域, 对于国防军事和国民经济建设等有着非常重要的意义。因此, 当前国内外对稳健自适应波束形成技术都非常重视。尽管该技术已经取得了可喜的研究成果, 但还存在许多值得深入研究和思考的问题。

## 1.5 参考文献

[1] Capon J. High resolution frequency - wavenumber spectrum analysis. Proc. IEEE, 1969, 57: 1408 -