中学数学教学导论

几　何

张永顺　编著

人民教育出版社

中学数学教学导论

几　　何

张永顺　编著

人民教育出版社

（京）新登字113号

中学数学教学导论
几　何
编著　张永顺
责任编辑　康合太
●
人民教育出版社出版发行
新华书店总店科技发行所经销
北京联华印刷厂印装
●
开本850×1168　1/32　印张11.25　字数270,000
1991年10月第1版　1992年5月第1次印刷
印数 1—1,370
ISBN 7-107-10853-1
G·2441　定价4.60元

前　言

当前多数中学数学教师已达到或接近“专业合格证书”的水平，他们希望用已学到的某些高等数学的知识去指导自己讲授的中学数学教材(以下简称“教材”)，从而进一步提高专业素质和教学质量.教育行政部门也积极准备开展中学教师的在职继续教育.为了适应这个新形势的需要，我们编写了《中学数学教学导论》从书.这套丛书共有四册:《代数I》侧重于经典代数，《代数II》侧重于概率统计,《几何》侧重于古典几何,《数与函数》侧重于实数集合与函数的有关内容.这四册书的内容基本上覆盖了“教材”的内容.

这套丛书是中国电视师范学院播放的“中学数学教学导论”课录像带的文字教材.它同时可作为各类高师院校举办的中学数学教师培训班、进修班等教学用书,也可作为广大中学数学教师自学教材或教学参考书.

我们遵循学用结合和学以致用的编写原则，用某些高等数学的基本内容、思想和方法指导“教材”,帮助中学数学教师,特别是广大的初中数学教师,以较高观点认识“教材”和把握“教材”,从而提高教学能力和教学质量,为基础教育服务.

我们以师专数学专业几门重要基础课为起点，同时也考虑到当前广大初中数学教师的专业现状.为了帮助他们克服学习这套丛书的困难,不仅在文字叙述上力求通顺易懂，使其具有可读性,

而且还简要地引录了某些基础课的内容，使其便于自学．每章或每节力求从“教材”提出问题，然后用高等数学的内容、思想和方法作细致的分析和探讨，从而或知识范围扩大了，或理论严格了，或孤立的内容联系了起来，或司空见惯的问题有了新意，或引出了新课题，等等．由于从“教材”提出的问题升华了，自然就能达到较为深刻理解“教材”的目的．

数学教育有不同的层次．我们认为培养具有现代数学思想，并能用现代数学思想指导“教材”和教学的中学数学教师，是高师院校数学专业教改的重要课题．尽管这套丛书距用现代数学思想指导“教材”还有很大距离，但是我们愿意在这套丛书的基础上，进一步探索这个重要课题，与从事高师数学教育的同志们共勉．

这套丛书引用的“教材”是人民教育出版社出版的初级中学课本《代数》第一～四册，《几何》第一～二册及高级中学课本（甲种本）《代数》第一～三册，《立体几何》，《平面解析几何》与《微积分初步》．

人民教育出版社、中国电视师范学院和东北师大电教中心为组织出版这套丛书给予巨大支持．每册书的责任编辑给予很多具体指导和帮助，审查加工又付出了辛勤劳动，在此对三个单位和责任编辑一并表示深切感谢．

我们编写这套丛书尚属探索，各册的编写风格也不尽相同，缺点，甚至错误在所难免，恳请读者不吝赐教．

编　者

于长春东北师大数学系．

1991.5.

目　录

第一章 绪论

一 中学几何的对象和特征[1]

1.1 几何学和它研究的对象

1. 几何和几何对象.

几何学是一门源远流长,多姿多彩,硕果累累的数学分科. 在整个数学发展的进程中,一般说来,几何学总是走在其他各学科的前面, 扮演着开路先锋的角色. 例如: 在数学各分支学科的形成上, 欧几里得《几何原本》是最先形成的数学科学体系; 在数学思想的突破上,解析几何以及非欧几何的产生,都可以称得起是数学思想上的重大突破和革命,前者导致常量数学到变量数学的转变,后者导致向空间多样性的转变;在科学方法论的创建上,公理化方法的产生,坐标方法的产生,都是从几何学开始的. 因此几何学是数学领域里一门极为重要的学科.

"几何"是一个翻译名词, 是我国明朝的数学家徐光启(公元1562～1633年)翻译欧几里得名著《几何原本》时首先使用的, 英文为"Geometry", 是由希腊文"Geometria"演变而来的. 按"Geometria"的字义分析,"Geo"的含义是"土地", "metria"的含义是"测量",合起来可译为"测地术". 实际上,几何学的产生确实

[1] 本书所说的中学几何是指人民教育出版社出版的初级中学课本《几何》第一、二册和高级中学课本《立体几何》(甲种本).

与土地测量有关.

几何学研究的对象是什么呢？关于这个问题不是简短的几句话就可以说清楚的.

首先看一看现行初级中学课本《几何》第一册的引言中，关于几何学研究对象的提法："在生产建设和日常生活中，我们常常需要研究物体的形状、大小和位置关系. ……在'几何'里，只研究物体的形状、大小和位置关系，而不考虑物体的其他性质."又写到："对于一个物体，当只研究它的形状、大小而不考虑其他性质时，我们就说它是几何体，简称为体.""体是由面围成的. ……面和面相交于线. ……线和线相交于点.""点、线、面或若干个点、线、面组合在一起，就成为几何图形."最后指出："在我们将要学习的几何里，只研究在同一平面内的图形——平面图形." 推而广之，立体几何就是研究立体图形了.

中学几何引言中这一段话，概括地指明了：

(1) 中学几何的研究对象是几何图形，它们是点、线、面和由点、线、面组合而成的其他图形；以及图形和图形间的关系(性质)；

(2) 几何学的对象的客观原型是客观世界的物体和关系；

(3) 几何对象是抽象化和理想化的概念.

应当指出，这种对几何对象的描述只是一种初步的认识，或者说属于较低层次的概念来源的抽象化阶段.

为了进一步认识几何对象，下面再看一看恩格斯的提法. 19世纪下半叶，恩格斯曾对古典数学给出一个精辟的论断："纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系，所以是非常现实的材料.""但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式与关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点，没有厚度和宽度的线、a和b

与x和y,即常数与变数".[1]

恩格斯的这个论断是指数学而言. 可以这样理解: 几何学的对象侧重研究现实物质世界的空间形式,而算术、代数和函数等则侧重研究现实物质世界的数量关系. 恩格斯的这个论断指明了:

(1) 几何学的对象主要是研究现实世界的空间形式;

(2) 几何对象来源于客观世界;

(3) 几何对象是抽象化和理想化的概念.

对照上述两种提法,可以看出两者基本上是一致的,都谈到了几何对象的现实性以及抽象化和理想化. 但前者指的是初等几何对象,而后者指的是一般几何对象,包含更深刻的内容.

2. 几何对象的抽象化和理想化.

在人类的实践活动中,周围的许多事物经常地、反复地引起人们的感觉,形成印象,开始对物体的形状有了初步的认识; 经过由此及彼的分析对比,从个别、特殊到一般的综合归纳, 抛开具体的物体,抛开它们的化学的、物理的等等性质,逐步捉住表现形的本质属性,从各种形状的一般特征中,抽象出几何图形, 于是就有了没有大小的点,只有长度而没有宽度的线,只有长度和宽度而没有厚薄的面,以及由点、线、面组合而成的几何体等等.这种从特殊到一般,从具体到抽象的过程,是人类对形的认识的飞跃, 这样才有了几何图形,才能够从纯粹的状态中研究空间形式与关系,从而产生了几何学.

例如,"平面"是中学几何中的重要概念. 它就是人们对客观存在的水平面、平滑的石头面以及一切具有平滑的物体表面等等形状中,抓住了它们所共有的平滑、没有厚度、可以任意延展等所占有的空间形式上的特征, 抛开了它们所具有的化学和物理等等性质, 于是抽象出"平面"概念. 这时它已不是某一具体物体的表

[1] 恩格斯著《反杜林论》中译本,人民出版社 1970 年第1版第 35 页.

面，而是一个抽象化、理想化的思维对象，即概念化了．随着实践的继续，人们对“平面”的认识也不断地深化，更加认清了“平面”的本质属性：

直线有两个点在平面上，则直线上的点就在平面上；

两个平面如果相交，则必交出一条直线；

过不共线的三个点，有且只有一个平面．

此外还有其他属性，这样就把平面和曲面区别开来，“平面”的内涵也就逐步明确起来．

上述几何对象的抽象过程，可以称之为**概念来源的抽象**，是比较低层次的抽象．一般人对几何图形的理解仅限于此，中学几何也高不出多少．前面把初中几何课本的引言中对几何对象的描述说成是初步的和较低级的抽象化，就指此而言．

几何学的进一步发展，几何对象也就从低层次的抽象向更高层次的抽象发展，它们已经不是概念来源的抽象，而是在这个基础上的进一步的抽象，或者说是抽象化的抽象化．例如解析几何是用代数法研究几何性质，把形和数完全融合为一体，用有序的实数组表示点，即点的坐标，用方程表示直线、平面或其他曲线和曲面．又如形式公理化的几何学，把点、直线、平面看做是满足决定某种几何结构的公理系统的任何“事物”，即任何的对象．这就像代数里的抽象群一样，群(集合)的对象可以是满足群的条件(公理)的任何对象，如点、数、变换、置换等等．现代的几何学，一般总是把几何对象看成是满足某种结构要求的集合．关于几何对象高层次的抽象化的问题，我们还要在以后的各有关章节中进一步叙述．

几何对象不仅是抽象化的而且也是理想化的．实际上，在现实的物质世界里，永远不会遇到没有大小的“几何的点”，不会看到没有粗细的“几何直线”，不会看到没有厚薄的“几何平面”，它们都是理想化了的，由它们组成的其他几何图形也是理想化了的．如

果没有理想化的几何对象，就永远也建立不起来现在的几何学，几何学也不会得到现代这样的发展.

球的客观原型总是凸凹不平的，研究这样十分复杂的曲面体，很难设想会得到现在的关于球的面积公式和体积公式. 只有理想化的球才可以推出现在的公式，而利用这个理想化的公式可以研究与球相近似的客观原型，如地球、太阳、足球等的面积和体积，虽然和原型相比会产生一些误差，但可以获得足够精确的结果.

以上所谈的几何对象是泛泛而谈的. 随着几何学的发展，出现了各种不同的几何学，如欧几里得几何学、罗巴切夫斯基几何学、黎曼几何学、仿射几何学、射影几何学等等，可以说是五花八门. 由于各种几何的结构和内容不同，它们所讨论的对象的意义和性质也有所不同.

在十九世纪以前所积累的几何知识和成就中，有两个原理(方法)曾对当时和后世几何学的发展产生过深远的影响，这就是公理化方法和德国数学家克莱因(F. Klein, 1849～1925年)提出的“变换群与几何学”的观点. 前者通过确定的公理系统确定几何学的对象，赋予几何学某种结构，通过不同的公理系统划分几何对象和不同的几何学. 例如欧几里得几何、罗巴切夫斯基几何和黎曼几何等等. 这一观点可以认为是用静的观点研究和划分几何. 关于公理方法和运用我们将在以后有关章节中陆续地、详细地进行讨论. 而克莱因的观点和方法是通过某个确定的变换群来确定几何学的对象和内容，即“某种几何的对象和内容是研究某变换群下的不变性质（包括不变量）的命题系统”，通过变换群来划分几何对象和不同的几何学. 这种观点可以认为是用动的观点研究和划分几何学. 例如，欧几里得几何是研究运动群(也称正交变换群或合同变换群）下的不变性质的几何学. 图形经过运动总是变成与它全等的图形，保持图形的结合关系、顺序关系、大小关系（图形的或度量

的)及连续性和平行性. 因此,运动群下的不变性质和不变量就是中学几何所研究的全部对象和内容. 此外，射影变换群确定射影几何学，仿射变换群确定仿射几何学，双曲度量群确定罗氏几何学,椭圆度量群确定黎氏几何学等等,由于变换群不同，这些几何的研究对象也不相同. 关于“变换群与几何学”的观点将在本书最后一章进一步介绍.

3. 现实原型和数学模型.

几何图形和几何关系来源于客观物质世界的各种物体和关系. 这些物体和关系称为几何图形和几何关系的现实原型. 从现实原型中抽象出来的理想化的几何图形和关系，已不再是客观物体和关系,而仅仅是从某一侧面反映现实原型的思维对象,也就是概念. 例如“直线”、“平面”、“棱柱”、“球”等几何概念.对这些概念的意义和解释，即赋予它们一定的数学性质和意义，广义地来说，这些解释都可以称为相关的现实原型的数学模型. 研究与原型相近似的、区别不大的客观实体都可以归结为研究这些几何图形,给出一定的解释.

分析上面曾经提出的，恩格斯关于数学研究对象和任务的提法应该包含两层意思:其一,是说现实世界的各种物体都占有一定的空间形式,即它们的形状和相互位置关系,抽象出来就是各种几何图形和几何关系,几何学的主要对象是研究“现实世界的空间形式…”,因此几何学的研究对象就是几何图形和几何关系;其二,是说几何学的任务是通过各种数学观点去认识和解释这些几何对象,小到对各个几何概念的局部认识和解释,大到对整个客观世界的空间形式的认识和解释. 就是说,要建立各种数学模型,局部的或范围更大的，用各种不同的数学知识和理论(当然主要是几何的)去认识和解释现实空间的形式和关系,建立和运用多种多样的数学模型去解决生活和生产当中的各种实际问题. 因此，我们说

恩格斯的提法具有更深刻、更广泛的意义.

例如，中学开设的平面几何是研究平面上的图形和性质的，是欧几里得平面几何的基础部分，通常称具有这些性质的这个平面为欧几里得平面，或欧几里得二维空间. 它就是解释“平面”的一个数学模型. 在这个平面上，平行线的理论满足欧几里得平行公理：“过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行”，根据这条公理可以推出“三角形的内角和等于二直角”等等. 通过实践验证，这个数学模型可以从某些侧面近似地反映和解释客观世界的一些现象，运用这些知识解决许多实际问题，这是大家所公认的。

再例如，罗巴切夫斯基平面几何和黎曼平面几何，也都是研究平面上图形性质的几何学，所研究的这个平面，前者称为罗巴切夫斯基平面，后者称为黎曼平面，它们也都是解释“平面”的不同数学模型. 但是，在罗氏平面上，平行线的理论满足罗氏平行公理：“过直线外任一点至少存在两条直线与已知直线不相交”，根据这条公理可以推出“三角形的内角和小于二直角”. 在黎氏平面上不存在“不相交的两条直线”，即满足黎氏平行公理：“过直线外任一点不存在直线与已知直线不相交”，根据这条公理可以推出“三角形的内角和大于二直角”.

欧氏、罗氏、黎氏三种平面，虽然都是解释“平面”的数学模型，但是它们所满足的平行公理是相互矛盾的，差异之大，令人难以置信. 这一事实足以说明数学模型的多样性和复杂性. 关于这一问题可作如下解释：在同一平面上，过直线外一点，仅有一条、或者有多条、或者根本没有直线与已知直线不相交，是这一具体问题中的三种可能性. 三角形的内角和等于、小于、大于二直角，也是定量分析的三种可能性. 公理本来是不加证明的几何命题，究竟承认上述三种情形的哪一种，取决于人们认识客观世界的程度. 人类祖先发现几何知识的时候，总是在手能摸得到，眼能看得见

的较小范围内获得的，因为当时的生活、劳动的条件只能这样.在小的范围内，两条平行线向一侧无论怎样延长，可以给人形成总不相交的印象.两条直线与另一直线相交，如果同旁内角之和小于二直角，即$\alpha+\beta<\pi$，人们确信，这两直线一定在同旁内角的那一侧相交.这就是欧几里得第五公设，它是最早的平行公理，后来才改用与之等价的、现在惯用的平行公理.在那样的历史条件下，在那样可能达到的认识水平上，欧几里得几何首先产生了.随着时间的推移，科学技术的进步，数学本身的不断发展，为新几何学的创立提供了思想、理论和方法上的准备，促进了人们更加深入的、多层次的、从更大范围去认识、去反映客观世界的多样的空间形式.于是在欧几里得几何产生2000多年以后，又先后产生了以罗氏平行公理和黎氏平行公理为特征的罗氏几何和黎氏几何，并且很快也得到了人们的公认，得到了应用.事实上，现实世界的空间形式是多样的，小至个别图形、局部空间，大至宇宙空间，因此通过模型对它们作出某些解释也应当是不同的、多样的.经过直线外一点究竟存在几条直线与已知直线不相交，取决于人们对客观世界空间形式的理解，是人们认识上的反映，是一个假设.实际上我们无法通过实验等具体的科学手段来验证究竟哪一种情形符合客观事实，因为点、直线、平面等几何图形本来就是理想化、抽象化的东西.建立数学模型的关键是它的合理性(无矛盾的、科学的)、实用性和现实性，具备这三条的模型就可以站得住脚.罗氏、黎氏几何学与欧氏几何学一样，都具有这三条属性，因此都是正确的，可以并存的.

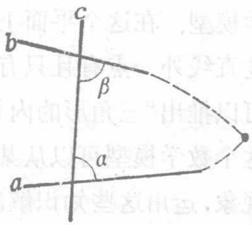

图 1-1

用赋予某种结构的集合来构造几何空间，是近代几何学普遍

采用的方法.如拓扑学、高维几何学等等，不仅导致几何对象的高层次的抽象化、研究方法的多样化，也导致数学模型的多样化和深刻化.

几何学和它的对象来源于客观物质世界的物体和关系，这就是前面所说的几何学的客观原型；而每一种经过抽象化、系统化的几何空间，都是人们经过各种努力创造出来的数学模型；这些模型是多样的，它们总要忽略客观现实的某些方面，而不能等同于所研究的客观现象，因此总是近似地、局部地、本质地反映客观现实，只适用于一定范围；随着几何学的发展，模型也在不断地精确化、复杂多样化，从而能更好地解释客观世界的许多新的方面，解决许多新的实际问题.

1.2　中学几何的基本图形和基本关系

前面提到过，中学几何的研究对象是几何图形和几何关系.它们是多种多样的，其中有少数的在整个几何体系中处于举足轻重的地位，是构成几何图形的基本元素和基本关系，必须充分予以重视，了解它们，掌握它们，这样才能加深对几何对象的认识，更好地进行几何学习和几何教学. 这里仅把中学几何的基本图形和基本关系作一简略地介绍，关于它们的公理基础和具体作用，将在第三章中详细讨论.

1.　基本图形.

现行中学几何课本中提到："点、线、面或若干个点、线、面组合在一起，就成为几何图形."这是指一般的几何对象而言的.中学几何只研究常见的、规则的几何图形.如由点、直线组成的直线形(直线、线段、射线、相交线、平行线、折线、多边形等等)；由点、直线、平面组成的立体图形(异面直线、相交的直线和平面，平行的直线和平面，平行平面，二面角，多面角，多面体等等)；此外还研究比较

规则的圆、球和其他旋转体(圆柱、圆锥、圆台). 它们有的可以看成点的轨迹，又全部可以看成是点、直线形绕直线或点旋转而形成的. 因此，点、直线、平面是中学几何里最重要、最基本的几何元素.

点 它是客观世界中位置的抽象，在几何中用它标记一个位置，线的一端等. 在这个意义下，点没有大小. 点运动而成线，如直线、圆等.

直线 直线是最简单、最常见的线. “一根拉紧的线、一张纸的折痕都给我们以直线的形象”. 直线是向两方无限延伸着的. 直线的部分可作为多边形的界，和多面体的棱. 直线没有定义，它的属性由相关的公理间接规定.

平面 平面是最简单的面. 平静的水面和镜面等都给我们以平面的形象. 平面的部分有长度和宽度，但没有厚度，并且可以任意延伸. 平面的部分可以作为多面体的界. 平面没有定义，它的属性由相关的公理来间接确定.

中学几何中的图形，一般说来都是由点、直线、平面按照一定的关系组合而成的，几何体就是其中一类重要的几何图形.

体是由面围成的，面和面的界是线，线和线的界是点，彼此相互联系，相互制约. 点、线、面依附于体而存在，它们按着一定的关系共处一个体中；而体由点、线、面组成，当它们组合的条件变了，一种体也就转化成另一种体，具有不同的形状，使几何体彼此区别开来.

例如，棱台的上底面变成一点时转化为棱锥，当上下底面全等时转化为棱柱，棱柱又可以转化为长方体和正方体等等. 这种相互联系和转化的看问题的方法，会给我们研究几何带来一些方便.

设正棱台的上、下底面的周长分别为 c'、c，斜高为 h'，那么它的侧面积随上底面的变化有如下关系：