



诺/贝/尔/经/济/学/奖/获/得/者/丛/书

Library of Nobel Laureates in Economic Sciences



连续时间金融

(修订版)

(上)

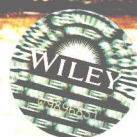
Continuous-Time Finance
(Revised Edition)



罗伯特·C·默顿 (Robert C. Merton) 著



 中国人民大学出版社





诺/贝/尔/经/济/学/奖/获/得/者/丛/书

Library of Nobel Laureates in Economic Sciences



连续时间金融

(修订版)

(上)

Continuous-Time Finance
(Revised Edition)



罗伯特·C·默顿 (Robert C. Merton) 著

郭多祚 杜两省 校

郭多祚 王远林 徐占东 译



中国人民大学出版社
· 北京 ·

序

一位伟大的经济学前辈曾经说过，虽然经济理论对于理解世界是有用的，但没有人会向经济理论家请教如何管理一家啤酒厂或者如何生产一个捕鼠器。今天，那位先哲也许不得不改变他的态度：经济学原理还真的对会计师或营销商有用，他们正在按照经济法则进行相应的管理。看似矛盾的是，现代金融理论作为经济分析中最优美而且最复杂的领域之一，它每天都被成千上万的统计观察所证实。当有人问如今的证券分析副教授：“小伙子，你那么聪明，怎么就没有富起来呢？”他会报之以大笑，作为华尔街高薪聘请的顾问，他一路奔向银行或是忙着去提供咨询。

在有鉴赏力的经济学家中，人们都知道罗伯特·C·默顿是专家中的专家，他是一个巨人，站在诸如路易斯·巴舍利耶（Louis Bachelier）、约翰·伯尔·威廉斯（John Burr Williams）、乔治·特伯格（George Terborgh）、凯恩斯（Keynes）、詹姆斯·托宾（James Tobin）、哈里·马科维茨（Harry Markowitz）、肯尼思·阿罗（Kenneth Arrow）、杰勒德·德布鲁（Gerard Debreu）、约翰·林特纳（John Lintner）、威廉·夏普（William Sharpe）、尤金·法马（Eugene Fama）、贝努瓦·曼德尔布罗特（Benoit Mandelbrot）以及无所不在的布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes）等一群巨人的肩上。[本杰明·格雷厄姆（Benjamin Graham）是巨人之林中另外一处的参天大树。]使默顿登峰造极成为具有拜伦风格学术大师的那个高峰，就是按照诺伯特·威纳（Norbert Wiener）和伊藤清（Kiyoshi Itô）方式形成的连续概率数学工具。过去曾经是复杂和近似的東西，突然变成了优美而简单的真理。

本书向那些具有完美数学背景的读者详细阐述了有效市场资产定价的基本要素，其中的许多章节来源于已经成为经典文献的论文，有些章节是为本书新写的，它们开辟了新的天地。

我很自豪自己能在默顿建立声誉的征程中出现。那时，一个有电子工程学士学位并成为加州理工学院应用数学专业研究生的年轻人决定要做一个经济学家，遂向几个研究生院申请读经济学。据他说，除了麻省理工学院，别的大学都拒绝了他。说来也奇怪，麻省理工学院为他提供了研究职位！他跟我共事而我也很高兴和他在一起。学术生涯中的一大乐事，就是看到年轻学者的发展：先是成为同事，然后合作写论文，接着，最令人高兴的是这样一种奇异景象——水平和你差不多的这个同事突然加速，跑到你的前面去了，就像你在你人生跑道的拐点处能够做的那样。动物科学家中的人类学研究员罗伯特·K·默顿（他也是罗伯特·C·默顿喜欢的导师），将会把这个故事加到他的案例中，来研究科学到底是怎么发展的。

对于读者，我再一次说：

祝您好胃口！

保罗·A·萨缪尔森
于麻省理工学院

前 言

本书从代理人可以在连续时间中调整其决策这样一个模型出发,发展了金融数学和金融经济理论。时间和不确定性是影响金融经济行为的核心要素。也正是时间和不确定性二者相互作用的复杂性,为金融研究提出了智力上的挑战并使之激动人心。正确分析二者相互作用的影响,通常需要复杂的分析工具。实际上,高深的数学训练已经成为本领域研究者必备的条件。然而,尽管它的数学很复杂,但金融理论还是对金融实践产生了直接的、巨大的影响。只要我们将当前的实践与 20 年前的实践比较一下,就足以发现有效市场理论、投资组合选择、风险分析以及未定权益定价理论对货币管理、金融中介机构、投资银行、公司金融以及资本预算程序所产生的冲击;人们甚至还能发现金融理论对法律问题产生的影响,例如涉及资产评估的案件、对受管制行业收益率的听证以及对监管那些信托机构“精明人”行为的法律的修订;金融报刊也经常用纪实材料,来反映在当前资本市场上金融创新的浪潮中,金融理论所起的作用。这些可以参阅伯恩斯坦(Bernstein, 1992)详细的研究著作。金融理论对实践产生的影响将会持续下去,这一点可以从最著名的管理学院所开设的课程中找到证据,这些管理学院经常要求 MBA 学生做一些基本的金融研究方面(包括数学)的论文。虽然这种情况并非金融学所独有,但是内在的智力兴趣与外在的实践应用相结合,是金融学研究中独特且流行的主题。

过去的情况可不是这样。在 20 世纪初,金融学仅仅作为一个孤立的领域来研究;在随后的 40 年里,它几乎就是一个集中在制度和法律问题上的描述性学科。甚至就在二三十年以前,金融理论还只是轶闻趣

事、经验规则和核算数据的集合，分析中最复杂的工具也不过是贴现值，学术争论的主要问题还集中在是用现值还是用内部收益率来对公司的投资项目进行排序。此后开始的从概念性集锦演进到以科学的实证研究为条件的严格的经济理论，当然归功于许多人的工作，但是多数人都一致认为阿罗、德布鲁、林特纳、马科维茨、米勒（Miller）、莫迪利亚尼（Modigliani）、萨缪尔森、夏普和托宾等人是这一转变过程中的先驱者。

鉴于本书从头至尾都运用连续时间模型的分析方法，把该模型作为金融理论的综合体和分水岭来评价它的背景也许是合乎逻辑的。1900年在巴黎大学文理学院，路易斯·巴舍利耶写了一篇关于投机理论的重要论文，该论文标志着随机过程的连续时间数学以及期权和衍生证券定价的连续时间经济学随之诞生了。尽管在半个多世纪里，巴舍利耶的研究在经济学和金融学文献中默默无闻，而且从今天的视角来看，他的经济学和数学也是有缺陷的，但是从巴舍利耶到现代连续时间金融之间的联系是直接的、不容置疑的。

过去的20年里，连续时间模型已被证明是金融学发展中的一种用途广、效能高的工具。尽管它在数学上较为复杂，但是与对应的离散时间模型相比，通常连续时间模型正好能够提供足够多的特征，以产生更精确的理论解和更精练的经验假设。举一个合适的例子，我们只需考虑一下最早发表于1969年、在本书中排在第4章的投资组合选择的连续时间模型的早期版本。在20世纪60年代末，金融学中最基本的资本市场模型为马科维茨和托宾的单期均值一方差模型及其均衡形式，以及夏普-林特纳-莫辛资本资产定价模型。尽管这些模型很适宜于在实践中使用，并且颇具简单之美，但是在更广泛的经济研究群体中的使用却相对有限，主要原因是经济学家普遍认为，除非资产价格是高斯概率分布或投资者的偏好为二次的，否则均值一方差标准与广为接受的冯·诺伊曼-摩根斯顿（von Neumann-Morgenstern）选择公理不一致。而且，价格的正态分布是一个相当特殊的条件，它违背了金融资产所有者的责任是有限的这个最基本的条款。此外，二次效用与观察到的行为总的来说是不一致的。但是，我们可以通过对连续投资组合修正之间的时间间隔的确切说明，来替代一般的“单期”。资产价格为对数正态分布的连续时间模型（它确实满足了有限责任）能够产生最优投资组合原则，这些原则在形式上与均值一方差模型和资本资产定价模型所规定的原则是相同的，而且这个结论对于一般的冯·诺伊曼-摩根斯顿偏好仍然成立。

这样，尽管有些自相矛盾，但引入更现实的动态跨期模型可以使从古典静态模型中得到的最优原则看起来似乎更合理。在这个意义上，连续时间模型是金融学静态和动态模型的分水岭。我们在下面的章节中将会看到，连续时间分析表明，金融理论中的其他经典支柱——阿罗-德布鲁完全市场模型和莫迪利亚尼-米勒定理——也远比人们料想的更为坚固。

在重新确认旧观点的同时，连续时间模型也提出了新观点。布莱克和斯科尔斯的原创性贡献就是一个最好的例子。实际上，从他们的论文发表的那一天起，期权与公司负债定价领域的主题就研究完了。在布莱克和斯科尔斯的论文关闭该领域基础研究大门的时候，它同时也打开了一扇新的大门：应用和实证研究，以及为新的称作未定权益分析的金融学分支奠定基础。未定权益分析的应用范围，就像第4篇表明的那样，是对复杂的金融证券定价到公司资本预算和战略决策的评价。我们还将发现，在金融中介理论中，它也占有重要的地位。

正如本书中出现的上千个方程所证明的那样，金融学是一个高度分析性的学科，而连续时间分析更是如此。实际上，连续时间金融模型的数学方法，包含了概率和最优化理论的某些最完美的应用。当然，在科学中完美的，并不一定也是实用的；而在科学中实用的，也并不全是完美的。但在金融学中两者都具备。尽管连续时间模型的数学方法看起来比较深奥，但它还是找到了进入金融实践主流的路径。它对实践最明显的影响是在金融工具的定价和套期保值领域，该领域在过去的10年中经历了现实世界的爆炸性变革。事实上，在从业的金融机构中，正在进行许多运用连续时间模型的应用研究。

过犹不及，连续时间范式的应用也是如此。它强有力的分析方法很容易诱导人们过分注重数学的精确性，其可悲的结果是对伴随着数学的大量经济学只研究了一点点。混淆数学方法的精确性和经济意义的精确性，只重视正规的分析技术而不同样重视它所暗含的经济假设，则会导致实体的错位。在第3章中，我们就是牢记这一点，来发展连续时间模型的数学方法和基本经济学假设的。我们将重点放在诸如伊藤微积分这样的数学概念上，它们对于连续时间分析在金融学中的应用是必不可少的。由于仅仅把初等概率论和普通微积分作为本章的预备知识，所以本章牺牲了一些数学上的精确性和一般性，以换取更大的易学性以及我所希望的清晰性。同理，第4章随机动态规划方法的推导也只需要这些预备知识。对于那些喜欢本学科较宽广、更正规处理方法的读者，我们当然也提供了大量的数学参考书目。



和数学一样，数理经济学在本质上也非常重视模型和表达式的简洁。但如果走极端，过分强调简洁性，无意识中就会通过删去制度背景和模型的解释从而减少了大量丰富的分析，这些分析从数学的角度看似似乎是多余的，但在经济学领域里却一点也不多余。必须承认，本书的模型推导和分析中仍有过于简洁这种特殊情况。但是在有关金融中介和一般均衡理论等章节中，我动手补充了省略掉的东西，把相当多的在金融理论中新古典经济学处理方法通常不涉及的制度解释也包括了进来。如果我在某些地方因为试图避免过分简短从而偏向了啰唆，希望能够得到大家的谅解。

本书的核心内容是以前公开发表的 15 篇论文和 1 篇广为流传的工作论文，写作时间从 1969 年到现在。我根据主题而不是根据原来的发表日期，将这些文章组成了 6 个部分。在重印这些论文时，我对其中的语言作了少许修改，改正了印刷错误和技术错误，但没有指出修改的地方。注释中带星号的为新增的注释，它们或表示较大的修改，或表示对本主题后来研究成果的引用。公开出版的参考书目替代了原来引用的当时尚未出版但后来出版的手稿和工作论文。每篇论文的原始符号仍然保留，因此不同章节的符号并未完全统一。因为每一章大体上都是独立的，所以会出现重复分析，或许一些读者会发现这些重复是强调理论中的重要概念的一种有用形式。

不用说大家也知道，我在一开始写这些论文时，并没有打算将它们作为独立成书的连续时间金融理论的一个章节。因此，要说这种形式的综合是一个不受约束的最优设计，那将是愚蠢的；论文发表的时间先后本身就规定了这个主题的发展轨迹，它更接近其历史的演进而不是最优的形式。尽管如此，我还是希望读者能够从论文的选择和各篇的组织上发现逻辑的一致。为了内容的衔接和范围的扩展，我在重印的核心论文中增加了 5 篇，它们是专为本书写的，包括简短的具有导论性质的第 1 章，以及关于最优消费和投资选择问题、期权定价、金融中介和一般均衡理论这 4 章。为了与核心部分相一致，这几章同样也遵循了经济学杂志的那种独立论文自成体系的风格。本书还增加了关于跨期资本资产定价和未定权益分析的一些新材料，这些材料并不是作为独立的短文出现的，而是为了保持主题衔接，作为新的一节放在第 13 章和第 15 章有关问题的原始论文中。

很多经济学家和数学家都对连续时间金融理论的发展做出了贡献。只要是知道的，我都将其列入每章正文和注释的参考文献中。毫无疑

问，也有一些经济学家的贡献应该被引用而没有被引用，在此一并表示歉意并致谢。即使文献的引用是完全的，也不足以说明这些年来引导我产生本书这些思想的所有来源。

罗伯特·C·默顿
于哈佛大学

目 录

第一篇	连续时间模型的金融基础和数学基础	1
	第 1 章 现代金融学	3
	第 2 章 投资组合选择和资本市场理论导论： 静态分析	15
	2.1 引言	15
	2.2 单期投资组合选择	15
	2.3 单期模型中证券和投资组合的风险度量	22
	2.4 张成定理、分离定理和共同基金定理	29
	第 3 章 连续时间模型的数学和经济学假设	53
	3.1 引言	53
	3.2 “无稀有事件”的连续样本路径过程	60
	3.3 存在“稀有事件”的连续样本路径过程	73
	3.4 存在“稀有事件”的非连续样本路径过程	77
第二篇	连续时间模型中的最优消费和投资组合选择	87
	第 4 章 不确定情况下的投资组合选择： 连续时间情形	89
	4.1 引言	89
	4.2 动态模型：预算方程	89
	4.3 两资产模型	92
	4.4 常相对风险厌恶	95
	4.5 动态行为和遗赠评价函数	97
	4.6 无限期界	99

	4.7 投资组合最优策略和消费最优策略的 经济解释	101
	4.8 扩展到多资产的情形	105
	4.9 常绝对风险厌恶	106
	4.10 模型的其他扩展	107
	第5章 连续时间模型中的最优消费和投资 组合准则	110
	5.1 引言	110
	5.2 关于伊藤过程	111
	5.3 资产价格动态和预算方程	112
	5.4 最优消费和投资组合准则: 最优方程	115
	5.5 对数正态价格和类似于托宾-马科维茨 均值一方差模型的连续时间分析	118
	5.6 对于一类特殊效用函数的显式解	123
	5.7 非资本收益收入: 工资	129
	5.8 泊松过程	130
	5.9 几何布朗运动的替代价格期望	136
	5.10 结论	146
	第6章 最优消费理论和投资组合选择的 进一步发展	150
	6.1 引言	150
	6.2 替代随机动态规划的考克斯-黄方法	151
	6.3 消费带有非负约束的最优投资组合准则	163
	6.4 一般性偏好及其对最优投资组合需求的 影响	178
第三篇	认股权证和期权定价理论	193
	第7章 效用最大化的认股权证定价完全模型 (与保罗·萨缪尔森合著)	195
	7.1 引言	195
	7.2 现金一股票投资组合分析	195
	7.3 萨缪尔森 1965 年模型概括	200
	7.4 平均股票收益的确定	202
	7.5 认股权证持有量和价格的确定	203
	7.6 题外话: 一般均衡定价	205
	7.7 效用最大认股权证定价: 重要的初始情形	206

7.8	显式解	208
7.9	永远不转换的认股权证	210
7.10	永久认股权证的精确解	212
7.11	说明性例子	215
7.12	认股权证收益优于普通股票收益的证明	218
7.13	结论	220
	附录 7A	221
	附录 7B	226
第 8 章	理性期权定价理论	232
8.1	引言	232
8.2	理性期权定价的约束	233
8.3	股息和变化的执行价格的效应	243
8.4	理性看跌期权定价的约束	249
8.5	采取布莱克-斯科尔斯方法的 理性期权定价	253
8.6	布莱克-斯科尔斯模型的另外 一种推导方法	255
8.7	包括股息支付和执行价格变化的扩展模型	263
8.8	美式看跌期权的评价	266
8.9	“下跌出局”看涨期权的评价	268
8.10	可赎回的认股权证的评价	270
8.11	结论	273
	附录 8A	273
第 9 章	标的股票收益不连续条件下的期权定价	281
9.1	引言	281
9.2	股票价格和期权价格动态	283
9.3	期权定价公式	288
9.4	实证难题的可能答案	293
	附录 9A	296
第 10 章	期权定价理论的进一步发展	300
10.1	引言	300
10.2	考克斯-罗斯“风险中性”定价和二项式期 权定价模型	303
10.3	期货期权定价	314



第一篇

连续时间模型的 金融基础和数学 基础

第1章 现代金融学

通常认为，现代金融学的研究范围包括公司财务管理、家庭财务管理、金融中介、资本市场和微观投资理论，以及许多其他不确定性经济学。从它对公共财政、产业组织和货币理论等经济学分支学科的影响来看，现代金融学研究领域的边界具有渗透性和灵活性，这种情况与其他学科相类似。^[1]由于现代金融学研究范围广，学科的界定不清楚，所以有大量关于现代金融学理论和实证方面的文献。不仅如此，在理论研究和实际应用之间，还存在着广泛的相互影响，这是金融学研究的特点。虽然本书的名称中加上了“连续时间”一词，但这并没有从深度和广度上影响它的综合性。

我们知道，综合是对复杂事物从总体上进行的抽象。由于金融研究的涉及面广、边界模糊，而我们的研究只能在有限的几个方面展开，所以在抽象的过程中必须作出严格的选择。此外，比较劣势原则使我们避开对实证和应用方面的详细讨论，所以我仅对一些重要的主题用注释和评注的方式作简单的介绍。尽管理论研究是本书的核心，但仍需要严格的筛选。集中抽象一部分理论要比总结整个理论好一些，由此产生了从连续时间模型的角度选取金融理论的做法。这样，通过上面的一般性介绍，我对本书所讨论的专题作了概括性的论述。

金融理论的核心是研究在不确定的环境下，如何在时间上最优配置资源，以及分析经济组织在配置过程中的作用。金融学中的主要组织有家庭、厂商(business firm)、金融中介和资本市场。新古典经济学的传统做法是，把家庭、偏好和禀赋作为金融理论的外生因素，但这种传统做法并未扩展到对其他经济组织和机构的分析中，因为这些经济组织和



机构的服务功能被视为已经存在的，因而它们是金融理论的内生因素。这样，家庭的最优理财行为来自个人的和外生的特定偏好函数，这些函数把每个家庭一生中消费和遗赠的所有可供选择的方案，按照重要性排列成为备选决策方案序列。与此不同的是，厂商和金融中介机构的最优财务管理决策，是按照金融经济系统内那些组织的功能所决定的标准来制定的。

在本书的模型中，厂商的基本功能是拥有实物（“真实”）资产和生产产品的技术。厂商拥有的实物资产，既包括有形资产，例如机械设备、工厂和土地；又包括无形资产，例如不断演化的组织结构、商标和专利。企业通过发行金融证券来融资购买这些资产，例如向家庭或者金融中介发行股票和债券。编制企业资本支出预算和作出融资决策的管理者，被看做目前股票拥有者的代理人^[2]；管理的主要目的，是为了股东利益的最大化而运营企业。^[3]

无论是在理论还是在实践中，金融中介经常起着家庭和厂商代理人的作用，并提供包括资金转账等在内的交易服务。但在本书的分析中，它们的主要职能是作为委托人并创造金融工具，这是由于受到交易规模的限制和交易期限的特定性，这些金融职能在有组织的金融市场中无法通过直接交易来实现。活期存款、商业贷款、向私人发行公司证券、抵押、共同基金、年金和范围广泛的保险合同，它们都是在“现实世界”里由中介机构提供的金融产品。提供这些产品的机构有商业银行、投资银行、储蓄机构和保险公司。虽然在本书中，有些具体的产品和机构是用于描述的，但本书的重点是研究金融中介的经济职能以及它们所提供的产品，而不是它们独特的机构形式。

金融中介机构与厂商一样，是通过向投资者发行股票和债券来筹措运营资本的。因此，理论上认为，中介机构与厂商管理者的基本目标是相同的，那就是最大化目前股东的利益。但是，与厂商又有所不同，中介机构仅仅持有金融资产，更重要的是，它们在出售产品的同时也创造了新债务。^[4]实际上我们知道，在现实世界中，保险公司和银行的巨额负债都是由客户承担，而不是由它们的投资者所持有。由于中介机构特殊的经济职能以及这个显著的特点，使得关于中介机构的管理和规制行为的理论不同于厂商理论。

资本市场是有组织的金融市场的总称，它的目的是交易标准证券，例如股票、债券、期货合约和期权。^[5]资本市场提供了把家庭、厂商和中介机构的财务活动联系起来的主要外部环境。通过在资本市场上的交

易活动，企业可以筹集到进行投资所必需的资金，家庭为了将来的消费也可以有效地分配他们的储蓄存款。在基本现金流循环中，企业向家庭发行证券，并且使用得到的资金为生产经营购买实物资产。然后，企业支付红利和利息，承诺用经营中得到的现金回购家庭的证券，以现金形式回报家庭部门。该现金流中的一部分用作当前消费，剩余部分通过资本市场的再循环返回厂商，作为下一步的投资。金融中介往往会列出在资本市场中进行交易的证券的详尽目录，其作用就是向家庭提供各种各样风险集中和风险分散的机会，从而方便资源的有效配置。

资本市场除了具有这些明显的作用之外，一个重要的潜在功能是，它是信息的重要来源，这些信息有助于协调经济各个部门之间的分散决策。家庭在进行消费—储蓄决策，以及在可获得的资产中选择财富的配置时，都要使用证券价格和利率。企业的管理者在选择投资项目和融资时，证券价格和利率也提供了重要的信号。因此，即使在资本市场上不期望进行交易的企业管理者，仍然需要从这个市场中获得进行决策所需要的信息。^[6]只有在行使不同金融职能所需要的信息能够区分时，各个专业组织之间不同的金融职能才能有效地分离。因此，一个贯穿本书各章节的共同主题，就是不同的信息需求对金融工具和组织设计的影响。

这种对家庭和其他经济组织处理的外生—内生不对称性，使得研究家庭的最优理财行为成为研究金融经济体系自然的切入点。家庭既是消费者又是投资者，家庭金融决策反映了它的双重角色：作为消费者，家庭可以选择将收入和财富的多少分配给当期消费，多少储蓄起来用于将来的消费和遗赠；作为投资者，家庭在可获得的投资机会中，可以确定其储蓄分配比例，以解决投资组合选择问题。一般而言，最优消费储蓄比例和最优投资组合选择决策不是彼此独立确定的。由于上述原因，在第2篇中，我们将首先应用连续时间模型来解决单个家庭一生的消费和投资组合选择的综合问题。

在第2篇的分析之前有两个准备章节，目的是介绍一些关于资本市场理论的基本术语、概念和定理的背景知识。在给定家庭消费决策的条件下，第2章明确阐述和解决了在经典的静态框架下的投资组合选择问题。为了有助于得到连续时间模型和研究结果，并将这些结果与那些单期模型联系起来，我们把研究的重点放在衍生证券张成定理（derivation of spanning）和共同基金定理、罗斯的套利定价理论模型（Ross arbitrage pricing theory model, APT）和夏普—林特纳—莫辛资本资产定