

# 力学

第三分 运动学

第四分 动力学

西北轻工业学院纺织系

---

1978

# 力 学

第三部分 运动学

第四部分 动力学

西北轻工业学院纺织系

一九七七年

# 目 录

## 第三部分 运动学

### 第八章 点的运动

§ 8—1 运动学引言.....308

§ 8—2 点作直线运动时的速度与加速度.....311

§ 8—3 点作曲线运动时的速度与加速度.....318

### 第九章 刚体的简单运动

§ 9—1 平动.....335

§ 9—2 定轴转动.....336

### 第十章 点的合成运动

§ 10—1 绝对运动 相对运动 牵连运动.....353

§ 10—2 速度合成定理.....358

### 第十一章 刚体的平面运动

§ 11—1 平面运动分解为平动与定轴转动.....375

§ 11—2 平面运动刚体的速度分析.....381

---

## 第四部分 动力学

### 第十二章 动力学基本方程

|        |                   |     |
|--------|-------------------|-----|
| § 12—1 | 动力学引言             | 402 |
| § 12—2 | 质点(或平动刚体)的动力学基本方程 | 403 |
| § 12—3 | 定轴转动刚体的动力学基本方程    | 409 |
| § 12—4 | 转动惯量              | 415 |
| § 12—5 | 动量定理与动量矩定理        | 422 |

### 第十三章 动能定理——刚体动力学(一)

|        |         |     |
|--------|---------|-----|
| § 13—1 | 功与功率的计算 | 434 |
| § 13—2 | 刚体的动能   | 445 |
| § 13—3 | 动能定理    | 448 |

### 第十四章 动静法——刚体动力学(二)

|        |            |     |
|--------|------------|-----|
| § 14—1 | 引言         | 459 |
| § 14—2 | 刚体的平动      | 462 |
| § 14—3 | 刚体的定轴转动    | 464 |
| § 14—4 | 转子的静平衡与动平衡 | 470 |
| § 14—5 | 刚体的平面运动    | 475 |

---

## 第三部分 运动学

### 第八章 点的运动

运动相对性的概念是运动学中重要概念之一。

本章研究点的运动。从研究点的运动方程着手，研究点的速度与加速度。它是研究运动学其它各章的基础。

工程中，有时要分析机构中某些特定点的运动。而有些另件的运动，在一定条件下也可简化成点的运动。因此学习本章亦有其独立的意义。

#### § 8 — 1 运动学引言

##### (一) 运动学的任务

在力学前两部分中，我们主要研究了刚体的平衡条件与弹性体在平衡条件下的强度等问题。如果作用在物体上的力系不满足平衡条件，则物体的运动状态就要发生变化。事实上，在设计一台纺织机器或进行一项技术革新时，必须对机器进行周详的运动分析，先分析一下能否满足我们预期的运动要求，再进一步分析作用在另件上的力与运动之间的关系，以及另件在运动情况下的强度问题等。如为了提高织布机的生产率，可考虑提高打纬次数即提高车速；这样我们首先往往对一些机构进行革新，先使打纬次数达到预期的运动要求；然后，再进一步分析在提高车速情况下，机构中有关另件的力与运动之间的关系，以及另件的强度等问题。这是一个问题的

两方面。在力学第三部分的运动学中，先考虑前者，即暂不考虑影响物体运动的物理因素（如物体间相互作用的力，质量，变形等）来研究物体的机械运动。因此，运动学的任务是研究物体在空间的位置随时间经过而改变的现象，即物体运动的空间时间关系。具体地讲，就是研究物体的运动方程、速度与加速度等等。至于联系到作用在物体上的力来全面研究物体机械运动等问题，则是本课程最后一部分，即第四部分动力学研究的任务了。

由此可见，研究运动学的目的，一方面是为研究动力学建立基础；另一方面在设计新的机器或进行技术革新时，也要应用运动学知识对机器进行周详的运动分析。因此，运动学又有其独立应用的意义。特别在纺织工业中，纺织机械的动力强度等问题一般不是主要的，而周详的运动设计往往是设计中的主要矛盾。

在研究物体的运动时，一般必须考虑物体的大小与形状。但在有些物体运动时，可不考虑自身的大小与形状。如沿直线轨道行驶着的车辆，由于车厢上所有点的运动与车厢的运动是完全一致的，因此，车厢的运动就可简化为车厢上任意一点的运动。即车厢上任意一点的运动完全代表了车厢的运动。因此，在运动学中所谓的点，就是指在所研究的问题中大小与形状均可不予考虑的物体。而那种必须考虑物体大小及形状的运动，在运动学中就称为刚体的运动。点的运动是研究刚体运动的基础。以后还可看到，有些刚体的运动还是通过刚体上某些特定点的运动进行深入分析的。因此，在运动学中，我们先研究点的运动，然后，再研究刚体的运动。

## （二）运动的绝对性与相对性。参考系。

辩证唯物主义告诉我们，宇宙中一切物质都是在运动的，运动是物质存在的形式，是物质的固有属性。正如列宁所说的：“世界

上除了运动着的物质以外，没有别的任何东西，而运动着的物质除了在空间与时间之内就不能运动。”可见物质与运动是不可分割的，这就是运动的绝对性。凡是物体都在运动着，即使从机械运动的角度看，也没有绝对静止的物体。例如，我们站在地球上看到的所谓静止的物体，实际上都是随着地球在绕太阳一起自转和公转。

既然，宇宙中绝对静止的物体是没有的，因此，当确定一物体的位置及其运动时，就必须说明对于那个物体，才有意义。这个用来确定其他物体位置与运动的参考物体就称为参考体。而固结于参考体上的坐标系就称为参考坐标系，或简称参考系。

参考系可静可动，因而同一物体对于不同的参考系，其运动的描述是可以不同的。如坐在行驶着的火车车厢内的乘客，相对固结于车厢的参考系来讲是静止的，但相对固结于地面的参考系来讲则是运动的，即有位置变化的。因此，在描述一物体的运动时，首先必须说明它是相对于那个参考系来讲的，即你是站在什么参考系中来描述物体运动的。从这方面意义来说，运动又是相对的，这就是运动的相对性。在一般工程与日常生活中，我们都取地球或固定机架作为参考系。如我们说织布机中梭子在作往复运动，浆纱机中经轴、织轴与转笼在转动，都是指相对于它们各自的固定机架或地面而言的，即我们是站在固定机架或地面上来描述的。所以，今后若不加特别说明，参考系就是指地面或固定机架。

下面我们从点的运动开始研究到刚体的运动。点的运动从直线运动研究到曲线运动。刚体的运动则先研究刚体的简单运动，再研究到较复杂的刚体的平面运动。在运动学学习告一段落后，要求能正确地分析与解决纺织机械中最常用的一些机构的运动，特别是凸轮机构与四连杆机构的有关运动学问题。

点在空间运动时，所走过的曲线（路线）叫做点的轨迹。如果点的轨迹是直线，则点的运动叫做直线运动，如果是曲线，则叫做曲线运动。

## § 8—2 点作直线运动时的速度与加速度

### (一) 点的速度

如一辆火车，在直线轨道上行驶，为了确定火车在轨道上的位置，取轨道为坐标轴（如  $x$  轴），选一固定点  $O$ （如某一车站）为原点，并选定坐标的正负向（图 8—1），则火车在轨道上的位置可用坐标  $x$  来表示。现

以动点代表火车，动点的运动代表火车的运动，

为了说明火车运动的快慢程度，我们引入速度的概念。当  $t$  瞬时，动点（火车）在  $M$  位置，其坐标为  $x$ 。走了一段时间  $\Delta t$ ，在  $(t + \Delta t)$

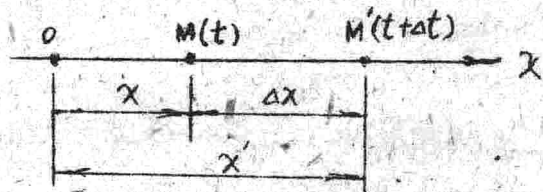


图 8—1

瞬时，动点运动到  $M'$  位置，其坐标为  $x'$ ， $x' = x + \Delta x$ ，即在时间间隔  $\Delta t$  内动点走了  $\Delta x$  一段距离。由物理学知道，动点所走过的距离  $\overline{MM'}$  与所化时间  $\Delta t$  之比，称为动点的平均速度  $v^*$ ，即

$$v^* = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \frac{x' - x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

动点的平均速度表明动点在 $\Delta t$ 时间间隔内运动的<sup>平均</sup>快慢程度。例如火车行驶的平均速度是70公里/小时，织布机梭子通过梭口的平均速度是14.64米/秒等等。但平均速度不能说明动点在某一瞬时的运动快慢程度，因此，还要引入瞬时速度的概念。

应用高等数学中极限的概念，令时间间隔 $\Delta t$ 趋近于零，这时动点位置从 $M'$ 趋近于 $M$ ，则动点的平均速度就趋近于某一极限值。这个极限值我们就称为动点在瞬时 $t$ 的瞬时速度（以后简称速度）。它说明动点在 $t$ 瞬时的运动快慢程度。如以 $v$ 表示速度，则：

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\therefore v = \frac{dx}{dt}$$

如果我们知道了任一瞬时 $t$ ，动点 $M$ 在 $ox$ 轴上的位置，即知道 $x$ 与 $t$ 的函数关系式，则：

$$x = f(t) \quad (8-1)$$

这就是直线运动中动点的运动方程。在点的直线运动中，知道了动点的运动方程后，动点的速度就等于动点的运动方程对时间的一阶导数，即：

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t) \quad (8-2)$$

若在某瞬时 $\frac{dx}{dt} > 0$ ，则表示动点的运动方向与 $x$ 轴的正向相同；

$\frac{dx}{dt} < 0$ ，则表示动点的运动方向与 $x$ 轴正向相反。这样，速度的

正负就完全代表了动点沿直线运动的方向，故在直线运动中，点的速度是一个代数量。

速度的单位一般用厘米/秒 (cm/sec)、米/分 (m/min) 或公里/小时 (km/h) 等表示。

## (二) 点的加速度

点的速度只表明点的运动的快慢与方向，但点的速度也可以是变的。如织布机的梭子，在击梭时梭子速度越来越大，在梭口上走梭时越来越慢，而在制梭时则要求梭子速度急剧减小。因此还要研究速度变化的快慢程度，也就是必须建立加速度概念。为此，根据图 8-1，设在瞬时  $t$ ，动点在  $M$  处，其速度为  $V$ ，经过  $\Delta t$  的时间间隔后，动点在  $M'$  处，其速度为  $V'$ 。则从物理学中知道，动点在  $\Delta t$  时间间隔内的平均加速度  $a^*$  为：

$$a^* = \frac{V' - V}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

平均加速度说明在  $\Delta t$  时间间隔内速度变化的平均快慢程度。若取  $\Delta t$  趋近于零，则  $M'$  趋近于  $M$ ， $V'$  趋近于  $V$ ，平均加速度  $a^*$  则趋近于某一极限值。这个极限值我们就称为动点在瞬时  $t$  的瞬时加速度（以后简称加速度）。它说明动点在  $t$  瞬时速度变化的快慢程度。如以  $a$  表示加速度，则：

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$a = \frac{dV}{dt}$$

(8-2)

所以在直线运动中，动点的加速度等于动点的速度对时间的一阶导数。由于  $v = \frac{dx}{dt}$ ，又有：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) \quad (8-4)$$

即动点的加速度也等于动点的运动方程对时间的二阶导数。若在某瞬时  $\frac{dv}{dt} > 0$ ，则  $a$  的方向与  $x$  轴的正向一致；若  $\frac{dv}{dt} < 0$ ，则  $a$  的方向与  $x$  轴的正向相反。故加速度与速度一样，在直线运动中，点的加速度也是一个代数量。

加速度的单位一般用  $\text{cm}/\text{sec}^2$ 、 $\text{m}/\text{sec}^2$  等表示。

〔例题 8-1〕 已知动点的运动方程为  $x = 2t^3 - 3$ （其中单位  $t$  以  $\text{s}$  计， $x$  以  $\text{m}$  计）。试求  $t = 2 \text{ sec}$  时动点的位置、速度与加速度。

解：(1) 因为已知点的运动方程为  $x = 2t^3 - 3$ ，故用  $t = 2 \text{ sec}$  代入，就得动点在同一时刻  $t$  的位置坐标为： $x = 2t^3 - 3 = 2 \times 2^3 - 3$ 。  
 $\therefore x = 5 \text{ m}$

(2) 根据 (8-2) 式，可求得动点在  $2 \text{ sec}$  瞬时的速度为：

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t) = \frac{d}{dt}(2t^3 - 3) = 4t$$

这说明  $v$  是随时间变的，将  $t = 2 \text{ sec}$  代入，有

$$v = 4t \Big|_{t=2}$$

$$\therefore v = 8 \text{ m}/\text{sec}$$

(3) 再根据 (8-3) 式，可求得动点在  $2 \text{ sec}$  瞬时的加速度为：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (4t)$$

$$\therefore \underline{a = 4 \text{ m/sec}^2}$$

这说明  $a$  是常数。凡加速度为一常数的运动就称为匀变速运动。自由落体就是匀变速运动，其加速度称重力加速度，以符号  $g$  表示，而  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$  或  $980 \text{ cm/sec}^2$ 。

〔例题 8—2〕 图 8—2 所示拈线机上的横动装置，由曲柄  $OA$  与带有滑槽的 T 型导纱杆等组成。曲柄  $OA$  长为  $r$ ，以运动方程  $\phi = \omega t$  绕垂直于图面的  $O$  轴转动，其中  $\omega$  是常量，开始时，即  $t = 0$  时，转角  $\phi = 0$ 。由于曲柄销  $A$  在导纱杆滑槽内滑动，从而带动导纱杆沿水平导轨作往复性的直线运动。试求导纱杆上距滑槽中心线为  $l$  的任一点  $M$  的运动方程、速度与加速度。

解：(1) 由导纱杆作往复性的水平直线运动，故  $M$  点亦作直线运动，从上例中可以看到，只要能列出动点  $M$  的运动方程，即列出动点  $M$  的座标  $x$  与时间  $t$  的函数关系式  $x = f(t)$ ，则动点的速度与加速度就迎刃而解了。

为此，沿  $M$  点的直线轨迹选为  $x$  轴，并取向右为正，固定点  $O$  为座标原点，则导纱杆上任一点  $M$  的座标为：

$$x = \overline{OA'} + \overline{A'M}$$

式中  $\overline{OA'}$  为曲柄  $OA$  在  $x$  轴上的投影，并有

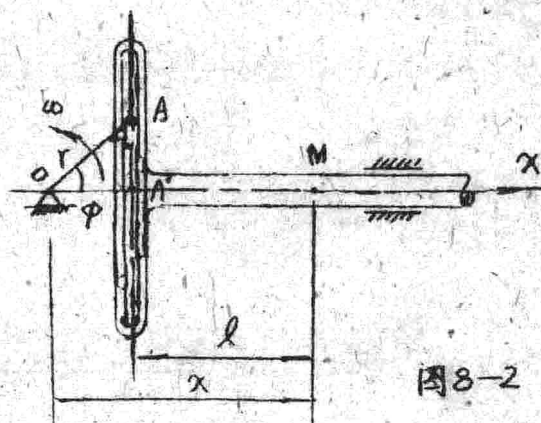


图 8—2

$\overline{OA'} = \overline{OA} \cos \phi = r \cos \omega t$ , 而  $\overline{A'M} = l = \text{常量}$ 。故

$$x = r \cos \omega t + l$$

这就是导纱杆上M点的运动方程。象M点这种运动方程可写成为时间的正弦或余弦函数的运动就称为简谐运动或简谐振动, 它是一种按正弦和余弦(本例是余弦)规律的往复性运动, 以后可以知道。

象织布机中皮结与综框的运动都属简谐运动。从图8-2中进一步分析可知, 当曲柄每转一周, 导纱杆就以O点为中心沿x轴在r与-r之间作周期性的往复运动。我们把往复运动的中心O点称为振动中心, 而导纱杆偏离振动中心最远的距离r称为振幅。如以T表示导纱杆往复一次所需的时间, 因导纱杆往复一次, 曲柄转过 $2\pi$ 弧度, 故根据 $\phi = \omega t - 2\pi = \omega T$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega}$$

工程上把T称为简谐运动的周期。周期T的倒数为每秒钟往复的次数, 称为频率, 用f表示, 即

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

根据上式有 $\omega = 2\pi f$ , 我们把 $\omega$ 称为圆频率, 它就是 $2\pi$ 时间内振动的次数。

(2)为求动点M的速度与加速度, 根据(8-2)与(8-4)式有:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (r \cos \omega t + l)$$

$$\therefore \underline{v = -r\omega \sin \omega t}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} (-r\omega \sin \omega t)$$

$$\therefore \underline{a = -r\omega^2 \cos \omega t}$$

故动点M的速度与加速度也按正弦与余弦规律变化的，并在不同的瞬时达到极限值。如  $t = 0$  时， $\phi = \omega t = 0$ ，动点M或导纱杆达到最右位置，而  $v = 0$ ， $a = -r\omega^2$ ， $a$  是负的，说明  $a$  的方向与  $x$  轴的正向相反，是指向振动中心O点的。

〔思考题8—1〕 我们怎样用力学的观点来判断一个物体是动的或是不动的？

〔思考题8—2〕 点的运动方程  $x = f(t)$ ，说明了什么问题？它有什么用途？已知点的速度与加速度，能否反过来确定点的运动方程？

〔思考题8—3〕 为什么要从平均速度（或平均加速度）引伸到瞬时速度（或瞬时加速度）？

〔思考题8—4〕 点作直线运动时，点的运动方向，速度方向，加速度方向，轨迹的正负向这四者之间有何相互连系？

〔思考题8—5〕 在例题8—1中，已知  $t = 2 \text{ Sec}$  时， $v = 8 \text{ m/Sec}$ ，然后我们说由于  $a = \frac{dv}{dt}$ ，所以  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(8) = 0$ ，因而  $t = 2 \text{ Sec}$  时， $a = 0$ ，即动点没有加速度，你认为对不对？为什么？

〔习题8—1〕 点沿直线运动，其运动方程为  $x = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 2t$ （其中单位  $x$  以  $\text{m}$  计， $t$  以  $\text{Sec}$  计）。求当  $t = 3 \text{ Sec}$  时动点的位置、速度与加速度。

〔习题8—2〕 图8—3中的半圆形凸轮，以不变的速度  $v = 2 \text{ cm/Sec}$  沿水平方向向左运动，从而使顶杆AB沿铅垂方向运动

当运动开始时, 顶杆AB的A端在凸轮的最高点。如凸轮的半径  $R=8\text{ cm}$ , 求顶杆AB的运动方程与  $t=2\text{ Sec}$  时的速度。

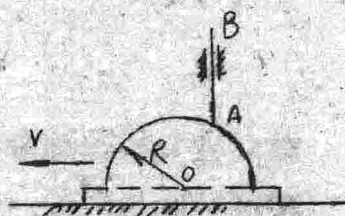


图 8-3

〔习题8-3〕 图8-4中, 跨过滑轮C的绳子一端挂有重物B, 另一端A被人拉着沿水平方向运动, 其速度  $V=1\text{ m/Sec}$ , 而A点到地面的距离保持常量  $h=1\text{ m}$ 。如滑轮离地面的高度  $H=9\text{ m}$ , 其半径可忽略不计, 当运动开始时, 重物在地面上  $B_0$  处。绳AC段在铅垂位置A<sub>0</sub>C处。求重物上升的运动方程与  $t=6\text{ Sec}$  时的

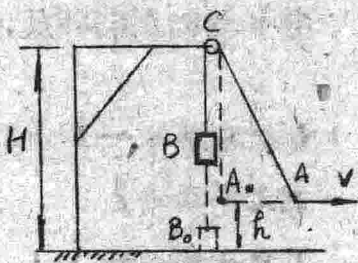


图 8-4

速度, 以及重物B上升到滑轮处所需的时间。

〔习题8-4〕 动点M自坐标原点出发沿X轴运动, 其加速度  $a=2t\text{ cm/Sec}^2$ 。求在下列两种初始条件下点的运动方程, 以及  $t=6\text{ Sec}$  时点的位置与在此以前点所走过的路程。(1)初速度  $V_0=0$  时; (2)初速度  $V_0=9\text{ cm/Sec}$ , 且方向与加速度方向相反时。

### § 8-3 点作曲线运动时的速度与加速度

#### (一)点的速度

仍以火车为例, 设火车在平面曲线轨道上行驶, 当火车(动点)的运动轨道(轨迹)为已知时(图8-5)。为了确定动点在已知轨迹上的位置, 可在轨迹上先选定一个固定点O, 作为计算距离的原点, 再把原点O的一边定为正向, 另一边定为负向, 与研究点作直线运动一样, 这好象是一条弯曲的坐标轴, 而火车在轨道上的位

置，即动点  $M$  在轨迹上的位置，可用  $M$  点到  $O$  点的弧长  $s$  来表示。 $s$  称为弧坐标，是代数量，可正可负，正号表示动点  $M$  在轨迹上原点  $O$  的正向一边，负号表示在负向一边。图 8—5 中  $M$  点的弧坐标为  $+s$ ，而  $M'$  点则为  $+s'$ 。因此，在已知轨迹的情况下，用弧坐标  $s$  可以完全确定动点的位置，这与点作直线

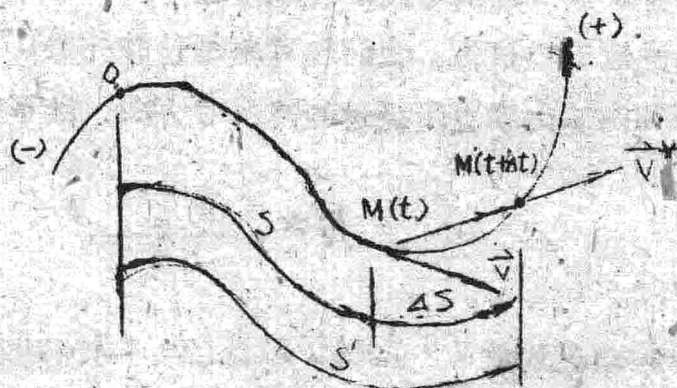


图 8—5

运动时，用坐标  $x$  完全确定动点的位置的情况是一样的。下面先研究动点沿已知曲线轨迹时的速度。

在图 8—5 中，在瞬时  $t$ ，动点在  $M$  位置，其弧坐标为  $s$ ；经过时间间隔  $\Delta t$  后，动点沿已知轨迹运动到  $M'$  位置，其弧坐标为  $s'$ ，而  $s' = s + \Delta s$ 。与点的直线运动一样，动点在  $\Delta t$  时间间隔内的平均速度  $V^*$  为：

$$V^* = \frac{s' - s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

但必须注意，曲线运动与直线运动比较，它的特点是点作曲线运动时，不仅运动快慢可以

有变化，而运动方向也是在连续不断地变化的。而  $\vec{v}^*$  只表明动点在  $\Delta t$  时间间隔内平均的运动快慢程度，不能明确表明运动的方向问题。为了表明运动的快慢与方向，与直线运动不同，点作曲线运动时的速度必须用矢量表示。为此，我们在图 8—5 中，以  $M$  点为起点， $M'$  为终点，作出矢量  $\overrightarrow{MM'}$ ，矢量  $\overrightarrow{MM'}$  称为动点在  $\Delta t$  时间间隔内的位移，位移表明了动点位置移动的直线距离的大小与方向。显然在直线运动中，位移与轨迹是重合的，但在曲线运动中则不重合了。当时间间隔很短时，我们可以用直线路程  $\overline{MM'}$  近似地代替曲线路程  $\widehat{MM'}$ ，即用直线运动近似地代替曲线运动。这样，我们就可以用位移矢量  $\overrightarrow{MM'}$  近似地表明在  $\Delta t$  时间间隔内动点所经过的路线与方向，故可得：

$$\vec{v}^* = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

平均速度矢量  $\vec{v}^*$  反映了动点在  $\Delta t$  时间间隔内平均的运动快慢与方向。当然，用直线运动代替曲线运动是有差异的，但是曲线与直线在一定的条件下是可以互相转化的，如只要时间间隔  $\Delta t$  取得越短，则曲线运动就越接近直线运动，而平均速度矢量  $\vec{v}^*$  就越接近在瞬时  $t$  的运动快慢与方向，即任何曲线运动可看作由无数极短的直线运动所组成。当时间间隔  $\Delta t$  趋近于零时，则  $M'$  无限接近于  $M$  点。这样，在极限情况下，位移  $\overrightarrow{MM'}$  就与弧长  $\widehat{MM'}$  在大小上趋于重合了，即可认为弦长  $\overline{MM'}$  与弧长  $\widehat{MM'}$  大小相等，从而有  $|\overrightarrow{MM'}| = \widehat{MM'} = \Delta s$ ；而位移  $\overrightarrow{MM'}$  的极限方向就是轨迹上  $M$  点的切线方向。故如用  $\vec{v}$  表示动点在曲线运动中的瞬时速度，则：

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$