中学自然科学课本

数学

（征求意见稿）

5册

第一部分

第二部分

第一部分

第一章 二次函数

函数是描述运动、变化的数学工具。已经学过的一次函数

$$y=ax+b,$$

可以描述速度相对不变的运动，也可以描述两个变化成正比例的变量之间的关系。由于事物运动形式无限多样性，描述运动的函数也呈现着多种形式，人们对函数的研究也**“永远不会停止在一个水平上。”**在这一章里，我们将研究另一类用途很广的函数——二次函数。

第一节 二次函数

贫下中农制造了新型的喷灌机，喷头中喷出的水流形成一股闪光的水线(图 1-1)。这道水线是什么曲线呢？

实际经验告诉我们，如果抛射一个物体(可以是子弹、水点等)，它总是在空中划过一道曲线后，才落到地上。进一步的研究表明：如果不计空气阻力，在适当选

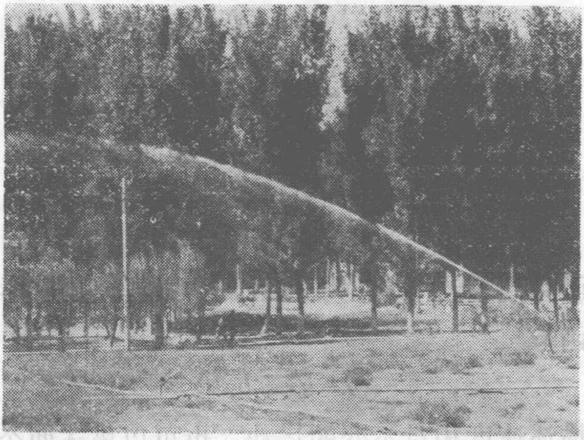


图 1-1

取的直角坐标系中，这种运动曲线都可以用二次函数

$$y = ax^2 + bx + c$$

的图象来表示. 因此，常把上述二次函数的图象叫作抛物线. 抛射物体的运动曲线为什么是二次函数的图象呢？下面通过一个例子来说明一下.

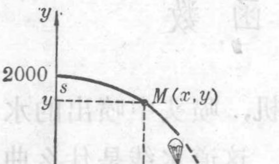


图 1-2

【例 1】 飞机以每秒 100 米的速度，在 2000 米高空水平飞行. 跳伞运动员跳出机仓后，有一段时间不打开保险伞. 试分析运动员在这段时间里的运动曲线函数式（不计空气阻力）.

解 如图 1-2, 选取坐标系时, 以 x 轴代表地面, y 轴正好通过跳出机仓的一点. 下面利用有关的物理知识, 来研究运动员在各个时刻中, 离地面高度 y 和所行水平距离 x 之间的关系.

由于飞机的带动, 运动员离开机仓后, 将继续以 100 米/秒的速度沿水平方向前进. 所以 t 秒后, 水平方向前进了

$$x=100t.$$

又由于重力作用, 运动员同时以加速度 $g=9.8$ 米/秒^2 垂直下落. 经 t 秒后, 下落的路程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2=4.9t^2,$$

$$\therefore \quad y=2000-s=2000-4.9t^2.$$

如果运动员经 t 秒后达到的位置记为 $M(x, y)$, M 这一点的坐标 x、y 之间的内在联系, 就可以从 $x=100t$ 和 $y=2000-4.9t^2$ 中求得, 为

$$y=2000-4.9t^2=2000-4.9\left(\frac{x}{100}\right)^2,$$

即

$$y=2000-0.00049x^2.$$

因此, 图 1-2 中那一段以实线表示的运动曲线, 确是二次函数的(一部分)图象.

二次函数的一般形式是

$$y=ax^2+bx+c.$$

其中 a、b、c 是常数，且 $a \neq 0$. 它的图象叫抛物线. 有时也把上述函数称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

二次函数及其图象——抛物线，在生产实践中有许多应用，并不局限于描述抛射物体的运动. 例如，工人师傅利用抛物线(面)的聚光特性，制造了许多器件，如灯具的反光罩、伞形太阳灶、通信卫星地面接收站天线等. 再如，我国工人阶级贯彻"**备战、备荒、为人民**"的战略方针，试制成功了 TZ 型太阳灶，其中 TZ-2 型的切口线方程就是(图 1-3)

$$y=\frac{1}{2000}x^2.$$

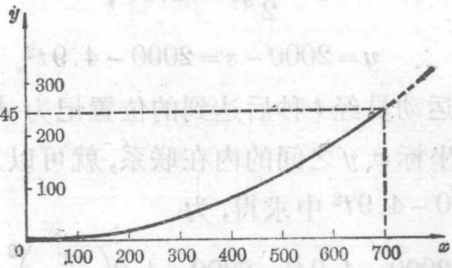


图 1-3

二次函数还可以刻划某些变量之间的关系.

【例 2】 一个渠道的横截面如图 1-4, 求横截面面积 S.

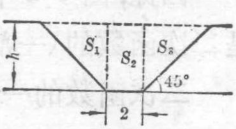


图 1-4

解 $\quad S_1=S_3=\dfrac{1}{2}h^2,$

$S_2=2h,$

$$\therefore \quad S=S_1+S_2+S_3=h^2+2h.$$

即横截面面积 S 是渠深 h 的二次函数。

下面将结合图象研究二次函数的性质。

习 题 一

1. 写出下列各对变量之间的函数关系式，并化成二次函数的一般形式：

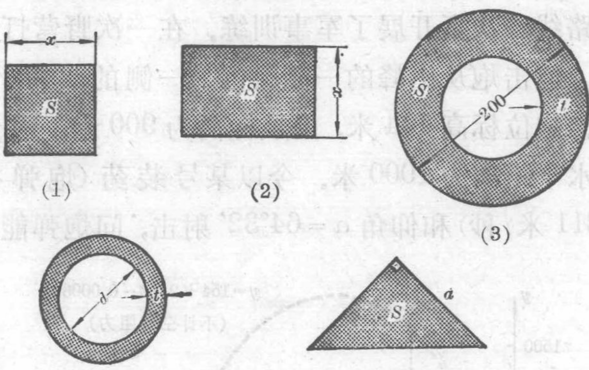
(1) 正方形面积 S 与它的边长 x；

(2) 周长为 80 的矩形面积 S 与宽 x；

(3) 外直径为 200 的圆管管壁横截面面积 S 与壁厚 t；

(4) 内直径 $d=40$ 的圆管管壁横截面面积与壁厚 t；

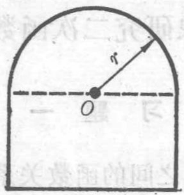
(5) 等腰直角三角形面积 S 与直角边长 a.



(第1题图)

2. 飞机以 150 米/秒的速度在1500米高空沿水平方向飞行，求跳伞运动员跳出机仓后，在打开保险伞之前的运动曲线是什么函数？(不计空气阻力)

3. 防空洞横截面的周长 $l=15$ 米, 上部为半圆形, 下部为矩形. 求横截面面积与圆半径 r 之间的关系.



(第 3 题图)

第二节　二次函数的图象和性质

【例 1】　人民解放军某部炮兵, 学习毛主席关于**提高警惕, 保卫祖国**的伟大教导, 批判林彪资产阶级军事路线, 认真开展了军事训练. 在一次野营打靶演习中, 迫击炮从山峰的一侧射击另一侧的目标 A (图 1-5). 炮位标高 154 米, 山顶标高为 900 米, 炮位与山顶水平距离为 1000 米. 今以某号装药 (炮弹初速 $v_0=211$ 米/秒) 和仰角 $\alpha=64°32'$ 射击, 问炮弹能否打

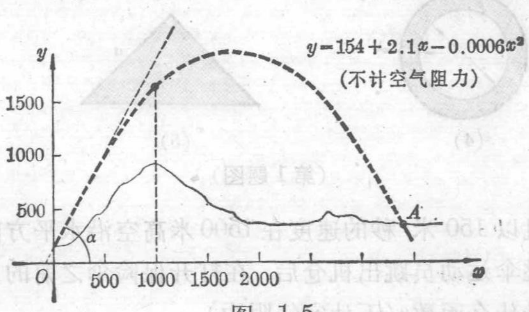


图 1-5

过山顶？炮弹所达到的最大高度是多少？

分析 炮弹以初速 v_0 沿着斜率为 $\operatorname{tg}\alpha$ 的直线(即炮口的延长线)向斜上方飞行. 由于重力作用，炮弹逐渐偏离该直线，上升愈来愈慢. **“纯粹量的增多或减少，在一定的关节点上就引起质的飞跃”**[1]. 经过一定时间，炮弹不再上升，即到达最高点，以后便转而下降. 为了解决上面的问题，首先要找出炮弹每一时刻水平位置 x，与高度 y 之间的函数关系. 根据有关物理知识，可推算得到：

$$y=154+2.1x-0.0006x^2.$$

解 利用上述函数关系式，当 $x=1000$ 时，求得函数值

$$y=154+2.1\times1000-0.0006\times(1000)^2=1654\,(\text{米}).$$

这说明，炮弹能够打过山顶.

利用求函数值的方法，已经解决了第一个问题. 在研究了二次函数的性质后，就能进一步计算出炮弹最高位置在哪里. 这一节将利用图象这个工具研究二次函数的性质. 我们先研究 $y=ax^2$ 的图象(即一般式中 $b=c=0$ 的情形).

【例 2】 作出函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象.

[1] 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 42 页.

解　取 x 的不同值，代入

$$y=\frac{1}{2}x^2,$$

求出对应的 y 值，列表如下：

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\cdots$

以表中每组对应值作为点的坐标，描出各点，用平滑的曲线依次连接这些点后，就得到所求的图象(图 1-6)。

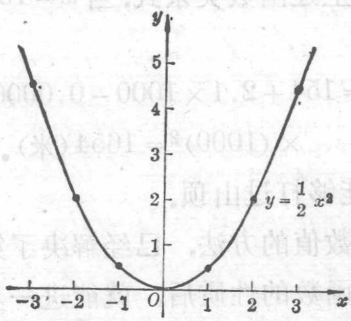


图　1-6

本例中先列对应值表，再作函数图象的方法，称为描点法。

结合图象，可以看出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 有下列性质：

(1) 当 $x>0$ 时，函数是上升的．也就是说，x 的取值越大，对应的 y 值越大；

(2) 当 $x<0$ 时，函数是下降的．即 x 值越大时，对应的 y 值越小；

(3) $O(0, 0)$，是上升和下降这两种对立状态相互过渡的转折点，即原点是该函数图象的最低点．二次函数图象的最低点或最高点统称顶点．

(4) 整个图象是一个轴对称图形，y 轴是对称轴．这就是说，每当 x 取两个互为相反数的值时，分别求得的 y 值总是相等的，如 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}$，而 $x=-1$ 时也有 $y=\frac{1}{2}$．

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 比直线复杂．它既有下降的半支，也有上升的半支，顶点则是两个半支的连结点；这两个半支是互为轴对称的．由于这个性质，有时对整个函数的研究就只要研究半支即可．

问题：图 1-7，在同一坐标系中，分别作出

$$y=-\frac{1}{2}x^2,\ y=x^2,\ 和\ y=-2x^2$$

这三个函数的图象，把它们与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象作比较，并归纳 $y=ax^2$ 的图象性质．

形如 $y=ax^2$ 的函数图象，它的性质可以归纳为：

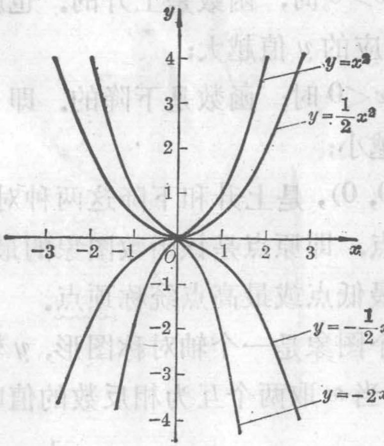


图 1-7

(1) 是一个轴对称图形，以 y 轴为对称轴；

(2) 当 $a>0$ 时，整个图象在 x 轴上方，开口向上(上凹)无限伸展，原点是最低点(顶点)；

当 $a<0$ 时，整个图象在 x 轴下方，开口向下(上凸)无限伸展，原点是最高点(顶点)；

(3) a 的绝对值越大，开口越小。

抛物线 $y=ax^2$ 的图象比较容易作出。根据上述性质，首先描出顶点 (0, 0)，根据 a 的正负确定曲线的开口是向上还是向下，再描出几对对称点，便可掌握整个图象的大致情况。

再看形如 $y=ax^2+c$ 的二次函数图象（即一般形式中 $b=0$ 的情形）。

【例 3】 作出函数

$$y=\frac{1}{2}x^2 \text{ 和 } y=\frac{1}{2}x^2+3$$

的图象.

解 取 x, y 的对应值列表:

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y=\frac{1}{2}x^2$	$\cdots$	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	$\cdots$
$y=\frac{1}{2}x^2+3$	$\cdots$	$7\frac{1}{2}$	5	$3\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	5	$7\frac{1}{2}$	$\cdots$

描点作出

$$y=\frac{1}{2}x^2 \text{ 和 } y=\frac{1}{2}x^2+3$$

的图象(图 1–8).

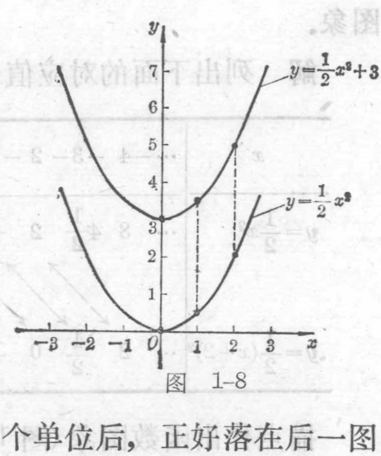


图 1–8

对比这两个图象, 不难发现,把整个 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象沿 y 轴正方向平移三个单位,就得到

$$y=\frac{1}{2}x^2+3$$

的图象. 也就是说, 前一图象上的每一点向上移三个单位后, 正好落在后一图象上. 从上述对应值表中

$$y=\frac{1}{2}x^2 \quad 和 \quad y=\frac{1}{2}x^2+3$$

两行的数值也能说明这一点．这样，

$$y=\frac{1}{2}x^2+3$$

的图象仍然以 y 轴为对称轴，但以(0, 3)为顶点．

问题：1．作函数 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ 和 $y=-2x^2+5$ 的图象．它们分别与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象有什么关系？

2．函数 $y=ax^2+c$ 的图象与 $y=ax^2$ 的图象有何关系？

下面进一步研究图形如 $y=a(x+m)^2+k$ 的二次函数图象．

【例 4】 作二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的图象．

解 列出下面的对应值表：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	…
$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$	…	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	$12\frac{1}{2}$	18	…

描点作出函数图象(图 1-9)．

从表中和图 1-9 中都可以看出，这两个函数图象有如

下关系：把 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象沿水平方向左移两个单位，就得到

$$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$$

的图象．具体地说，前一图象上的每一点沿水平方向左移两个单位，正好落在后一图象上．

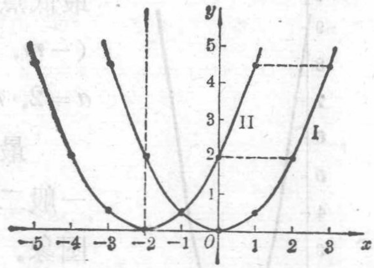


图　1-9

这样，$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的图象就以直线 $x=-2$ 为对称轴，其顶点为 $(-2, 0)$．

问题：1．作出函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 和 $y=-2(x+1)^2$ 的图象．它们分别与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象有什么关系？

2．函数 $y=a(x+m)^2$ 的图象与 $y=ax^2$ 的图象有什么关系？

3．$y=-2(x-2)^2+1$ 及 $y=2(x-2)^2$ 的图象；与 $y=2x^2$ 的图象各有什么关系？怎样从 $y=ax^2$ 的图象得到 $y=a(x+m)^2+k$ 的图象？

函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图象，可由 $y=ax^2$ 的图象沿水平方向平移 $|m|$ 个单位（m 为正数时左移，m 为负数时右移）；再沿垂直方向平移 $|k|$ 个单位（k 为正数时上移，k 为负数时下移）得到．$y=a(x+m)^2+k$ 的图象是轴对称图形，以直线 $x=-m$ 为对称轴，以

$(-m, k)$ 为顶点. 当 $a>0$ 时，开口向上，$(-m, k)$ 为最低点；当 $a<0$ 时，开口向下，$(-m, k)$ 为最高点（图 1–10 就是 $a=2$, $m=-2$, $k=1$ 的情形）.

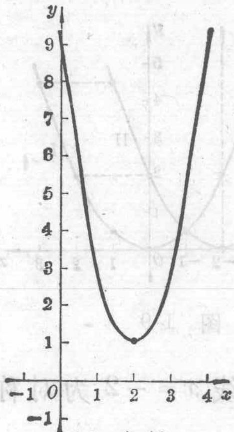


图 1–10

最后，我们来分析如何作出一般二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象.

【例 5】 作二次函数

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$$

的图象.

分析 设法先把 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$ 化成 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式.

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x+5=\frac{1}{2}(x^2+4x+10)$$

$$=\frac{1}{2}[(x^2+4x+4)+6]=\frac{1}{2}(x+2)^2+3.$$

所以，这个函数的图象以直线 $x=-2$ 为对称轴，以 $(-2, 3)$ 为顶点，开口向上.

解 根据对称性，对于

$$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3,$$

除顶点 $(-2, 3)$ 外，只要列出 $x>-2$ 的几个点的对应值表就行了.

x	-2	-1	0	1	2	…
y	3	$3\frac{1}{2}$	5	$7\frac{1}{2}$	11	…

描出上述表中各点，作出这几点对于 $x=-2$ 的对称点，用平滑曲线连接各点，便得到所求图象（图 1-11）。

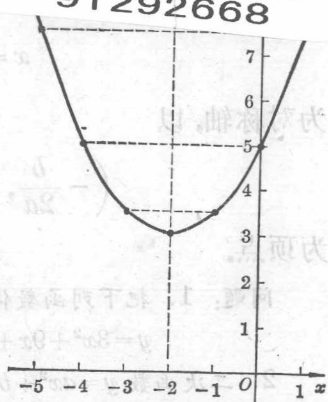


图 1-11

本例中利用配置完全平方，把二次函数化成

$$y=a(x+m)^2+k$$

的形式，这种方法叫做配方法。对于一般的二次函数 $y=ax^2+bx+c$，可以得到，

$$\begin{aligned}y=ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]\\&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

可见，任何一个二次函数，都可以用配方法化成 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式．这里的

$$m=\frac{b}{2a},\quad k=\frac{4ac-b^2}{4a^2},$$