



普通高等教育“十二五”规划教材

自动控制原理

——练习与测试篇

杨 平 翁思义 王志萍 完颜绍会 编著



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

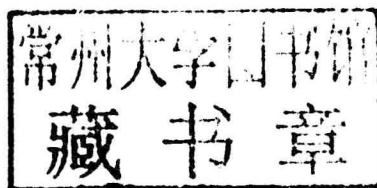


普通高等教育“十二五”规划教材

自动控制原理

——练习与测试篇

编著 杨 平 翁思义 王志萍 完颜绍会
主审 张丽香



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。

本书是为学生在学习自动控制原理课程时,复习知识、练习习题和自我测试以及利用计算机软件工具提高做题和学习效率而专门设计的。本书的第一篇是自动控制原理的精华概要汇集。第二篇是自动控制原理的典型题目及其详解和针对性练习题目。第三篇提供了十多套大学自动控制原理课程考试模拟试卷和按考核要点细分的百余道试题。第四篇给出了自动控制原理课程典型习题的 MATLAB 解算程序和做题示例。所有的习题和试题都给出了简明答案。

本书可作为高等学校自动化及相关专业的“自动控制原理”课程教学的配套教材,也可供自学和复习“自动控制原理”课程的科技人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理. 练习与测试篇/杨平等编著. —北京: 中国电力出版社, 2012. 9

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-3532-5

I. ①自… II. ①杨… III. ①自动控制理论—高等学校—习题集 IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 224402 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2012 年 9 月第一版 2012 年 9 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 23.5 印张 577 千字

定价 42.00 元

敬告读者

本书封底贴有防伪标签,刮开涂层可查询真伪

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

前言

自动控制原理课程是大学工科本科电气信息类专业中普遍开设的必修课,也是硕士研究生的入学考试课程。学好和教好这一门课是广大本科生和课程主讲教师的共同愿望。学好这一门课的关键有几点,比如说,紧抓对基本概念的理解、重视课堂教学中教师的言传身教等,其中重要的一环是学习者自己在课外主动地做题。因为,听课听懂了不算真懂,做题做通了,才能心领神会。亲自做题的过程是新概念的认识逐步深化的过程,是建立基本概念的积累过程,是不可或缺的过程。通过做题可以加深对自动控制原理的理解;通过做题可以掌握好控制系统性能的分析方法;通过做题可以掌握设计和分析控制系统的专门技能。通过做题可以检验自己学习自动控制原理课程的效果和了解自己掌握控制理论的程度和应用控制理论的能力大小,从而使学习更上一层楼。成功地完成练就做题功夫的诀窍可归为三点:首先,将基本概念和基本理论提炼成便于熟记的要点;其次,认真地研读例题的详解并揣摩其方法和技巧;最后,独立地做练习题或测试题。对每一部分理论都应循环往复地进行复习概念、练习做题和测试能力三个动作,直到确认已有信心解决此类问题为止。为此,需要一本好的教材,能为学生提供最直接的帮助,让他们在练就做题功夫的过程中有必要的知识可查、有足够的例题可读、有丰富的练习题可做以及有适当的大学课程测试题可用。

就课程复习而言,最重要的莫过于记牢基本的概念和基本的原理。为此,本书第一篇的编写就是提供给读者自动控制原理的精华概要。这是在做题之前一定要先熟读掌握的。若读时仍存疑惑,则需要再复习教科书和请教老师了。

就做题而言,最重要的莫过于先读懂典型例题的解法,然后自己有针对性地去完成一定量的练习题。本书第二篇就是根据这一需求设计的:先给出典型题目及其详解,再提供足够多的针对性练习题目。

就测试能力而言,考试无疑是测试能力的最直接的手段。考前自测就需要有多套试题可选。本书第三篇提供了三类共 16 套的大学课程考试的模拟试卷和按考核要点再细分的三类共 152 道试题。首先,按课程开设的较多学时、中等量学时和较少学时,粗分为高级水平、中级水平和初级水平三类。然后,按高、中、初三级的不同教学要求(应会基本分析和设计技能题型)编排测试试题。学生可先通过做模拟试卷自测,找出自己的弱项,再有针对性地挑选细分的应会题型试题去练习,从而可更快地全面提高解题能力。

就高效率地做控制原理课程习题而言,充分利用 MATLAB 软件工具,无疑是最恰当的选择。为此,本书的第四篇专门介绍一些控制系统分析和设计的 MATLAB 解算技术和方法,给出了典型的解题程序和应用示例。当然,再多的计算机代劳做题也无法培养出人的分析解题和人工推算能力,所以应当把计算机解题作为一种辅助方法来使用。让计算机代劳但不代心。借计算机的力来练自己的能。

为了学生做题后自我检查对错的需要,本书所有的试题后都给出了简明答案(篇幅所限,部分图形答案被省略)。

本书的第一篇、第二篇和第四篇的每章编排与在 2009 年出版的教科书《自动控制原

理——理论篇》(中国电力出版社)——对应。当采用《自动控制原理——理论篇》作为自动控制原理课程教材时,本书是最合适的配套教材。

本书的编写是基于2005年出版的《自动控制原理学习辅导》(中国电力出版社)。根据近7年的教材使用反响,制定并实施了新的教材编写计划。原书是由翁思义、杨平和王志萍编写的。本书第一篇由杨平重编;第二篇第一至三章由徐晓丽改编;第二篇第四章由杨平新编;第二篇第五至六章由余洁改编;第二篇第七至八章由孙宇贞改编;第二篇第九章由翁思义改编;第三篇由杨平和翁思义重编;第四篇由王志萍重编;第一篇至第三篇由完颜绍会审校并验算。全书的统编由杨平和翁思义完成。

本书全稿由张丽香教授进行仔细地审阅。张丽香教授审阅后提出的许多具体的修改意见中的绝大部分已被采纳。在此特别感谢张教授为保证和提高本书质量所做的贡献。

编 者

2012年5月



目 录

前言

第一篇 基本原理和基本概念提要

第一章 控制系统的基本概念	1
第二章 控制系统的数学模型	3
第三章 控制系统的时域分析	16
第四章 控制系统设计导论及时域设计	22
第五章 控制系统的根轨迹分析与设计	30
第六章 控制系统的频域分析与设计	35
第七章 离散控制系统的分析与设计	45
第八章 控制系统的状态空间分析与设计	53
第九章 非线性控制系统的分析与设计	60

第二篇 例题详解与习题精选

第一章 控制系统的基本概念	65
第一节 例题	65
第二节 习题	68
第二章 控制系统的数学模型	71
第一节 例题	71
第二节 习题	83
第三章 控制系统的时域分析	90
第一节 例题	90
第二节 习题	100
第四章 控制系统设计导论及时域设计	105
第一节 例题	105
第二节 习题	109
第五章 控制系统的根轨迹分析与设计	112
第一节 例题	112
第二节 习题	130
第六章 控制系统的频域分析与设计	138
第一节 例题	138
第二节 习题	164

第七章 离散控制系统的分析与设计	172
第一节 例题	172
第二节 习题	183
第八章 控制系统的状态空间分析与设计	190
第一节 例题	190
第二节 习题	212
第九章 非线性控制系统的分析与设计	222
第一节 例题	222
第二节 习题	235

第三篇 大学考试试题汇编

第一章 大学考试初级水平试题	240
第一节 初级典型试卷及解题示范	240
第二节 初级分类试题	243
第三节 初级模拟试卷	249
第二章 大学考试中级水平试题	254
第一节 中级典型试卷及解题示范	254
第二节 中级分类试题	257
第三节 中级模拟试卷	266
第三章 大学考试高级水平试题	276
第一节 高级典型试卷及解题示范	276
第二节 高级分类试题	279
第三节 高级模拟试卷	297

第四篇 控制系统分析与设计的 MATLAB 解算

第一章 概述	312
第一节 控制系统的基本概念的 MATLAB 浅析途径	312
第二节 控制系统的基本概念的 MATLAB 解题示例	314
第二章 控制系统的数学模型	315
第一节 数学模型的 MATLAB 解算方法	315
第二节 数学模型的 MATLAB 解题示例	316
第三章 控制系统的时域分析	321
第一节 时域分析的 MATLAB 解算方法	321
第二节 时域分析的 MATLAB 解题示例	322
第四章 控制系统设计导论及时域设计	332
第一节 时域设计的 MATLAB 解算方法	332
第二节 时域设计的 MATLAB 解题示例	332

第五章 控制系统的根轨迹分析与设计	334
第一节 根轨迹分析与设计的 MATLAB 解算方法.....	334
第二节 根轨迹分析与设计的 MATLAB 解题示例.....	335
第六章 控制系统的频域分析与设计	342
第一节 频域分析与设计的 MATLAB 解算方法.....	342
第二节 频域分析与设计的 MATLAB 解题示例.....	343
第七章 离散控制系统的分析与设计	355
第一节 离散控制系统的 MATLAB 解算方法.....	355
第二节 离散控制系统的 MATLAB 解题示例	356
第八章 控制系统的状态空间分析与设计	360
第一节 状态控制系统的 MATLAB 解算方法.....	360
第二节 状态控制系统的 MATLAB 解题示例.....	361
第九章 非线性控制系统的分析与设计	365
第一节 非线性控制系统的 MATLAB 解算方法.....	365
第二节 MATLAB 解题示例	365
参考文献	368

第一篇 基本原理和基本概念提要

第一章 控制系统的基本概念

一、控制基本概念

控制 (control) 定义: 某个主体使某个客体按照一定的目的来动作。主体是人的控制称为人工控制, 而主体是机器的控制称为自动控制。控制的目的一般是将某个客体的动态和稳态的过程控制在期望的形态。

控制学科的划分: 一级学科: 控制科学与工程; 二级学科: 控制理论与控制工程、检测技术与自动化装置、模式识别与智能系统、系统工程、导航、制导与控制。

控制理论的内容: 经典控制理论 (时域分析法、频域分析法、根轨迹法、Z 变换法) 和现代控制理论 (状态反馈控制、最优控制、模糊控制、智能控制)。

控制理论的基本课题: 控制系统的分析 (已建系统的分析与评价) 和控制系统设计 (未建系统的设计与实现)。

二、反馈控制系统基本概念

控制系统的组成: 受控过程 (被控制的设备或过程) 和控制装置 (起控制作用的设备或装置)。

控制装置的组成: 控制器 (控制量的推算)、传感器 (被控量的检测与变换)、执行器 (控制量的变换)。

控制系统的变量: 被控量 (表征被控过程状态且需要加以控制的物理量)、设定值 (又称为参考输入) (希望被控量趋近的理想数值)、扰动量 (引起被控量发生不期望的变化的变量)、控制量 (控制器的输出量)、检测量 (传感器的输出量)、操作量 (执行器的输出量, 也是受控过程的输入量)、偏差量 (设定值减去检测量)。

负反馈控制原理: 大多数的自动控制系统的基本工作原理是负反馈控制原理。依据负反馈控制原理工作的控制系统, 必将系统的被控量 (通过传感器) 反馈给控制器, 控制器将依据设定值和被控量的反馈量计算偏差值并推算所需的控制量, 再通过执行器去控制受控过程。这种依据反馈、依据偏差进行控制的工作机理是自动控制系统的核心原理。

三、信息变换系统方框图表示法

四种图形元素定义: 矩形或长方形框表示一种信息变换功能, 或输入与输出之间的关系; 求和圆表示输出变量是所有输入变量的代数和; 有向线条表示变量的传递路线; 分支点表示同一变量传输的分叉点。

信息变换系统方框图表示: 任意信息系统, 可以用上述图形定义, 从输入变量开始来勾画各信息变量的变换和传递关系, 直至系统输出变量处。

四、负反馈控制系统的方框图

一个典型的负反馈类型的自动控制系统, 可用图 1.1.1 所示的方框图来表示。该方框图表示了典型控制系统的四个基本环节: 受控过程、传感器、控制器、执行器。其中, 受控过

程又可细分为两个部分：可控通道和干扰通道。控制装置由传感器、控制器和执行器组成。该方框图还表示出典型反馈控制系统的七个基本变量：设定值、偏差量、被控量、控制量、操作量、扰动量、检测量。控制系统的信息负反馈循环流程可描述为：传感器用来测量被控量的大小，并把相应的检测量送往控制器；控制器将传感器反馈的被控量与给定值比较，生成偏差量，并据此按一定的控制规律运算出控制量给执行器；执行器将控制量变换成受控过程的操作量；受控过程在操作量的影响下将改变被控量。

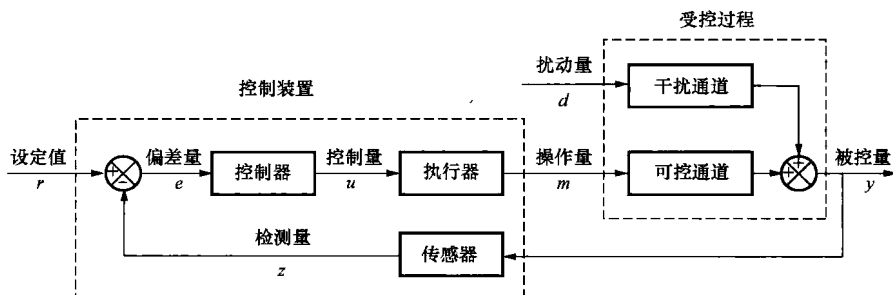


图 1.1.1 典型的负反馈类型的自动控制系统

五、控制系统的分类

- (1) 按自动控制系统是否形成闭合回路分类：开环控制、闭环控制。
- (2) 按控制器的馈入信号的特点分类：前馈控制、反馈控制、前馈—反馈复合控制。
- (3) 按给定输入的形式分类：恒值控制、随动控制、程序控制。
- (4) 按照控制系统主要元件的特性来分类：线性控制、非线性控制。
- (5) 按控制系统的传递信号在时间上是否连续分类：连续（时间）控制、离散（时间）控制。
- (6) 按控制系统的输入和输出信号的数量来分类：单变量控制、多变量控制。
- (7) 按系统的反馈控制回路数分类：单回路控制、双回路控制、多回路控制。
- (8) 按控制器的功能特性分类：最优控制、自适应控制、智能控制、PID 控制、鲁棒控制。
- (9) 按控制器实现的器件分类：机械控制、气动控制、电动控制、电子控制、计算机控制。
- (10) 按被控变量的统计特性分类：确定性变量控制、随机性变量控制。

六、控制系统性能分析

常用控制系统性能分析和测试信号：阶跃信号、斜坡信号、抛物线信号、脉冲信号、正弦信号等。

控制系统性能分析方法：

基本原理：试验响应的动态和稳态分析。

常用方法：时域响应、根轨迹、频率特性。

七、控制系统的性能要求

控制系统阶跃响应可能出现五种类型：①单调收敛过程；②单调发散过程；③衰减振荡过程；④等幅振荡过程；⑤渐扩振荡过程。其中，单调收敛和衰减振荡过程是一般期望的控制过程响应。

控制系统性能的基本要求可以概括为五个字：稳、准、快、壮、省。反映了对控制系统性能要求的五个方面：稳定性、准确性、快速性、鲁棒性和经济性。

第二章 控制系统的数学模型

一、控制系统数学模型的表达

控制系统的数学模型是描述自动控制系统输入、输出以及内部各变量的静态和动态关系的数学表达式。控制系统的数学模型有多种形式：代数方程、微分方程、传递函数、差分方程、脉冲传递函数、状态方程、方框图、结构图、信号流图和静态/动态关系表等。

1. 微分方程

控制系统可用以下的线性常系数微分方程来描述

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m r^{(m)} + b_{m-1} r^{(m-1)} + \cdots + b_1 \dot{r} + b_0 r \quad (1.2.1)$$

式中： r 和 y 是系统的输入信号和输出信号，都是时间 t 的函数； $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ ，都是常系数，在一般情况下 $n \geq m$ 。

2. 传递函数

(1) 定义：传递函数 $G(s)$ 是在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换 $Y(s)$ 与输入量的拉氏变换 $R(s)$ 之比。

(2) 性质：传递函数只与系统本身的结构与参数有关，与输入量的大小和性质无关。

(3) 表达：

$$\text{一般多项式形式 } G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_{m-i} s^{m-i}}{\sum_{i=0}^n a_{n-i} s^{n-i}} \quad (1.2.2)$$

$$\text{因式分解的形式: } G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \frac{k \prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)} \quad (1.2.3)$$

式中： k 为传递系数； $-z_i$ 为分子多项式的根，称为系统的零点； $-p_j$ 为分母多项式的根，称为系统的极点。分子和分母多项式的根均可包含共轭复根和零根。

系统传递函数的零点、极点和传递系数决定了系统的动态性能及稳态性能。

3. 连续系统的状态空间模型

一个线性连续时不变动态系统的状态空间模型如下：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.2.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.5)$$

式 (1.2.4) 与式 (1.2.5) 中， $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ 为状态矢量；

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \text{ 为输入或控制矢量;}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \text{ 为输出矢量;}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ 为 } (n \times n) \text{ 系统矩阵;}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \text{ 为 } (n \times r) \text{ 输入或控制矩阵;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \text{ 为 } (m \times n) \text{ 输出或观测矩阵;}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \text{ 为 } (m \times r) \text{ 连接矩阵。}$$

状态空间模型由状态方程和输出方程组成。状态方程是以矩阵形式表达的一阶微分方程组。输出方程是一个矩阵形式表达的代数方程组。系统矩阵 $\mathbf{A}$ 反映系统固有特性。控制矩阵 $\mathbf{B}$ 反映系统受外部激励作用下的特性。通过矩阵 $\mathbf{C}$ 可构成状态变量的线性组合，通过矩阵 $\mathbf{D}$ 可以把输入量的作用直接加在输出量上。如果输入矢量 $\mathbf{u}(t)=0$ ，那么可得到状态方程的齐次方程（零输入状态方程）：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.2.6)$$

状态空间模型的标准形能直接反映系统的基本特性和结构特点，所以在状态空间分析中有着很重要的作用。状态空间模型的标准形可分为四种：能控标准形，能观标准形，对角标准形和约当（Jordan）标准形。能控标准形很容易由传递函数确定，能观标准形与能控标准形有对偶关系，具有对角标准形的系统是完全解耦的系统，具有约当标准形的系统一定有重极点。

若用式（1.2.7）的微分方程表示一个单入单出的线性连续时不变动态系统，则可变换成如式（1.2.8）～式（1.2.11）所示的四种标准形的状态空间模型。

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1.2.7)$$

能控标准形的系数矩阵：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

$$C = [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \cdots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})], D = b_n \quad (1.2.9)$$

能观标准形的系数矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2.10)$$

$$C = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1], D = b_n \quad (1.2.11)$$

对角标准形的系数矩阵 (设系统只有互异实极点, s_i):

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \quad (1.2.12)$$

约当标准形的系数矩阵 (设系统只有多个重极点):

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & & & & \\ & s_1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & s_1 & 0 & \\ & & & & s_2 & 1 \\ & & & & & s_2 & 1 \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & s_2 & 0 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (1.2.13)$$

$$C = [c_{1,r1} \quad c_{1,r1-1} \cdots c_{1,1} \quad c_{2,r2} \quad \cdots] \quad (1.2.14)$$

能控标准形模型的系数矩阵与能观标准形模型的系数矩阵具有对偶关系:

$$\begin{cases} A_{\text{能控}} = A_{\text{能观}}^T \\ B_{\text{能控}} = C_{\text{能观}}^T \\ C_{\text{能控}} = B_{\text{能观}}^T \end{cases} \quad (1.2.15)$$

二、控制系统数学模型的动态响应解

1. 传递函数模型的时域解

若已知系统的传递函数 $G(s)$ 和系统输入 $R(s)$, 则可利用拉氏反变换求出系统输出 $y(t)$ 的动态响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)R(s)] \quad (1.2.16)$$

当输入信号 $r(t)$ 为单位阶跃函数 $1(t)$ 时, 其拉氏变换为 $R(s) = \frac{1}{s}$, 则系统的单位阶跃响应函数为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad (1.2.17)$$

2. 连续状态方程的时域解

一般状态方程的时域解: $x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.2.18)$

式中, 指数函数 e^{At} 是一个矩阵, 称为**矩阵指数函数**。

$$\text{矩阵指数函数定义: } e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \quad (1.2.19)$$

若定义状态转移矩阵为矩阵指数函数, $\Phi(t) = e^{At}$, 则状态方程的时域解:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (1.2.20)$$

3. 连续状态方程的频域解

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (1.2.21)$$

三、控制系统数学模型的变换

1. 方框图及等效变换

方框图表示法是一种图解分析方法。可以清楚地表明系统中信号的传递情况和各种环节间的相互关系。“方框”是对加到方框上的输入信号的一种运算函数关系, 运算结果用输出信号表示。用标明信号流向的箭头将这些方框连接起来就清楚地表示了系统中各个环节变量间的关系。

方框图表示法的五个要点:

(1) 4个基本图素: 表示输入输出变量关系的**矩形方框**; 表示变量传递路线和方向的**有向线条**; 表示求所有输入变量的代数和的**求和圆**(简称合点); 表示所有输出变量与唯一的输入变量相等的**分支点**(简称分点)。

(2) 求和圆的输入变量的正负号可标注在求和圆内的输入变量箭头指向处, 也可标注在圆外的输入变量箭头旁。

(3) 方框内标注名为输入与输出变量关系或函数名。

(4) 线条上标注为变量名。

(5) 箭头旁标注的正负号为变量的正负号。

在控制系统的分析中, 经常需要对系统方框图作分解和归总变换, 为此需要利用方框图的等效转换规则。

常用等效转换的十一条规则:

(1) 串联归总等效转换: $G(s) = G_1(s)G_2(s)$

(2) 并联归总等效转换: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

(3) 反馈归总等效转换: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$ (负反馈取正号, 正反馈取负号)

(4) 分点前移等效转换: $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ (分点后函数 G_2 与前移函数 G_1 相乘)

(5) 分点后移等效转换: $G(s) = \frac{G_2(s)}{G_1(s)}$ (分点后函数 G_2 除于后移函数 G_1)

(6) 合点前移等效转换: $G(s) = \frac{G_2(s)}{G_1(s)}$ (合点前未变函数 G_2 除于前移函数 G_1)

(7) 合点后移等效转换: $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ (合点前未变函数 G_2 乘后移函数 G_1)

(8) 分点互移等效转换: 其他不变。

(9) 合点互移等效转换: 其他不变。

(10) 合点越过分点等效转换: 每个分支都加合点。

(11) 分点越过合点等效转换: 须加逆合点还原。

方框图归总等效转换要点：尽量通过同类点汇聚移动等效变换（合点向合点移动，分点向分点移动）化交连回路为非交连回路。除非必要，一般不进行合点越过分点或分点越过合点的移动。

2. 信号流图及梅逊（Mason）公式

信号流图是和方框图本质相同的图解分析方法，比方框图法更简洁、更高效。信号流图法的节点相当于方框图法中的合点或分点。连接两个节点的有向线段为**支路**，相当于方框图法中的方框。支路上标注的增益或传递函数称为**传输**。只有输出支路的节点叫输入节点或源点。只有输入支路的节点叫输出节点或阱点。既有输入支路又有输出支路的节点叫**混合节点**。混合节点的变量名指节点输出变量名。沿各条支路箭头方向形成的途径叫**通路**。如果通路 with 任意一节点相交不多于一次的则称为**开通路**。如果一些回路没有任何公共的节点，则称为**不接触回路**。回路各支路传输的乘积称为**回路增益**。

梅逊公式用来计算系统总的传递函数。

$$\text{梅逊公式: } G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n p_k \Delta_k \quad (1.2.22)$$

式中： Δ 为特征式， $\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_a L_b - \sum L_a L_b L_c + \cdots$ ； n 为从输入节点到输出节点前向通路的总条数； p_k 为从输入节点到输出节点第 k 条前向通路的传递函数； $\sum L_a$ 为所有不同回路的传递函数之和； $\sum L_a L_b$ 为所有两两互不接触回路的传递函数乘积之和； $\sum L_a L_b L_c$ 为所有三个互不接触回路的传递函数乘积之和； Δ_k 为与第 k 条前向通路不接触部分的 Δ 值。

3. 微分方程与传递函数间的变换

一个单输入单输出 n 阶线性时不变的动态系统，既可以用微分方程表示，又可用传递函数表示。若已知微分方程为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m r^{(m)} + b_{m-1}r^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{r} + b_0r \quad (1.2.23)$$

则可写出对应的传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (1.2.24)$$

反之亦然。两种模型中的参数， $\{a_i, i=1, \cdots, n\}$ 和 $\{b_j, j=0, 1, \cdots, m\}$ ，是完全相同的。

4. 状态空间模型与传递函数模型间的变换

若已知一个传递函数模型，则可按能控标准形的状态变量定义写出对应的单输入单输出系统状态空间模型：

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.2.25)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.2.26)$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.27)$$

$$C = [(b_0 - b_na_0)(b_1 - b_na_1)\cdots(b_{n-1} - b_na_{n-1})], D = b_n \quad (1.2.28)$$

若已知一个状态空间模型，则可按式 (1.2.29) 变换成系统传递矩阵形式的传递函数模型。

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.2.29)$$

对于多输入多输出系统, 设 $G(s)$ 为系统传递矩阵, 则有

$$G(s) = [(G_{ij}(s))] (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, r) \quad (1.2.30)$$

$G_{ij}(s)$ 表示输入变量 $r_j(t)$ 至输出变量 $y_i(t)$ 的传递函数。

四、控制系统的典型环节及动态特性

常见的典型环节的传递函数和单位阶跃响应函数见表 1.2.1。

表 1.2.1 典型环节的特性一览

环节名称	传递函数	单位阶跃响应函数
比例 (P 控制器)	k	$y(t) = k \cdot 1(t)$
积分	$\frac{1}{Ts}$	$y(t) = \frac{1}{T}t$
理想微分	$T_d s$	$y(t) = T_d \delta(t)$
实际微分	$\frac{T_d s}{T_c s + 1}$	$y(t) = \frac{T_d}{T_c} e^{-t/T_c}$
惯性	$\frac{k}{Ts + 1}$	$y(t) = k(1 - e^{-t/T})$
振荡	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \times \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$ ($0 < \zeta < 1$)
迟延	$e^{-\tau s}$	$y(t) = 1(t - \tau)$
PI	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$	$u(t) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} t\right)$
理想 PD	$K_p (1 + T_d s)$	$u(t) = K_p (1 + T_d \delta(t))$
实际 PD	$K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_c s}\right)$	$u(t) = K_p \left[1 + \frac{T_d}{T_c} \exp(-t/T_c)\right]$
理想 PID	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$	$u(t) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i} t + T_d \delta(t)\right]$
实际 PID	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_c s}\right)$	$u(t) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i} t + \frac{T_d}{T_c} \exp(-t/T_c)\right]$

五、控制系统数学模型的建立

(一) 机理分析建模

1. 机理分析建模方法的步骤

- (1) 将待建模系统划分成若干元件, 确定各元件的输入量及输出量。
- (2) 根据反映元件特性的物理或化学定理或定律 (例如牛顿定律、能量守恒定律、基尔

霍夫定律、欧姆定律和热力学和流体力学的一些定律等), 列写出各元件的基本动态方程式。忽略一些次要因素并适当简化。

(3) 消除元件动态方程式中的中间变量, 推导元件的输入输出关系式。

(4) 整理出系统的输入输出关系式。

2. 机理分析建模典型范例

(1) 机械系统: 由弹簧—重块—阻尼器组成的机械位移系统

图 1.2.1 所示的是一个弹簧—重块—阻尼系统。当外力 $F(t)$ 作用到重块 m 上时, 重块 m 将产生位移 $y(t)$ 。

机理建模:

1) 根据牛顿第二定律有

$$F(t) - F_1(t) - F_2(t) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

式中: $F_1(t)$ 为阻尼器阻力, 根据阻尼定律有 $F_1(t) = f \frac{dy(t)}{dt}$; $F_2(t)$

为弹簧反作用力, 根据弹性定律有 $F_2(t) = ky(t)$ 。

整理可得

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k} F(t)$$

式中: f 为阻尼系数; k 为弹簧系数。

2) 令 $T = \sqrt{m/k}$, $\zeta = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$, $K = \frac{1}{k}$, 则有标准形式的二阶线性微分方程

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = KF(t)$$

式中: T 为系统的时间常数; ζ 为阻尼比; K 为放大系数, 或称增益。

3) 进行拉氏变换后可整理得到该系统的传递函数模型:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

(2) 电气系统: RLC 电路

如图 1.2.2 所示 RLC 电路是电气系统中常见的电路。设图中的电阻 R 、电感 L 、电容 C 均为常值, $u_i(t)$ 为输入电压, $u_o(t)$ 为输出电压。

机理建模:

根据基尔霍夫定律、欧姆定律、电容和电感定律, 可写出微分方程组:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_i(t) \\ i = C \frac{du_o(t)}{dt} \end{cases}$$

整理得

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

RC 串并联电路

图 1.2.3 所示为一个 RC 串并联电路。图中, R_1 和 R_2 为电阻, C 为电容, $u_i(t)$ 为输入电压, $u_o(t)$ 为输出电压。

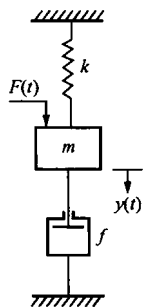


图 1.2.1 弹簧—重块—阻尼系统