6

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解

第四版

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

6

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 6/费定晖,周学圣编演.—4版.—济南:山东科学技术出版社,2012
ISBN 978-7-5331-5895-8

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120112 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 6

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098071

印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031 电话：(0536)2116806

开本：787 mm × 1092mm 1/16
印张：13.5
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5895-8
定价：19.00 元

第四版前言

本书自 1979 年出版发行以来，历经 30 多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书 4462 题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，“只看不练假把式”，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解，更不要查抄解答和答案，而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考，必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题，然后再查看书中是怎样解答的，比较自己的解答和书中解答的异同，从中找出差距，找出自己的问题所在，甚至找出书中解答的的错误和不足之处，进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能，任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力，责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血，在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订，面对如此庞大的图书，限于本人水平，书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在新版中改正。

费 定 晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的数学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录

第八章　多重积分和曲线积分

§1. 二 重 积 分

1° **二重积分的直接计算法**　所谓连续函数 $f(x,y)$在有限封闭可求积二维区域 Ω 上的二重积分，指的是

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$，而求和是对所有使$(x_i,y_j)\in\Omega$ 的那些 i,j 值进行的.

若区域 Ω 由以下不等式给出：

$$a\leqslant x\leqslant b,\qquad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$和 $y_2(x)$为闭区间$[a,b]$上的连续函数，则相应的二重积分可按以下公式来计算：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2° **二重积分中的变量代换**　若连续可微函数

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v)$$

给出平面 Oxy 上的有限闭区域 Ω 与平面 Ouv 上的区域 Ω'之间的一一映射，且雅可比行列式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

的符号在 Ω 内保持不变(可能在零测度集上有例外)，则成立以下公式：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]|I|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例如，根据公式 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 时，有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

【3901】　把积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n}\quad y=\frac{j}{n}\quad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算此积分.

解　由于
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\to\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

其中
$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2},$$

故 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{4}$.

【3902】　用直线
$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\quad (i,j=0,1,\cdots,n)$$

把区域 $1\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在此区域内的下积分和 $\underline{S}$ 与上积分和 $\overline{S}$. 当 $n\to\infty$时，上积分和与下积分和的极限等于什么？

解　下积分和　$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\right\}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$， $\sum\limits_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$；

而上积分和 $\bar{S}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left\{\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\right\}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$

当 $n\to\infty$ 时，$\underline{S}$ 与 $\bar{S}$ 的极限均等于 $\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

【3903】 用一组顶点 A_{ij} 位于整数点的正方形作为积分域的近似域，并取被积函数在每个正方形距原点最远的顶点之值，近似地计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$，并与精确值加以比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\approx0.196+0.371+0.343+0.312+0.177+0.329+0.302+0.154+0.285\approx2.470,$$

即 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\approx9.880.$

下面计算积分的精确值：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=4\int_0^5\ln(y+\sqrt{24+x^2+y^2})\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx=4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx-2\int_0^5\ln(24+x^2)dx.$$

由于 $\int\ln(24+x^2)dx=x\ln(24+x^2)-\int\frac{2x^2}{24+x^2}dx=x\ln(24+x^2)-2x+\frac{24}{\sqrt6}\arctan\frac{x}{\sqrt{24}}+C.$

从而， $2\int_0^5\ln(24+x^2)dx=\left[2x\ln(24+x^2)-4x+\frac{48}{\sqrt6}\arctan\frac{x}{\sqrt{24}}\right]\Big|_0^5=20\ln7-20+8\sqrt6\arctan\frac{5}{\sqrt{24}}$；

又 $4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx=4[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)]\Big|_0^5+4\int_0^5\frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$

$$=20\ln7+4\int_0^5\frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令 $x=5\sin t$，有

$$\int_0^5\frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-25\cos^2t+25}{5\cos t+7}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\cos t-7)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{24}{5\cos t+7}dt$$

$$=(7t-5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-24\left[\frac{1}{\sqrt6}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt6}\tan\frac{t}{2}\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7\pi}{2}-5-4\sqrt6\arctan\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而， $4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx=20\ln7+14\pi-20-16\sqrt6\arctan\frac{2}{\sqrt{24}}.$

注意到 $$2\arctan\frac{2}{\sqrt{24}}+\arctan\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{\pi}{2},$$

最后便得到 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=14\pi-4\sqrt{24}\left(2\arctan\frac{2}{\sqrt{24}}+\arctan\frac{5}{\sqrt{24}}\right)=2\pi(7-\sqrt{24})\approx13.19.$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的区域都被忽略，因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差 $\frac{4.31}{13.19}\approx32.7\%$.

注意 求 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5\frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}}=2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在3937题以后才开始使用极坐标，故本题仍用直角坐标进行计算.

【3904】 用直线 $x=$常数，$y=$常数，$x+y=$常数把积分域 S 分为四个相同的三角形，并取被积函数在每个三角形的质心之值，近似地计算积分

$$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\ dS.$$

其中 S 是以直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 为边的三角形.

解 我们只须以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分积分域 S，即得四个相同的三角形，它们的面积均为 $\frac{1}{8}$，质心为 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$，于是，得此积分的近似值为

$$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\ dS\approx\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)\approx\frac{1}{8}(0.577+0.816+2\cdot 0.912)\approx 0.402,$$

其精确值为 $$\iint\limits_S\sqrt{x+y}dS=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\ dy=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^{\frac{3}{2}})dx=\frac{2}{5}=0.4.$$

【3905】 把积分域 $S:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子区域 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$. 怎样的值 δ 能保证不等式

$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^n\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立？其中 $(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i，则

$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^n\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|=\left|\sum_{i=1}^n\iint\limits_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\iint\limits_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|dS\leqslant\sum_{i=1}^n\iint\limits_{\Delta S_i}\omega_i dS=\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta S_i.$$

由于积分域 $S:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的面积等于 π，故只要 $\omega_i<\frac{0.001}{\pi}$，便能满足原不等式的要求. 但因为

$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}|\sin(x_i'+y_i')-\sin(x_i+y_i)|\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}|(x_i'+y_i')-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}[|x_i'-x_i|+|y_i'-y_i|]\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}\sqrt{2[(x_i'-x_i)^2+(y_i'-y_i)^2]}^{*)}=\sqrt{2}\delta_i,$$

故只要取 $$\delta<\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\times 0.001\approx 0.00022,$$

即有 $$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^n\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001.$$

*) 对于任意非负实数 a，b 有

$$2ab\leqslant a^2+b^2\quad 或\quad (a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2),$$

从而，$a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

计算积分：

【3906】 $\int_0^1dx\int_0^1(x+y)dy$.

解 $\int_0^1dx\int_0^1(x+y)dy=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=1.$

【3907】 $\int_0^1dx\int_{x^2}^x xy^2dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x xy^2 dy=\int_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx=\frac{1}{40}$.

【3908】 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr$.

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi a^3}{3}$.

【3909】 设 R 为矩形 $a\leqslant x\leqslant A,b\leqslant y\leqslant B$,函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在相应区间上连续,证明等式:

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy=\int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法,不妨先对 y 后对 x 积分,即得

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy=\int_a^A dx\int_b^B X(x)Y(y)dy=\int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

【3910】 设 $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$,计算 $I=\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy$.

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算,即得

$$I=\int_a^A[F'_x(x,B)-F'_x(x,b)]dx=F(x,B)\Big|_a^A-F(x,b)\Big|_a^A=F(A,B)-F(a,B)-F(A,b)+F(a,b).$$

【3911】 设 $f(x)$ 为闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内的连续函数,证明不等式:

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

且仅当 $f(x)=$常数时等号成立.

证明思路 首先,证明不等式: $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$,

事实上,只要在不等式 $\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy\geqslant 0$ 中将被积函数 $[f(x)-f(y)]^2$ 展开,并注意 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy$,即可获证.当 $f(x)=$常数时,显然上式中等号成立.

其次,证明:当 $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$ 时,则 $f(x)=$常数.事实上,此时有

$$\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=0.$$

对函数 $F(x)=\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$ 利用 2205 题的结果,即可得 $\int_a^b[f(a)-f(y)]^2dy=0$.再次对函数 $G(y)=[f(a)-f(y)]^2$ 利用 2205 题的结果,即得 $f(x)=$常数.

证 因为

$$0\leqslant\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2+(b-a)\int_a^b f^2(y)dy,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

当 $f(x)=$常数时,显然上式中等号成立.反之,设上式中等号成立,则有

$$\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的非负连续函数,故 $F(x)\equiv 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.特别 $F(a)=0$,即 $\int_a^b[f(a)-f(y)]^2=0$.又由于函数 $G(y)=[f(a)-f(y)]^2$ 是 $a\leqslant y\leqslant b$ 上的非负连续函数,故 $G(y)\equiv 0$ $(a\leqslant y\leqslant b)$.因此,$f(y)\equiv f(a)$ $(a\leqslant y\leqslant b)$,即 $f(x)=$常数.证毕.

【3912】 下列积分有怎样的符号?

(1) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$; (2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$; (3) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)dxdy$?

解 (1)由于 $0<x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant\ln1=0$,且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$,故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(2)我们有 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2-I_3$,其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

显然 $$0<I_1<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,\qquad I_2>0,\qquad I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\pi=2\pi,$$

故 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(3)我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant1\\-1\leqslant y\leqslant1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant1\\-1\leqslant y\leqslant0}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant1\\0\leqslant y\leqslant1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零,第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数,因而,积分值是正的. 于是,原积分是正的.

【3913】 求函数 $f(x,y)=\sin^2x\sin^2y$ 在正方形:$0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi$ 内的平均值.

提示 所求平均值为积分 $\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 平均值 $I_0=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}\sin^2x\sin^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^\pi\sin^2x\mathrm{d}x\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x\right)\Big|_0^\pi\right]^2=\frac{1}{4}$.

【3914】 利用中值定理估计积分 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2x+\cos^2y}$.

解题思路 注意到积分域的面积为 200,故由积分中值定理知,

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\quad 其中(\xi,\eta)\in区域|x|+|y|\leqslant10.$$

显然有 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant2$,可以证明必有 $0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$.

于是,可知 $1.96<I<2$.

解 由于积分域的面积为 200,故由积分中值定理知,

$$I=\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot200=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\tag{1}$$

其中(ξ,η)为区域$|x|+|y|\leqslant10$ 中的某点.

显然 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant2$,我们证明必有

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2.\tag{2}$$

由于函数 $\cos^2x+\cos^2y$ 在有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant10$ 上的最大值为 2,最小值为 0. 从而,连续函数 $\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}$在有界闭区域$|x|+|y|\leqslant10$ 上的最小值为$\frac{1}{102}$,最大值为$\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$,则由(1)式知,

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant10}\left(\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0.$$

但 $f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}$是非负连续函数,从而,必有 $f(x,y)\equiv0$ (在区域$|x|+|y|\leqslant10$ 上),即 $\cos^2x+\cos^2y\equiv2$ (在区域$|x|+|y|\leqslant10$ 上). 这显然是错误的. 由此可知,$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$. 同理可证 $\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$. 于是,(2)式成立. 从而,得 $\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}$, 即 $1.96<I<2$.

【3915】 求圆$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$上的点到原点的距离之平方的平均值.

解题思路 平均值$I_0=\dfrac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 可以求得

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b^2+\frac{R^2}{4},\qquad \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

从而,$I_0=a^2+b^2+\dfrac{R^2}{2}$.

解 平均值$I_0=\dfrac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由于

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi R^2}\int_{a-R}^{a+R}\mathrm{d}x\int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}}y^2\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{3\pi R^2}\left\{6b^2\int_{a-R}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\,dx+2\int_{a-R}^{a+R}[R^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}dx\right\}\\
&=\frac{2b^2}{\pi R^2}\left[\frac{x-a}{2}\sqrt{R^2-(x-a)^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{R}\right]\Bigg|_{a-R}^{a+R}+\frac{2}{3\pi R^2}\left\{\frac{x-a}{8}[5R^2-2(x-a)^2]\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{x-a}{R}\right\}\Bigg|_{a-R}^{a+R}\\
&=\frac{2b^2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2}+\frac{1}{3\pi R^2}\cdot\frac{3\pi R^4}{8}=b^2+\frac{R^2}{4},
\end{aligned}$$

同理,有
$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

于是,$I_0=a^2+b^2+\dfrac{R^2}{2}$.

在问题3916~3922中,对二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$内按所给区域$\Omega$依两个不同的顺序安置积分的上下限.

【3916】 Ω—以$O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,1)$为顶点的三角形.

解 为方便起见,将二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$记作$I$. 于是,

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3917】 Ω—以$O(0,0)$,$A(2,1)$,$B(-2,1)$为顶点的三角形.

提示 注意直线OA的方程为$y=\dfrac{1}{2}x$,OB的方程为$y=-\dfrac{1}{2}x$及AB的方程为$y=1$.

解 如图8.1所示,OA的方程为$y=\dfrac{1}{2}x$,OB的方程为$y=-\dfrac{1}{2}x$,AB的方程为$y=1$. 于是,

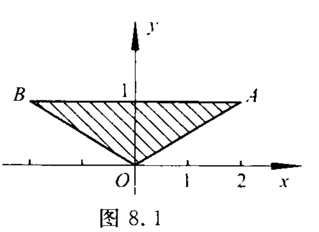

图 8.1

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x,y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

【3918】 Ω—以$O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,2)$,$C(0,1)$为顶点的梯形.

解 如图8.2所示,BC的方程为$y-1=x$. 于是,

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{y-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

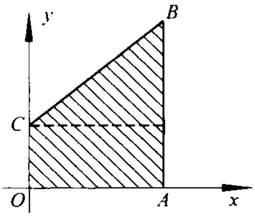

图 8.2

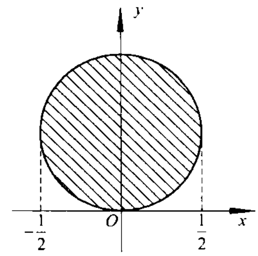

图 8.3

【3919】 Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

解 $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

【3920】 Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant y$.

提示 积分域 Ω 为 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

解 如图 8.3 所示. 积分域 Ω 为 $x^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant(\frac{1}{2})$，其围线为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

于是，

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3921】 Ω—被曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所包围的区域.

解 曲线 $y=x^2$ 及 $y=1$ 的交点为$(1,-1)$，$(1,1)$. 于是，

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

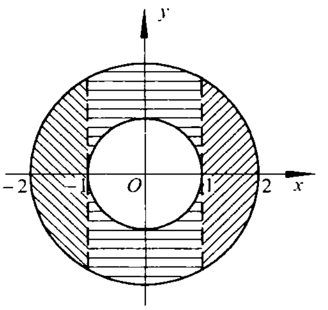

图 8.4

【3922】 Ω—圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 如图 8.4 所示. 若先对 y 后对 x 积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\right.$$
$$\left.+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\right\}+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若先对 x 后对 y 积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\left\{\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right.$$
$$\left.+\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right\}+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

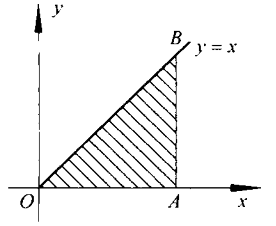

图 8.5

【3923】 证明狄利克雷公式：

$$\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{y}^{a}f(x,y)\mathrm{d}x\quad(a>0).$$

证明思路 注意公式左端的逐次积分，等于积分

$$\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Ω 为三角形域 OAB：$O(0,0)$，$A(a,0)$，$B(a,a)$，改变积分的顺序，公式即可获证.

证 公式左端的逐次积分，等于积分 $\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 为三角形域 OAB(图 8.5)：$O(0,0)$，$A(a,0)$，

$B(a,a)$. 对于该积分，若化为先对 x 后对 y 的逐次积分，即为公式的右端. 于是，本题获证.

在下列积分中改变积分的顺序：

【3924】 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域的围线为 $y=x$，$y=2x$ 及 $x=2$，它是一个三角形域，其顶点为 $(0,0)$，$(2,2)$ 及 $(2,4)$.

解 积分域的围线为：$y=x$，$y=2x$ 及 $x=2$，如图 8.6 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

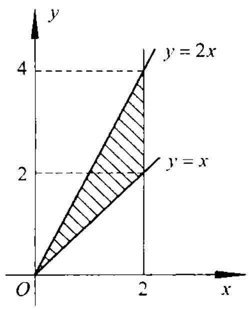

图 8.6

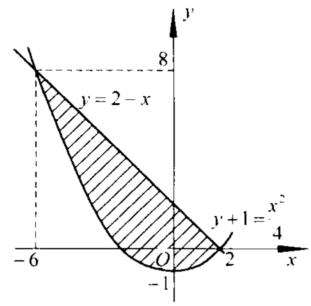

图 8.7

【3925】 $\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域的围线为 $y=2-x$ 及 $y+1=\dfrac{x^2}{4}$，其交点为 $(2,0)$ 及 $(-6,8)$.

解 积分域的围线为：$y=2-x$ 及 $y+1=\dfrac{x^2}{4}$，其交点为 $(2,0)$，$(-6,8)$，如图 8.7 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^8 \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3926】 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域的围线为 $y=x^2$ 及 $y=x^3$，其交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$.

解 积分域的围线为：$y=x^2$ 及 $y=x^3$，其交点为 $(0,0)$，$(1,1)$，如图 8.8 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

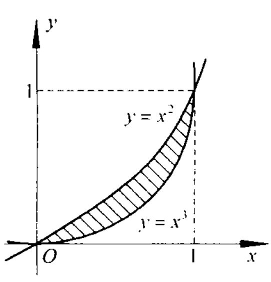

图 8.8

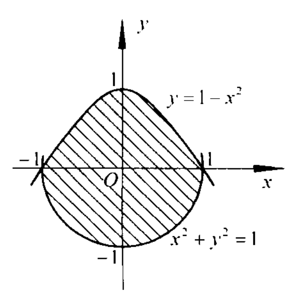

图 8.9

【3927】 $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域的围线为圆 $x^2+y^2=1$ 的下半部分及抛物线 $y=1-x^2$，其交点为 $(-1,0)$ 及 $(1,0)$.

解 积分域的围线为圆 $x^2+y^2=1$ 的下半部分及抛物线 $y=1-x^2$，如图 8.9 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3928】 $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域的围线为圆 $x^2+y^2=2x$ 或 $(x-1)^2+y^2=1$ 及直线 $y=2-x$，其交点为 $(2,0)$ 及 $(1,1)$.

解 积分域的围线为圆 $x^2+y^2=2x$ 或 $(x-1)^2+y^2=1$ 及直线 $y=2-x$，其交点为 $(2,0)$，$(1,1)$，如图 8.10 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

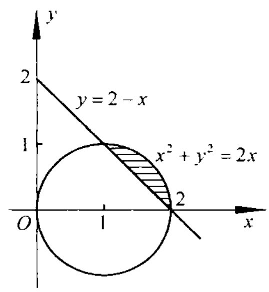

图 8.10

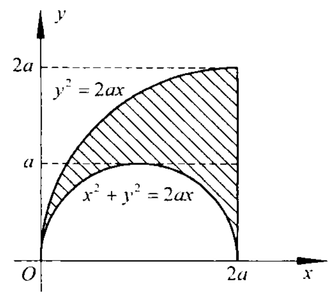

图 8.11

【3929】 $\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y \quad (a>0).$

提示 注意积分域的围线由圆 $(x-a)^2+y^2=a^2\,(y\geqslant 0)$，抛物线 $y^2=2ax\,(y\geqslant 0)$ 及直线 $x=2a$ 组成，其交点为 $(0,0)$ 及 $(2a,0)$.

解 积分域由围线 $(x-a)^2+y^2=a^2\,(y\geqslant 0)$，$y^2=2ax\,(y\geqslant 0)$ 及 $x=2a$ 组成. 如图 8.11 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x \right\} + \int_a^{2a} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3930】 $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 积分域如图 8.12 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

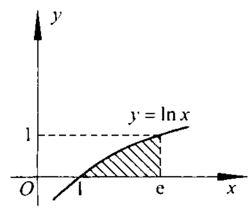

图 8.12

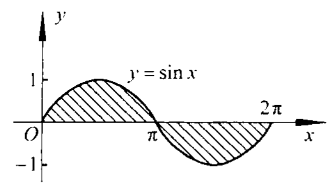

图 8.13

【3931】 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 积分域如图 8.13 中阴影部分所示. 由于 $y=\sin x$ 的反函数，当 y 从 0 变到 1 时为 $x=\arcsin y$，当 y 从 1 变到 -1 时 $x=\pi-\arcsin y$，当 y 从 -1 变到 0 时为 $x=2\pi+\arcsin y$，故改变积分的顺序，即得

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

计算下列积分：

【3932】 $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 Ω 是被抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}\,(p>0)$ 所包围的区域.

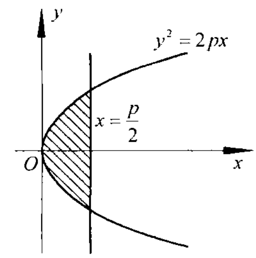

图 8.14

解 积分域如图 8.14 所示. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{2}{3}x\sqrt{(2px)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{p^5}{21}.$$

【3933】 $\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}\ (a>0)$，其中 Ω 是以圆心在点 (a,a) 半径为 a 的圆周（它与坐标轴相切）的较短弧和坐标轴为界的区域.

提示 注意积分域 Ω 的围线为圆 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 与两坐标轴相切的较短弧及直线 $x=0$，$y=0$，因而，当 x 从 0 变到 a 时，对于每一个固定的 x，y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$.

解 如图 8.15 所示. 当 x 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 x，y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$. 于是，

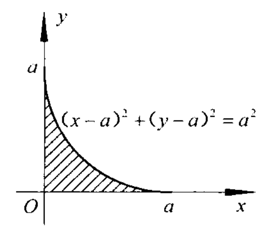

图 8.15

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^a\frac{a\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}-\int_0^a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$$

【3934】 $\iint\limits_{\Omega}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是以 a 为半径，坐标原点为圆心的圆.

提示 原式 $=\int_{-a}^{a}|x|\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}|y|\,\mathrm{d}y$. 并注意被积函数均为偶函数及积分区间的对称性.

解 $\iint\limits_{\Omega}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}|xy|\,\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)|x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^a(a^2-x^2)x\,\mathrm{d}x=\frac{a^4}{2}.$

【3935】 $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是以 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$ 和 $y=3a\,(a>0)$ 为边的平行四边形.

提示 宜选择先对 x 后对 y 积分较好.

解 如图 8.16 所示. 当 y 从 a 变到 $3a$ 时，对于每一固定的 y，x 从 $y-a$ 变到 y. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}+ay^2-\frac{(y-a)^3}{3}\right]\mathrm{d}y=\frac{168a^4}{12}=14a^4.$$

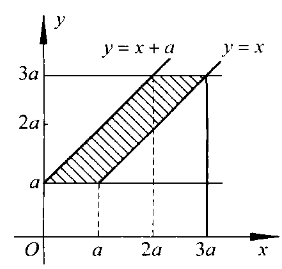

图 8.16

【3936】 $\iint\limits_{\Omega}y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是被横轴和摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的第一拱所包围的区域.

提示 利用 2281 题及 2282 题的结果.

解 $\iint\limits_{\Omega}y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}y^2\,\mathrm{d}x=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\,\mathrm{d}t=\frac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\,\mathrm{d}u$

$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\,\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^8u\,\mathrm{d}u\right\}=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8u\,\mathrm{d}u\right\}=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\,\mathrm{d}u$ *)

$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2}$ **) $=\frac{35}{12}\pi a^4.$

*） 利用 2282 题的结果.