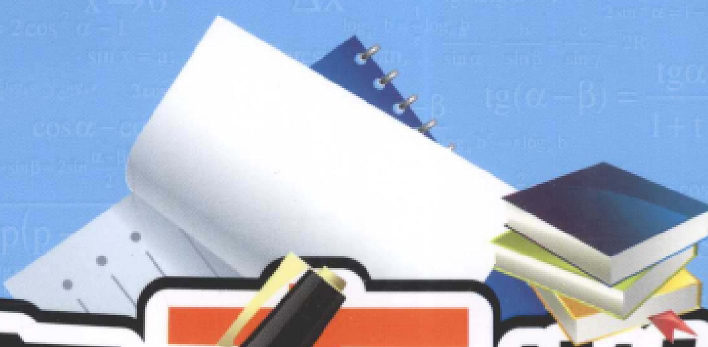
李红庆◎编著



高考数学

圈题典释（第2版）

2010年海南华侨中学（3）、（4）班7名同学高考数学单科超800分。2011年（3）班又有5名同学高考数学单科超800分。是什么方法能让学生取得如此高分？数学怪人、苏步青数学教育奖得主——**特级教师李红庆**透露谜底。

温故——以高考真题为载体——研究解答机理为策略
知新——探究主干知识解答——洞察未来命题的走向

老师知道，你在大题面前有困难，它是你夺高分的瓶颈
请你记住，困难面前有圈题典释，它随时为你排忧解愁
早一天掌握核心考点，就多一份制胜把握
早一天参考圈题典释，名师伴你走向成功

清华大学出版社

高考数学

圈题典释（第2版）

主干知识独家解读

◎ **导数与函数**——用命题的逻辑性关系分析、解决问题

◎ **数列与推理**——归纳试题模型，用待定系数方法

◎ **三角函数及变换与解三角形**——角的变换、解三角形与算法思想

◎ **解析几何**——注重运算细腻处理、选择灵活运算手段与策略

◎ **空间几何与向量**——底面平面几何性质，平面法向量的科学设置

◎ **统计与概率**——注意过程事件的设置与特征量的处理

高考牵动着每位学子的心，更承载着无数家庭的希望。而数学，则是在高考中被视为非常重要的一门学科。为了让众多学子不再苦苦地在数学试题的海洋中茫然地向前漫游，在题海中修炼了几十年成正果的李红庆特级教师精心编著了《高考数学圈题典释》，这本书就像是一盏启明灯，点亮前行的方向，使无数学子顺利地驶向高考数学成功的彼岸。在此书基础上的《高考数学圈题典释（第2版）》又融入了新的知识点与例题，贯穿高考试题的设计思路、解答过程和思想方法来进一步迎合新一年的高考数学方向，为考生指引前行的道路。

清华大学出版社数字出版网站
WQBook 文泉书局
www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-30649-8

9 787302 306498 >
定价：33.00元

高考数学圈题典释
(第 2 版)

李红庆　编　著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据历年高考数学试题，圈选其中部分经典试题(成书时有适当修改，因而不能作为真题真解的考证的依据)，中学特级教师、苏步青数学教育奖获得者李红庆亲自典释．解答中透露了李老师的解题思想、方法与为师之道，也介绍了李老师多年来对高考数学试题的研究和高中教学成果，精辟地解析了高考数学的主干知识的经典试题，具有较强的针对性和实用性，尤其是部分解题方法，高考试题的解题机理分析是非常独特、科学并且具有一般性、逻辑性的．本书还对高考的主干内容每章配了两篇研究论文，对试题的预测、解题方法做了些研究．

本书可供广大高中学生，特别是高中毕业生参考使用，也可以作为高中数学教师和教育研究工作者教学与研究高考试题的思想方法的工具书．

图书在版编目(CIP)数据

高考数学圈题典释/李红庆编著．--2 版．--北京：清华大学出版社，2013
ISBN 978-7-302-30649-8

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①中学数学课—高中—题解—升学参考资料　Ⅳ．①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 272042 号

责任编辑：郑期彤
封面设计：杨玉兰
责任校对：李玉萍
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn,010-62791865
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：190mm×260mm　印　张：16.75　插　页：1　字　数：408 千字
版　　次：2012 年 2 月第 1 版　　2013 年 1 月第 2 版　　印　次：2013 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：33.00 元

产品编号：050042-01

推 荐 序

高考，每年都牵动着成千上万学子的心，是人生的一次关键性选择，而数学，在高考中被视为非常重要的一门学科. 历年来，多少学子为数学发愁，多少人曾在数学题目的海洋中艰难地向前游，然而数学试题的海洋无边无际，许多人不禁烦恼自己很努力地向前游，却始终找不到正确的方向.

为了让众多学子不必苦苦地在数学试题的海洋中茫然地向前漫游，在题海中修炼了几十年成正果的特级教师李红庆老师特地为我们编写了这本独特的书——《高考数学圈题典释》. 本书就像是一个指南针，让我们在无边无际的数学试题的海洋中找到方向，能够更顺利地驶向高考数学成功的彼岸.

李老师有许多独创的解法，比如递推数列问题中的“多什么，加什么”、“期待着”；线性规划最优解中的“姑娘为她心爱的兵哥哥送行离别处”；高次因式分解中的“一看二试三拆”，“龙配龙，凤配凤，屎壳郎就配臭虫”；解析几何中的“分久必合，合久必分”——辩证地处理化简与化繁. 在授课的时候，李老师经常展现出他独特的风格及想法，对一些比较难以理解和记忆的知识用有趣的代表词来讲解，有趣又容易深刻记忆. 比如在讲解三角函数比较大小的时候，李老师就曾经将区域划分成“楚河汉界”等，还有一些特殊的图形也赋予形象的比喻，让人印象深刻，当然这些术语、比喻只有作为学生的我们才能感受深切，本书中或多或少也有所流露.

作为李老师的学生，我们很高兴能看到这本书的出版. 似曾相识的题目、解法和点评，让现在的我们仿佛回到了高中时期那一堂堂思维激荡、妙趣横生的数学课上.

李老师是一位非常独特的老师，不仅在于他多年积累的解题经验，更在于他对教育的认识和育人的方法上. 在课堂上，他不反对学生上课睡觉. 每每学生感到困倦时他会示意学生睡上 5 分钟，冲淡一点困意后便于学生更好地集中精力听课，这是以往任何一位老师都不会允许的事情，这让我们既意外又惊喜. 这个方法还特别有效，听课效率大大提高了. 平时李老师还鼓励大家把自己的解题方法直接呈现出来，不管对还是错都会给予鼓励，因此课堂气氛往往都比较轻松. 他的很多教学思路都非常独特和新颖，便于理解和掌握，不受教科书的影响，突破很多局限，能够真正帮助学生打开数学思维. 让我印象比较深刻的是李老师对数列的解题方法，不像一般教科书上面的需要通过“多步计算”，然后找出推理过程，而是直接对数列进行变换，最后得出结果. 这种方法基本上可以解决递推数列的一般情况，既快捷又容易掌握. 对于一些计算，通过“化繁”的方法可以更加快速准确地得到结果，这种思路是我们之前从未有过的，而这恰恰是独立思考所得出的结果. 正因如此，李老师的教学方法帮我们打开了思路，鼓励自己原创性的想法，不再禁锢于教科书以及参考书的解题方法. 正所谓“不管黑猫白猫，捉到老鼠就是好猫”. 也许是因为年轻时候的经历，李老师有一种敢说敢做的坦率，有时候我觉得他更像一位在讲台上谈古论今的大学教授. 看到我们整夜为高考奋战，他总是讲述起他在我们这个年龄时捉小鱼儿、打雪仗的往事，并提倡我们多休息多玩耍，还有“小考小玩，大考大玩”一说. 李老师看人的眼光十分长远，不会单以成绩的高低论英雄，他给我们更

多的是立足于整个人生的建议. 正因为这样，我才能从面对数学无从下手慢慢进步成不怕困难、勤思考善总结. 进入大学后，很多高中的解题方法渐渐淡忘了，但最基本的思路还在，李老师那些妙趣横生的名言还在，这些思想一直引导着我在更为广博的知识海洋中畅游.

仔细阅读这本书，相信同学们也会和我们一样感受到李老师的睿智、敏捷和幽默. 虽然说中国的教育目前依然离不开呆板的应试模式，但李老师能够结合自身的经历把那些枯燥难懂的知识转变成一个又一个令人称奇的小故事，为我们提供了一个学术上的桃花源. 我们都十分感谢李老师三年来的教导，相信不仅是我们，还有曾经听过李老师讲课的同学，抑或是即将开始这本书学习之旅的你们，都会受益匪浅的.

现在，李老师出版的这本《高考数学圈题典释》正是他多年教学研究经验的成果，里面的解题思路和解题方法都是独特而新颖的，且便于掌握和理解.

俗话说：外行看热闹，内行看门道. 李老师作为高考试题研究、评价、分析和省、市调研试题的命题专家，通晓国家和各省份高考数学试题的考点. 其实每年的高考试题从内容、题型、解题的思想方法变化不大，考点和形式也逐渐企稳，选择高考真题这一载体作为“温故”的平台，剖析高考真解的思想方法、逻辑关系、命题意图，研究常考试题的模型与创新解法，“知新”未来高考试题的走向.

本书选取了高考数学中主干知识的六个模块——函数、导数及其应用；数列与推理；平面解析几何；空间几何、空间向量及其应用；统计与概率；三角函数及变换、解三角形. 本书追求的不是面面俱到，事实上，面面俱到也是不可能的，本书的亮点在于，圈出最重要的部分，有所突出，并各个击破，力求做到高效率. 该书确实是不可多得的一本奇书，里面的思想不同于众，有很多都是让我们感到颇有所获的思想.

最后，我们要感谢李红庆老师的教导，让我们取得今天的成绩，同时，也希望大家能够好好地利用这本独特的书，它将带你进入一个不一样的解题新天地，像一个指南针，让你在数学题目的海洋中找到一个方向，更好地驶向高考数学成功的彼岸.

庄晨、林怡、彭嘉佳
2011 年 11 月于北京

第 2 版前言

《高考数学圈题典释》自 2012 年 2 月问世以来，因其选题经典而系统、解法精巧而独创、试题预测前瞻而准确，具有较强的实用性、针对性和启迪性，深受广大读者的好评和热捧，曾数次加印以满足市场的急需．为了使本书与时俱进，更加契合学生的实际和高考试题的命题方向，经过广泛的市场调研，认真听取了广大教师和学生的修改意见，遂推出本书第 2 版．与第 1 版相比，第 2 版主要变化有两点：其一，选用 2012 年的高考试题替代了原书中年代较久远的高考试题；其二，选用 2012 年文、理姊妹高考试题替代了原书中纯理科的高考试题．由于经典的高考试题并非每年都能呈现，因此，经典而且代表一些解题方法和思想的试题在再版中也得以保留．章节设计是本书的最大亮点，尤其是章节中提到的不等式“$e^x \geqslant x+1$”和“$\ln(1+x) \leqslant x$”在 2012 年全国新课程文、理试题中表现得淋漓尽致.

本书的最大特点是所有的解答几乎都是笔者的独特解法，与原解答比较：思路更显清晰，操作更加简捷，方法更为一般．本书封面中提到笔者的高考成果是每年的每个班都有 4、5 个数学单科成绩超 800 分，这是什么概念？按正态分布计算，每个考生得 800 分的概率是 $P(X \geqslant \mu+3\sigma)=0.0013$．为什么笔者的教学有这么突出的成绩呢？您可以从“写在前面”和试题典释的字里行间中体察到笔者的求学从教的人生轨迹和严谨的治学态度.

《高考数学圈题典释》一书精选了 144 道高考试题，是高考数学试题所涉及的 6 个主干知识的考试热点和重点问题，其中不乏全国和省份高考数学试题中的压卷试题．每章配套两篇论文，辅佐了对试题典释的理解，对思想方法、题型的归纳总结.

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请广大读者不吝指正.

编　者

2012 年 11 月 11 日于海口

前 言

1972 年，11 岁正在读初一的我辍学了！为什么辍学？到现在也说不清、道不明. 也许是那个“宁可要社会主义的草，也不要修正主义的苗”的读书无用的年代，对前途充满迷茫吧；也许是纠结什么；也许是那个班主任兼数学老师出于政治考虑不喜欢我吧. 辍学的确给我的一生留下一点小小的缺憾，那个“人民教师”也给我幼小的心灵留下了一丝阴影，但他却成了我做教师生涯中的一面镜子. 从教 29 年来，我没有伤害过任何学生，哪怕是一个眼神，一句话. 即使是面对“最不可救药”的学生，我也会想尽办法帮助他们，从来没把开除或处分作为我的选项.

辍学后，我回家做了一年的放牛娃，之后跟着二叔和二哥从师学艺，断断续续做了近 9 年的木工，这就是我的同事经常称呼我“木匠”的来历. 应该说这 9 年并非枉然，我命运的改变、今天的成功与这 9 年的人生经历是分不开的，这 9 年在我成功的道路上打上了深深的烙印，也是我成为一名教师，尤其是成为一名学者型教师的第一笔财富. 一般来说，徒弟学艺 3 年才能出师，也就是说，学艺到了 3 年，师傅才告诉徒弟工艺技巧和相关数据，而且是慢慢地、一次只告诉一点点. 用今天的话来说，就是从师学艺的潜规则，在这个潜规则中我是幸运儿. 我当时就好像今天学生在接受老师灌输式教育，由于我完全是被动地接受工艺技巧和相关数据，就压根没往心里记. 两年后我独自一人去闯荡社会时存在的问题就暴露无遗. 1975—1976 年我离开家乡以木工的身份参加荆门 330 水泥厂的基础建设时，接受了加工工件的任务，由于我心中没有数据，不知道工件加工的大小在什么范围(只知道这些工件做成后才美观、匀称)，甚至连自己用的工具(锯子)的齿钝了，都不会开路锉齿. 有了这段经历，我才真正地体会到“书到用时方恨少，事非经过不知难”所蕴含的深刻哲理. 从此，我就开始从书中、从资料中、从同事的口中搜集各种木工工件的数据，践行各种木工工艺细腻的操作过程. 不久，我的木工手艺就有了长足的进步，同时，我也尝到了自主思考、探索发现的乐趣.

20 世纪 80 年代是一个理想激情飞扬、万象更新的年代. 虽然已经消逝久远了，但是那个时代永远停留在我们那个年代年轻人的记忆中，那个时代的青春不忧伤，阳光灿烂，那是中国最为理想的年代. 年轻人精神充实、面貌一新、追求理想、振兴国家、承担责任、激情飞扬、感情淳朴、传承使命、信仰坚定. 虽然国家百废待兴，物质还很匮乏，没有足够的岗位给年轻人施展才华，憧憬和缺憾交织在一起. 但是时代的号角已吹响，在时代的召唤声中，我也想读书考大学. 1981 年的某一天，在外出打工回家的路上，经过一个小木桥时，我向徒弟宣布了一个决定：“从明天起，本师傅开始读书学习，准备考大学！你们再拜其他师傅继续学艺吧！”徒弟很茫然：“师傅，您啥水平？还考大学！”我告诉徒弟：“我啥水平？告诉你，本师傅很善于思考，一定能考上大学！”说完为了表示决心，我将工具全扔到河里了. 事实上，一年后我不仅考上了大学，而且数学考了 119 分(满分 120 分，当时湖北省有一名满分)，是当年湖北省的第 2 名. 湖北省有多少重点中学，有多少比我聪明的高手都考不过我，原因很

简单，我是通过自学掌握的解题技能，并且当初摸索出来的解题思想方法一直支撑着我以后大学课程的学习和从教后的教学与教研工作. 1984 年我是学校首位获得“湖北省大学生优秀科研成果奖”的人，独自或与他人合作编著 10 多本著作，发表论文 130 多篇.

选择读书有两种方式，到学校插班学习和自学. 显然插班学习是不可能在很短的时间内将初中、高中的全部课程自学完成，所以必须走自学之路. 我自学的方法是圈阅课本中的相关概念，趁热完成课本上的习题，然后找相关的习题做，做完习题就对照答案，如果答案对了，就比方法，如果我做的方法没有答案中的方法好，那么就思考答案中的解题思想方法；如果我做的方法比答案的好，就思考这种方法能不能推广到一般情形，如果在一般情形该方法也可以使用的话，就把这种方法归纳总结成一个模式储存在大脑中备用.

1985 年 7 月，我大学毕业分配到石油部三机厂子弟学校当高中数学老师. 每接一个新班，第一节课上我都会说，有问题打断老师的讲课是允许的！特别是在授课时，学生若有什么疑问、有什么新的解法只要提出来，我就会把课停下来，由学生上台去讲解、去板书，并把学生的解题思想方法讲清楚，这样做教学效果是相当好的.

我认为学好数学关键是要养成好的思维习惯，探索一些好的解题思想方法，避免一些烦琐的解法与公式. 如见诸于教辅资料和高考真解中常用的利用韦达定理的关系得到 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ 就是一个烦琐的公式. 说它烦琐有两点理由：其一，由求根公式可以直接得到 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，而判别式 Δ 总是需要运算出来的；其二，在根式下运算 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$ 加大了出错的概率. 本书书名为《高考数学圈题典释》，书中的案例都来自高考真题(不是重复简单组合)，但不能作为真题真解的考证的依据，因为题目在三个方面有所改动：其一，由于中学数学教材的变化而引起的改动，例如把用反三角函数表示的角，就变成了求某角的某个函数值；其二，序号、标点符号的改变，由于选题跨越 30 多年，国家新闻出版总署对序号、标点符号的要求也发生了变化，本书对题干的序号、标点符号的使用做了统一；其三，题目是由笔者亲自解答的，解答过程中深深留下了笔者的特点，由于笔者的数学是自学的，思维比较特殊，再加在题海遨游 30 多年，练就一些独特的解题思想方法，有些解答的思想方法初看时，会有殊途而非同归的感觉，但如果你慢慢看，最后会悟出一个道理：真谛在此！圈题典释是选取有代表性的经典试题，做经典的解析.

由于长期养成终身学习、终身研究和对问题独特思考的思维习惯，我对高考数学主干知识的题型及解答都作了较为系统的研究，研究成果均写成了论文发表在相关的数学杂志上. 如对推理与递推数列的研究，就得到了绝大多数的数列最后归结都是等比数列或等差数列，与等比数列或等差数列比较，原则上多“什么”就加“什么”的思维方式，有关递推数列的解题方法在本书中以论文的形式介绍. 又如关于直线与圆锥曲线位置关系的研究，就得到了联立直线与圆锥曲线方程式，是“变繁”而非“化简”的处理方式，注意严谨思考与细心运算，利用整体思想来解决较难的问题. 再如函数、导数及其应用的研究，得到了导数在研究函数性质上的应用，近几年围绕着不等式 $e^x\geqslant x+1$ 和姊妹不等式 $\ln(x+1)\leqslant x$ 及其变式等命题，表面上是考分类讨论，实际上是考充要条件.

这几年我直接参与了新课程数学高考方案和考试说明的论证与讨论，连续几年代表海南

省考试局负责高考试题的分析与评价工作，加上长期追踪高考数学的变化与研究，从某种意义上讲，我也成为高考数学考试走向的预测者. 如本人在《试题调研》(2011)第 6 辑上发表论文和在《中学数学》(2011)第 4 期上发表的论文中，设 $f(x)=x\ln x+m(x^2-1)\,(m\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ) 当 $m=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 若当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 0$，求实数 m 的取值范围.

与新课标 2011 年高考压轴题的第 2)问是等价的，因为 2)如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$，求 k 的取值范围. 可变为：当 $x>1$ 时，$2x\ln x+(k-1)(x^2-1)<0$，求 k 的取值范围. ……①.

当 $0<x<1$ 时，$2x\ln x+(k-1)(x^2-1)>0$，求 k 的取值范围. ……②.

又如：令 $x=\dfrac{1}{t}$ ($t>1$)，则 $2\left(\dfrac{1}{t}\right)\ln\left(\dfrac{1}{t}\right)+(k-1)\left[\left(\dfrac{1}{t}\right)^2-1\right]>0$，得 $2t(-\ln t)+(k-1)(1-t^2)>0$，即当 $t>1$ 时，$2t\ln t+(k-1)(t^2-1)<0$.

所以，②与①是等价的，高考题实际上是：若 $x>1$，$2x\ln x+(k-1)(x^2-1)<0$ 时，求 k 的取值范围. 令论文中的 $m=\dfrac{k-1}{2}$，把闭区间改为开区间就完全一样了.

温故知新，作为一名善于预测高考试题命题走向的教师，高考试题好像每年都有变化，其实它的内容、考点、解题思想方法变化却不大. 因此，只有多做高考真题才能得到解高考试题的真功夫. 但高考试题的真解，由于命题专家受制于考试大纲、课程标准和对中学引领的作用，学生很难全盘接受高考的真解，尤其是高考压轴题的解答. 本书典释的含义是尽量把解答完整简捷地呈现出来，过程做清晰地剖析，逻辑性关系诠释到位.

这几年命制的省、市调研试题的应用意识较浓，丝毫没有书呆子纸上谈兵的东西. 本人尽管前前后后编著了十几本书，写过 130 多篇论文发表，但我最大的夙愿是能写一本经典不朽的高考试题典释书. 十分感谢清华大学出版社的高瞻远瞩，才使本书顺利出版发行. 在此，借本书出版之际，笔者万分感谢在初等数学的研究过程中给予关心、支持和指导的许多出版社、杂志社、报社的编辑老师；也万分感谢在高考试题研究过程中给予关心、支持的国家考试中心、中国教育学会考试专业会的专家；还要感谢长期参与合作和支持的同事、亲朋好友、大学的同班同学；特别感谢清华大学出版社的众编辑、人民教育出版社中学数学室主任章建跃编审、人民教育出版社白成友高级编辑、海南省继续教育中心书记吴一凡教授；感谢我大学同窗好友——武汉理科大学彭定赟教授对本书提出了宝贵的修改意见；感谢我大学同乡好友、书法家、企业家刘俊锋先生为本书赋词；感谢海南华侨中学 2010 届和 2011 届在京的学生庄晨、彭嘉佳、林怡、钟玲、陈凯翔、张舰、杨宗华、黄明浩(北大)、冯侨、王燕茹、冯学辉(中央财经)、葛枫、王元奇、王启俊、吴京宸、秦宇东(北林)、赖铭峰(华北电力)等同学为本书的推荐序、策划、校稿所做的工作；感谢海南华侨中学、海南省嘉积中学、海南中学、海南省国兴中学、海南省琼山中学、海口市第一中学、海南省屯昌中学、海南师范大学附属中学、海口市实验中学和海南省澄迈中学的领导、数学同行和广大 2012 届的学生对本书使用的支持和提出的宝贵修改意见；感谢同事徐香老师花费了大量的精力完成了对本书第一版的每道题的解答的审校；最后感谢我的妻子——毕明芳女士几十年坚定不移地支持我的初

等数学研究工作.

声明：本书中凡具有本人特点的解答和创意的知识产权属于清华大学出版社和本人共同拥有，任何个人和出版物未经过清华大学出版社和本人书面授权允许不能用在撰写论文和编著教辅资料，违者必究.

作　者

2011 年 10 月 25 日于海口

目　　录

第 1 章　函数、导数及其应用

1.1　函数、导数及其应用高考试题回眸、分析与预测

纵向观察近几年来全国高考数学试题中函数、导数及其应用的命题的走向，横向比较每年全国及各省份的 19 套试题，文理 37 份(江苏文理同卷)试题中函数、导数及其应用的命题趋势，就会发现函数、导数及其应用的命题经过了 6 种类型的演变.

(1) 由开始研究的含参量的三次多项式函数(包括由 e^x 与三次多项式函数的乘积而成的函数)和有理分式函数的单调性和极值问题、曲线和切线问题、用导数研究函数图像的大致形状来研究不等式的恒成立、方程根的个数等问题，这类题型应该说是第 1 阶段的试题.

(2) 由于三次多项式函数的导数是二次三项式，逐步演变成含有 $\ln(ax+b)$ (a , b 是常数，且 $a\neq 0$)与二次三项式或一次分式相加而成的函数，用导数研究函数的性质与类型①没有本质的区别，只不过是把研究区间由 $(-\infty,+\infty)$ 演变到了 $\left(-\dfrac{b}{a},+\infty\right)$，导数的分子还是二次三项式形式，这类题型应该说是第 2 阶段的试题.

(3) 综合考查函数的周期性、奇偶性、对称性等基本性质再结合导数及其应用来研究函数的或围成的区域的最值、定值及构建函数解决不等式等问题，这类题型没有构成阶段，只是昙花一现或对传统函数问题的回归或使用导数在解决某不等式的作用的偏爱.

(4) e^x 或 $\ln x$ 与一次函数相加或与一次分式函数相加类型，这类试题应该说是第 3 阶段的试题，在全国和各省份试题中都出现过.

(5) 由两个重要不等式 $e^x\geqslant x+1$ 和 $\ln(x+1)\leqslant x$ (实际上是一样的)构成的题型，这是现阶段命题的趋势.

(6) 把导数应用与数列、导数与不等式等结合，部分省份试题喜欢这类型的试题，但国家考试中心没有命制，考虑到新课标试题的大题数目只有 5 道，把导数与数列结合也是命题的选项. 应该说试题命题方向一直是由国家考试中心在引领，其他省份在跟进与发展，但到现在，有些试题的解答教师对解题机理还没搞明白，对解答心存疑惑，学生对解答也不明白，如国家考试中心命制的(2006. 全国Ⅱ. 理 20)、(2007. 全国Ⅰ. 理 20)中第(Ⅱ)问、(2010. 全国课标. 文、理 21)中第(Ⅱ)问. 含参变量的分类讨论的试题往往也是选择在函数、导数及其应用这个内容进行命题，含参变量的分类讨论问题，一直作为高考压轴题，年年都在考，教师天天在讲，考生天天在做，但考生的解答却没有多少突破，这些问题都是因为教师、学生对解答要领还没有一个清晰的认识，还没找到一种提纲挈领的分类讨论思维方法. 基于此，本章就对函数、导数及其应用的近几年的高考命题做一下回眸，对各类题型的经典试题做一些分析，并对试题命题方向做一下预测.

1.2　◎导数为二次函数或导数可化为二次函数试题典释

经典试题回眸、典释

◎**1**. (2006. 湖北. 理 21)设 $x=3$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{3-x}$ ($x\in\mathbf{R}$)的一个极值点.

(Ⅰ) 求a与b的关系式(用a表示b)，并求函数$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ) 设$a>0$，$g(x)=\left(a^2+\frac{25}{4}\right)e^x$，若存在$\xi_1$，$\xi_2\in[0,4]$使得$|f(\xi_1)-g(\xi_2)|<1$成立，求$a$的取值范围.

典释：(Ⅰ) 因为$f'(x)=(2x+a)e^{3-x}-(x^2+ax+b)e^{3-x}=-e^{3-x}[x^2+(a-2)x+b-a]$，依题意，$x=3$是$x^2+(a-2)x+b-a=0$的根，则$b=-2a-3$.

所以$f'(x)=-e^{3-x}(x-3)(x+a+1)$，令$f'(x)=0$，得$x=3$或$x=-a-1$(令$-a-1=3$，得临界条件$a=-4$).

(1) 若$a<-4$时，作出$f'(x)$的根轴图(见图 1-1)，当$x\in(-\infty,3)\cup(-a-1,+\infty)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(3,-a-1)$时，$f'(x)>0$．故函数$f(x)$的减函数区间是$(-\infty,3)$和$(-a-1,+\infty)$；增函数区间是$(3,-a-1)$.

(2) 若$a=-4$时，当$x\in\mathbf{R}$时，$f'(x)\leqslant 0$，故函数$f(x)$的减函数区间是$(-\infty,+\infty)$.

(3) 若$a>-4$时，作出$f'(x)$的根轴图(见图 1-2)，当$x\in(-\infty,-a-1)\cup(3,+\infty)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(-a-1,3)$时，$f'(x)>0$．故函数$f(x)$的减函数区间是$(-\infty,-a-1)$和$(3,+\infty)$；增函数区间是$(-a-1,3)$.

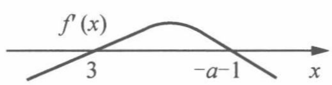


图 1-1

图 1-2

(Ⅱ) ∵ $a>0$，则$-a-1<0$，函数$f(x)$在$[0,3]$是增函数，在$[3,4]$是减函数，$f(0)=-e^3(2a+3)$，$f(3)=6+a$，$f(4)=\frac{13+2a}{e}$，函数$f(x)$的值域为$[-e^3(2a+3),6+a]$，而函数$g(x)=\left(a^2+\frac{25}{4}\right)e^x$在$[0,4]$上是增函数，$g(0)=a^2+\frac{25}{4}$，$g(4)=\left(a^2+\frac{25}{4}\right)e^4$，注意到$g(0)-f(3)=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2>0$，则只需$g(0)-f(3)<1$，即$0<a<\frac{3}{2}$.

评注 若存在ξ_1，$\xi_2\in[0,4]$使得$|f(\xi_1)-g(\xi_2)|<1$成立，求a的取值范围. 这是存在命题，只要找到$\xi_1=3$，$\xi_2=0$，即找到在[0, 4]内曲线$y=f(x)$上的点和$y=g(x)$上的点的最小竖直方向的距离小于1即可.

◎**2.** (2010. 湖南. 理 20)已知函数$f(x)=x^2+bx+c$(b，$c\in\mathbf{R}$)，对任意的$x\in\mathbf{R}$，恒有$f'(x)\leqslant f(x)$.

(Ⅰ) 证明：当$x\geqslant 0$时，$f(x)\leqslant(x+c)^2$；

(Ⅱ) 若对满足题设条件的任意b，c，不等式$f(c)-f(b)\leqslant M(c^2-b^2)$恒成立，求$M$的最小值.

典释：(Ⅰ) ∵ $f'(x)=2x+b$，由对任意的$x\in\mathbf{R}$，恒有$f'(x)\leqslant f(x)$.

对于任意的$x\in\mathbf{R}$，不等式$x^2+(b-2)x+c-b\geqslant 0$恒成立.

则 $\Delta=(b-2)^2-4(c-b)=b^2-4c+4\leqslant 0$，即 $c\geqslant\frac{1}{4}b^2+1$，于是$c\geqslant 1$.

$c\geqslant\left(\frac{|b|}{2}\right)^2+1\geqslant|b|$(基本不等式)，即$-c\leqslant b\leqslant c$，因此，$2c-b=c+(c-b)>0$.

所以，当$x\geqslant 0$时，$(x+c)^2-f(x)=(2c-b)x+c(c-1)\geqslant c(c-1)\geqslant 0$.

故当$x\geqslant 0$时，$f(x)\leqslant(x+c)^2$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，$c\geqslant|b|$.

(1) 若 $-c<b<c$ 时，$M\geqslant\frac{f(c)-f(b)}{c^2-b^2}=\frac{c+2b}{c+b}=2-\frac{1}{1+\frac{b}{c}}$，令 $t=\frac{b}{c}$ ($-1<t<1$)，而 $y=2-\frac{1}{1+t}$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，因此，$y<\frac{3}{2}$，所以，当$c>|b|$时，M 的取值范围是$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$；

(2) 当$c=|b|$时，由(Ⅰ)知，$b=\pm 2$，$c=2$. $f(c)-f(b)=-8$或0，而$c^2-b^2=0$，从而$f(c)-f(b)\leqslant M(c^2-b^2)$恒成立，故$M$的最小值是$\frac{3}{2}$.

评注　由于$f(c)-f(b)=(c-b)(c+2b)$，$f(c)-f(b)\leqslant M(c^2-b^2)$恒成立，就转化为：若$c>|b|$时，$M\geqslant\frac{c+2b}{c+b}$恒成立；若$c=|b|$时，$f(c)-f(b)=-8$或$0$，$M$为任意实数.

◎3. (2012. 全国卷. 文21)已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$.

(Ⅰ) 讨论$f(x)$的单调性；

(Ⅱ) 设$f(x)$有两个极值点x_1,x_2，若过两点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$的直线l与x轴的交点在曲线$y=f(x)$上，求a的值.

典释：(Ⅰ) $f'(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$，

(1) 当$a<1$时，当$x\in(-\infty,-1-\sqrt{1-a})\cup(-1+\sqrt{1-a},+\infty)$时，$f'(x)>0$；

当$x\in(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a})$时，$f'(x)<0$，

因此，在$a<1$时，$f(x)$的增函数区间为$(-\infty,-1-\sqrt{1-a})$和$(-1+\sqrt{1-a},+\infty)$；

$f(x)$的减函数区间为$(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a})$.

(2) 当$a\geqslant 1$时，$f'(x)\geqslant 0$，且仅有$a=1$，$x=1$时取等号，故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，当$a<1$时，x_1，x_2是方程$f'(x)=0$的根，且$x_1^2=-2x_1-a$，$x_2^2=-2x_2-a$.

而$f(x_1)=\frac{1}{3}x_1(-2x_1-a)+x_1^2+ax_1=\frac{1}{3}x_1^2+\frac{2}{3}ax_1=\frac{1}{3}(-2x_1-a)+\frac{2}{3}ax_1=\frac{2}{3}(a-1)x_1-\frac{a}{3}$，

同理可得，$f(x_2)=\frac{2}{3}(a-1)x_2-\frac{a}{3}$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{3}(x_1-x_2)(a-1)$，则直线 l 的斜率为 $\frac{2}{3}(a-1)$，

于是，得 $y-f(x_1)=\frac{2}{3}(a-1)(x-x_1)$，且 $f(x_1)=\frac{2}{3}(a-1)x_1-\frac{a}{3}$，

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{2}{3}(a-1)x-\frac{a}{3}$，令 $y=0$，得 $x_0=\frac{a}{2(a-1)}$，

因点 $(x_0,0)$ 在曲线 $f(x)$ 上，那么

$$f(x_0)=\frac{1}{3}\left[\frac{a}{2(a-1)}\right]^2+\left[\frac{a}{2(a-1)}\right]^2+a\left(\frac{a}{2(a-1)}\right)=\frac{a^2}{24(a-1)^2}(3a-2)(4a-3)=0,$$

解得，$a=0$，或 $a=\frac{2}{3}$，或 $a=\frac{3}{4}$.

另解：x_1，x_2 是方程 $f'(x)=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=a$，则

$$f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{3}(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2+3a\right]+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$=-\frac{2}{3}\left[(-2)^2-3a+3a\right]+(-2)^2-2a=\frac{4}{3}-2a,$$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{3}(x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2+3(x_1+x_2)+3a\right]=\frac{2}{3}(a-1)(x_1-x_2),$$

则线段的中点坐标为 $\left(-1,\frac{2}{3}-a\right)$，线段的斜率为 $\frac{2}{3}(a-1)$，所以直线 l 的方程为

$y+a-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(a-1)(x+1)$，即 $y=\frac{2}{3}(a-1)x-\frac{a}{3}$ (其他过程同上).

评注 注意到 x_1，x_2 是方程 $x^2+2x+a=0$ 的两根，将 x_1，x_2 代入方程中，得到关系式 $x_1^2=-2x_1-a$，再代入 $f(x_1)$ 中进行恒等变换；或者利用韦达定理求出直线 l 的斜率及线段的中点坐标.

◎4. (2011. 江苏. 文、理 19)已知 a , b 是实数，函数 $f(x)=x^3+ax$，$g(x)=x^2+bx$，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导函数，若 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 I 上恒成立，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上单调性一致.

(Ⅰ) 设 $a>0$，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调性一致，求 b 的取值范围；

(Ⅱ) 设 $a<0$ 且 $a\neq b$，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a，b 为端点的开区间上单调性一致，求 $|a-b|$ 的最大值.

典释：因为 $f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2x+b$.

(Ⅰ) 由题意知，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，即 $(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$，且 $a>0$，则 $3x^2+a>0$，所以 $b\geqslant -2x$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，则 $b\geqslant 2$.

故 b 的取值范围是 $[2,+\infty)$.