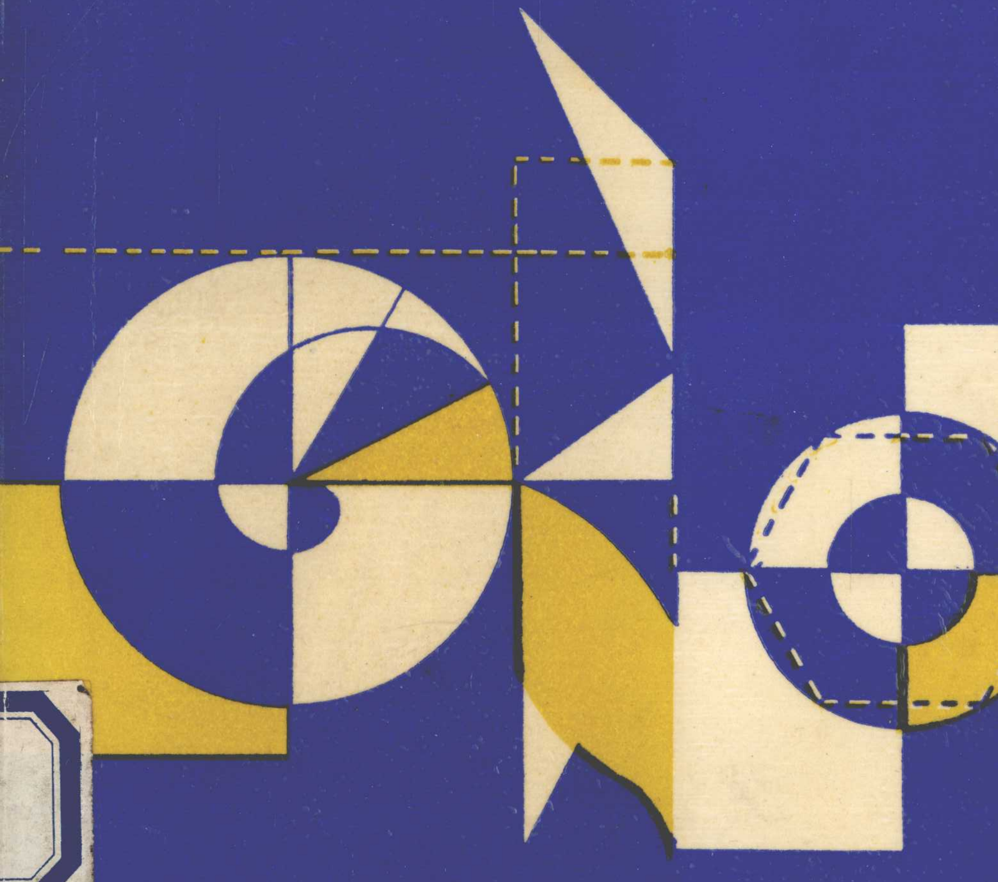
积分发展概述

● 董笑咏　王世堃　包桂芝　王玉生　著



内蒙古教育出版社

JI FEN

积分发展概述

董笑咏
王世堃
包桂芝
王玉生 著

FA ZHAN GAI SHU

内蒙古教育出版社

积 分 发 展 概 述

董笑咏　王世堃
包桂芝　王玉生
编　著

*

内蒙古教育出版社出版
内蒙古新华书店发行
通辽教育印刷厂印刷
开本：850×1168毫米　1/32　印张：10.25
1991年6月第1版　　1991年6月第1次印刷
印数：1—1,120册
ISBN 7—5311—1363—5/G·1184(压膜)　定价：3.95元

内 容 提 要

本书介绍了大量有关积分问题的历史资料，分析了各种积分理论产生的历史背景及这些理论之间的关系，读者从书中可以了解到产生于两千多年前的积分思想是如何经过众多学者的努力而在17世纪发展成一套完整的理论，以及后来为了克服古典积分的局限性，扩大可积函数类，许多数学家又从不同角度出发建立的其他各种类型的积分。对国内已出版的书籍中常见的积分，笔者在本书中是从与其不同角度阐述的，同时也详细介绍了大量国内书籍中不常见或不曾介绍过的积分。

本书可作为大学数学系师生及函数论方面研究生的参考书，前三章可作为中学数学教师的参考读物。

前　言

目前国内关于积分理论的书籍仅有为数不多的几本，我国学者撰写的这方面的论著更不多见。作者长期在数学系讲授函数论方面的课程，深感缺乏关于全面论述积分理论发展的书籍作为参考。为此目的，我们搜集了尽可能多的资料，经加工、整理、编辑成书，希望它能有益于中学数学教师和理工科学生开扩视野，有助于高校数学系教师的教学。

我们认为，作为一名数学教师，他的工作不仅仅是限于让学生掌握书本上的知识和解题技巧，还应该让学生了解一些历史上有关的理论，即懂得些最基本的数学发展的思想，这样才有利于培养学生的创造性思维能力。

本书介绍了大量的有关积分问题的历史资料，使读者从中可以看到一些数学家解决问题的方法及其构思的精妙。作者的意图不在于罗列史实，而是着重阐述积分发展的思想脉络及其规律，各种积分理论产生的历史背景及这些理论之间的关系，使读者从中获取有益的帮助。在材料处理上史实写得很简略，各种积分之间关系写得比较详尽，并给了必要的证明和反例。有些积分国内有中文书籍已作了详细介绍，本书仅从与其不同的侧面作了大致的论述，对于国内尚未有中文书籍介绍的过积分，则作了较详细的阐述。由于作者水平有限，书中难免有错误和遗漏之处，诚望指正。

全书共九章，第一～二章由包桂芝执笔，第三～六章由董笑咏执笔，第七～八章由王玉生执笔，第九章由王世堃执笔，全书由王世堃、董笑咏统稿，最后由董笑咏定稿。

作者　　1990年6月于通辽

目　录

第一章　古代和中世纪的积分方法

§1.1　测量与积分

从古至今，物理和几何量的测量问题都与数学的发展密切相关，特别是与积分运算有密切的联系。如在测量面积和体积时，在计算质量、静力距和转动惯量时，在确定物体的重心时等等，都迫使人们进行某种积分运算。积分概念发展的每一步都扩充了量的测量范围。如果以这种观点研究积分概念的产生及各种类型积分建立的历史，我们就应从研究古代测量方法与积分思想之间的联系开始并逐步转移到研究积分方法的发展上去。在生产和实践中，古代埃及和巴比伦人积累了一套数学知识。埃及人在建筑规模宏大的神庙、金字塔时，在建造复杂的灌溉系统时，在尼罗河泛滥后重新划定土地的界线时，都需要测量和计算，于是在埃及产生了几何学。公元前十八世纪后半叶的巴比伦人由于扩大了人工灌溉系统，发明了抽水机，使农业迅速发展，从而促进了贸易和手工业的发展，商业、农业、经济和建设的需要又都促进了算术计算的发展，所以巴比伦人更重视对数量方面的研究，代数的发展远远超过了埃及。巴比伦人也具有一定的几何知识，他们会计算矩形、直角三角形、梯形的面积及平行六面体、柱体的体积。古埃及人和巴比伦人当时所掌握的大量的空间位置和数量关系的知识主要是凭经验进行考察的结果。这个时期的数学没有什么逻辑结构和证明，只是把较复杂的情况化得更简单些就算是证明了。由于埃及、巴比伦时期测量长度、面积和体积的方法只是直接经验的积累而没有演绎的证明，更没有与积分的出发点，无

穷小过程相联系，所以埃及、巴比伦时期的测量过程都不是积分方法。希腊人竭力主张寻找事物的普遍性规律。当时的哲学家泰勒斯（Thales，约公元前640—546年）是第一个进行这种研究的希腊人。这方面的研究产生了初等数学，但也遇到某些概念上的困难，对这些概念的研究和解决在以后两千五百年内发展成现在称为微积分的学科。泰勒斯是历史上第一位几何学家，他确定和证实了第一批几何定理。不过他没有构造一个知识体系，也没把他的方法应用于连续性问题的分析。

毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前582—497年）是历史上有记载的希腊第二位数学家。毕达哥拉斯学派一个很重要的结果是面积贴合理论。用这种方法他们能够说明一个曲线所围成的图形大于、等于或小于另一个图形，这种把一个图形贴合到另一个图形上去的方法是试图给面积概念以明确定义的开端。希腊数学家不谈一个图形的面积，而只说两个面积的比，这是由于存在着不可公度问题。在数的概念没有发展到完善程度之前无法使面积的定义精确化。毕达哥拉斯学派的另一重要成就是把几何问题与数的问题结合起来的思想，这样由几何想法的引导得出许多数的理论方面的结果。反之，算术的关系导致了某些几何的总结，从而数的理论可以很好地用几何图形说明，同样几何也得到了相互关系的必要说明。

在希腊几何学中面积贴合理论是基本理论，但是不能应用于圆的情况。诡辩哲学家安提丰（Antiphon，约公元前430年）和稍后的布赖索（Bryson，约公元前450年）先后提出这样的一种想法：在圆内作一个内接正多边形后，不断将其边数倍增，试图得到一个跟圆重合的多边形，从而穷竭圆的面积。安提丰深信"最后"正多边形必与圆重合，也就是多边形与圆的"差"会穷竭，于是即可化圆为方了。结论虽然错误，但却提出了一个求圆面积的近似方法，成为阿基米德割圆术的先导。

攸多克萨斯（Eudoxus，公元前408—355年）发展了安提丰和布赖索的想法，他把“穷竭法”（穷竭法一词是在十七世纪才给出的）建立在较稳固的基础上，用归谬法证明了德谟克里特提出的结论：圆锥、棱锥的体积是等底等高圆柱、棱柱体积的三分之一。攸多克萨斯的论证每一步都依靠空间直观，不再依赖先前模糊的无限小量，他将曲线和直线、无理数和有理数加以比较，天才地证明了这些问题。欧几里德和阿基米德继续发展了“穷竭法”，特别是阿基米德把演绎的“穷竭法”与德谟克里特及柏拉图学派探索过的无穷小量观念结合起来，从而在有关面识、体积和求物体重心等问题上得出许多结果。大多数数学家都认为积分方法起源于阿基米德，他是现代积分计算的先驱，但是阿基米德的工作还不是“真正的积分”，因为他的工作还是着眼于解释而不是一套解析工具，他没有引导人们去注意发现一种与之相当的算法。

十六世纪到十七世纪的一百多年中，数学的思想、方法进一步发展成熟起来。费尔马（Fermat，1601—1665年）开普勒（Kepler，1571—1630年）、伽利略(Galilo，1564—1642年)、卡瓦列里（Caralieri，1598—1647年）、托里拆利（Torricelli，1608—1647年）等许多数学家超出他们的先驱者所留下的遗产的范围，深入地研究求面积、体积、切线、曲线长、极值以及路程和速度、速度和加速度之间的关系等问题，并涉及到问题的本质，即求面积问题与求切线问题是互逆的。这为牛顿、莱布尼兹创立微积分奠定了坚实的基础，而牛顿和莱布尼兹正是继承并发展了这些人的成果，完成了科学史上第--次最重要的创造一微积分。

§1.2 德谟克利特和柏拉图的数学原子论

古希腊伟大的哲学家、数学家德谟克利特（Democritus，约公元前460—370年）和他的老师留基伯（Leucipus）都是原

子论学派的创始人，德谟克利特不仅是数学家、哲学家并且对物理、气象、生物和美学都有深入的研究。

德谟克利特认为万物的始源只有两个：原子和虚空。“原子”是不可分的物质粒子，永远处于运动状态之中。在数学方面，德谟克利特应用原子的观点，获得了良好的结果。他拟订了用无穷小量进行数学研究的方法，认为线段、面积和体积是由有限个不可再分的原子组成；时间也不是连续的，而是由一系列的“瞬时”，“真正的倾刻”组成，计算线段的长度，图形的面积和立体的体积就是将这些原子集合起来。利用这种形式，德谟克利特大约得出不会引起无限概念的数学构造思想。他把圆锥看作是很薄的圆柱的叠加，把球看作是面数很多的凸多面体的叠加。利用这种表达形式，他求得棱锥或圆锥的体积等于同底等高棱柱或圆柱体积的三分之一。球的体积等于球表面积与半径乘积的三分之一。有的数学史家认为德谟克利特本人或至少是接近他的原子论继承者知道重心的概念，并会用原子论的方法求简单图形的重心。德谟克利特的这种不太严格的想法看起来好象不大合理，但却是古代数学家发现新结果的重要线索之一。他的原子论思想在十七世纪被开普勒，卡瓦列里等人所接受，并进一步发展完善，成为建立积分概念的基础。

继德谟克利特之后的另一位原子论学者是雅典的大哲学家柏拉图（Ploto，公元前427—347年）。虽然他不是数学家，但对数学却十分熟悉，并表现出极大的热忱。他特别强调数学的抽象化和逻辑化，强调概念和推理，对后来导致微积分产生的那些疑难问题他下了不少功夫。他对毕达哥拉斯学派的无限概念和具有位置单元的单子概念及德谟克利特的原子论都表示反对意见。柏拉图认为他们的观点太偏重于感情经验，而他对真实的判定标准只要求思想上的合理性，而不管是否能与经验相容。毕达哥拉斯的单子论和德谟克利特的原子论都认为线有厚度，柏拉图认为这过

于依赖于感情经验而无法适用，因此他求助于高度抽象的“无限者”或“无界不定者”。根据柏拉图的意见，与其把连续量看作由不可分量的集合（无论怎样大）所组成，不如认为是由“无限者”的流动所生成。这种观点表现出连续与离散的融合，颇有点相似于布劳威尔(Brouwer，1881—1966年)的近代直观论。

柏拉图也曾研究过圆锥的体积，但他搞不清楚那些可视为组成圆锥的距离为无限小的相邻平行圆彼此是否相等。如果他们都相等，圆锥就将与外接圆柱合而为一；但如果不相等，圆锥又将成为阶梯形了。我们不知道他是怎样解决这个难题的，但有人曾设想他用了无限薄的圆片或不可分量来求圆锥或圆柱的体积，因而他已经使用了在这些特殊情况下的卡瓦列里定理（第二章§2.3）。

攸多克萨斯是古希腊最伟大的数学家之一，他的历史作用仅次于阿基米德，他的最大功劳是创造了比例论。越来越多的无理数(不可公比)的发现使希腊人不得不研究这些数，它们确实是数吗？它们仅出现于几何论证过程中，而整数和整数之比则既出现于几何中也出现于一般的数量研究中。怎样推广用于不可公度的量呢？攸多克萨斯引入了变量(或简称为量)这个概念。它不是数，而是代表诸如线段、角、面积、体积、时间这些能够连续变动的东西。量与数不同，数是从一个跳到另一个，对于量是不指定数值的，然后他定义两个量之比并定义比例，从而把可公度比与不可公度比都包括在内。但他仍然不用数来表达这种比，因此他的比和比例概念始终同几何分不开。他的这个理论给不可公度提供了逻辑依据，推动了几何学的发展，但这种把数与几何截然分开的作法给数学的发展带来一定的不良后果。

攸多克萨斯用归谬法证明了德谟克利特给出的但未证明的命题：棱锥或圆锥的体积等于同底等高棱柱或圆柱体的三分之一。证明步骤大致如下：设V是圆柱的体积，C是圆锥的体积，两者

之间的关系有三种可能：$V>3C$，$V<3C$，$V=3C$，前两者都导致不合理的结果，从而第三种情况成立。这就是我们所熟知的穷举法。

攸多克萨斯还证明了一个极其重要的命题：取去一量之半，再取去所余之半，这样继续下去，可使所余的量小于另一任给的量。这是近代极限理论的先驱。

§1.3 欧几里德计算方法

欧几里德(Euclid，约公元前330—273年)是古希腊的另一位伟大的数学家，他写过不少数学、物理方面的著作，其中最重要的是他的《几何原本》，他改进了“穷竭法”并用这种方法证明了一些命题，关于测量方面欧几里德留下的科学遗产在许多方面与德谟克利特相似。在芝诺(Zeno，约公元前496—430年)对连续性和无穷小的最初的基本表达式发表反对的评论之后，欧几里德和德谟克利特重新探讨了自己的数学表达式，他们放弃了无限小概念，解决了相同或相似的问题。不过他们对问题的论述方法很不相同，德谟克利特是与无限性联系得更为密切，抛弃了连续性。欧几里德相反，保持了连续性而把需用无限性的结论转变为用反证法证明，把不可分性归入通常的“穷竭法”中。

欧几里德对于“穷竭法”的论述主要集中在《几何原本》的第十二篇，为了更好地了解它，我们较详细地考查一个例子。

命题1 圆内接相似多边形面积之比等于它们直径的平方比。

命题2 两圆面积之比等于它们直径的平方比。

欧几里德首先证明圆可以被其内接正多边形所“穷竭”。作圆内接正方形（图1—1），正方形的面积大于圆面积的$\frac{1}{2}$，这是因为它等于外切正方形面积的$\frac{1}{2}$，而外切正方形的面积大于圆的

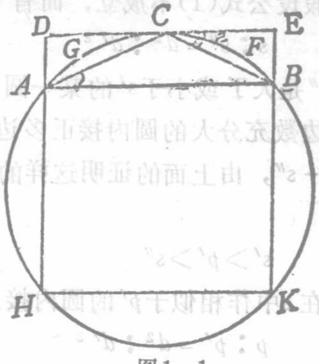


图1—1

面积。设 AB 为圆内接正方形的一边，C 为AB的中点，连AC,BC，过C作圆的切线，延长HA、KB交切线于D、E，因$\angle 1$和$\angle 2$都等于弧$\overset{\frown}{BC}$的$\frac{1}{2}$，故$\angle 1=\angle 2$，于是DE平行于AB。而AD，BE都垂直于DE，故四边形$ABED$是矩形，其面积大于弓形$CGABF$的面积，因而等于矩形面积一半的三角形ABC的面积大于弓形$ABFCG$的面积的$\frac{1}{2}$。对正方形的每边都这样做，便得一正八边形，它不仅包含正方形，而且包含圆与正方形面积之差的一半以上。对正八边形的每边也可类似地处理（就得一圆内接正十六边形，它不仅包含圆内接正八边形，而且还包含圆与正八边形面积之差的一半以上）。这种作法可依次做下去达到任意次，然后欧几里德用"几何原本"中的命题证明了圆和某一边数足够多的圆内接正多边形面积之差可以比任何给定的量还要小。

现设s与s'为两个圆的面积（图1—2），若设直径分别为d和d'，欧几里德要证明：$s:s'=d^2:d'^2$ (1)

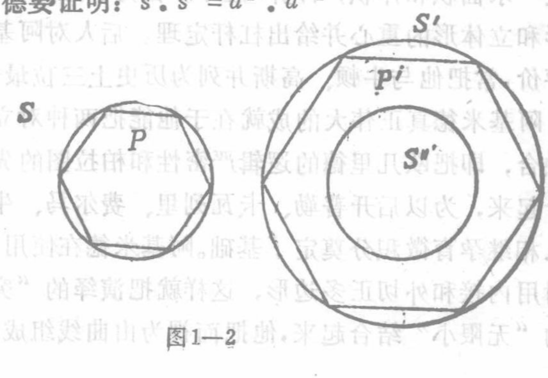


图1—2

假设公式(1)不成立，而有

$$s : s'' = d^2 : d'^2 \qquad (2)$$

其中s''是大于或小于s'的某一圆面积。设：$s'' < s'$，我们在s'中作一边数充分大的圆内接正多边形P'，使它和s'的面积之差小于$s' - s''$，由上面的证明这样的圆内接多边形是可以作出的，于是有

$$s' > p' > s'' \qquad (3)$$

在s中作相似于p'的圆内接正多边形p，根据命题1，有

$$p : p' = d^2 : d'^2$$

而根据（2）有

$$p : p' = s : s'' \text{或} p : s = p' : s''$$

但因$p < s$，于是$p' < s''$，而这与(3)矛盾。

同样可证s''不能大于s'，因此$s'' = s'$，从而由（2）即得比例(1)成立。

§1.4 阿基米德积分方法

阿基米德（Archimedes）于公元前287年生于意大利西西里岛的叙拉古，公元前212年卒于同地。他的数学工作包括用“穷竭法”求面积和体积，计算π值等。在力学方面，他算出许多平面形和立体形的重心并给出杠杆定理。后人对阿基米德给予极高的评价，常把他与牛顿、高斯并列为历史上三位最伟大的数学家。

阿基米德真正伟大的成就在于他能把两种对立的时代精神加以融合，即把欧几里德的逻辑严密性和柏拉图的先验理论的想象融合起来，为以后开普勒、卡瓦列里、费尔马、牛顿和莱布尼兹等人相继孕育微积分奠定了基础。阿基米德在使用“穷竭法”时，同时用内接和外切正多边形，这样就把演绎的“穷竭法”和柏拉图的“无限小”结合起来，他把面视为由曲线组成并用以求面积，