高級中学三年級

立体几何教材研究函授講义

（下　册）

南京市教师进修学院編

江苏人民出版社

第二章　多面体 …………………………………………… 1

Ⅰ、棱錐、棱柱和棱台 ……………………………………… 1

一、教材研究

1. 几何体　2. 多面体和它各部分的定义
3. 多面体的面、頂点、棱的数目关系　4. 棱柱
5. 棱柱的种类　6. 平行六面体　7. 棱錐
8. 棱錐中平行于底面的截面的性质　9. 四面体的性质　10. 棱台　11. 图形画法
12. 例題

二、教学研究

Ⅱ、多面体的面积和体积 ………………………………… 50

一、教材研究

1. 多面体的面积　2. 棱柱、棱錐、棱台的側面积和全面积　3. 多面体的体积　4. 体积的单位　5. 长方体的体积　6. 平行六面体的体积　7. 棱柱的体积　8. 棱錐的体积
9. 棱台的体积　10. 拟柱和它的体积
11. 等积变形　12. 祖暅定理　13. 体积的比

二、教学研究

Ⅲ、正多面体 ……………………………………………106

一、教材研究

1. 正多面体　2. 正多面体的作法
3. 正多面体的画法　4. 正多面体的二面角
5. 正多面体的体积　6. 正多面体的性质

二、教学研究

第三章　旋轉体 ……………………………………………129

Ⅰ、圆柱、圆錐和圆台 ……………………………………129

一、教材研究

1. 旋轉体　2. 圆柱　3. 圆錐　4. 圆台
5. 圆柱、圆錐和圆台的斜投影图画法　6. 例題

7. 圆柱、圆錐和圆台的面积　8. 圆柱、圆錐和圆台的侧面展开图形　9. 例題
10. 圆柱、圆錐和圆台的体积　11. 例題

二、教学研究

II、球……………………………………………………178

一、教材研究

1. 球　2. 球与点的位置关系　3. 球面的确定
4. 球与平面的位置关系　5. 球与直綫的位置关系　6. 两球的位置关系　7. 球与多面体
8. 球与旋轉体　9. 球和它的截面的画法
10. 例題　11. 球冠和球带　12. 球冠、球带和球面的面积　13. 球扇形　14. 球扇形和球的体积　15. 球缺和球台　16. 球缺和球台的体积　17. 例題

二、教学研究

III、一般旋轉体……………………………………………226

一、教材研究

1. 平面图形的重心　2. 一般旋轉体的面积和体积　3. 例題

二、教学研究

IV、軌迹(二)……………………………………………232

一、教材研究

1. 有关旋轉体的軌迹　2. 成为旋轉面的軌迹
3. 旋轉面的切綫的軌迹　4. 在球面上的軌迹

二、教学研究

V、球面几何大意……………………………………………236

一、教材研究

1. 研究球面几何的意义　2. 球面上的一些基本图形　3. 球面多边形　4. 球面三角形
5. 球面三角形的一些性质　6. 球面三角学
7. 球面上的小圆　8. 球面三角形的面积
9. 球面上的軌迹

二、教学研究

第二章 多 面 体

I 棱柱、棱錐和棱台

一、教材研究

1. 几何体

如果我們只研究一个物体的形状和大小，而不研究其他性質时，就把这个物体叫做几何体，或者簡称为体。例如一个鉄球和一个木球，如果是同样大小的話，纵然它們所用的材料不同，但却是完全相等的几何体。几何体也就是空間图形的一个例子。

几何体可以在空間移置，而不改变它的几何性質。例如一个墨水瓶可以移置到任何位置，它的大小和形状是不改变的。

两个几何体如果能够处处重合，那末这两个几何体就是全等的。

2. 多面体和它各部分的定义

定义 由几个平面多边形所圍成的几何体就叫做多面体。圍成多面体的各个多边形就叫做多面体的面，各相邻多边形的公共边就叫做多面体的棱。相交于一个頂点的各面組成了一个

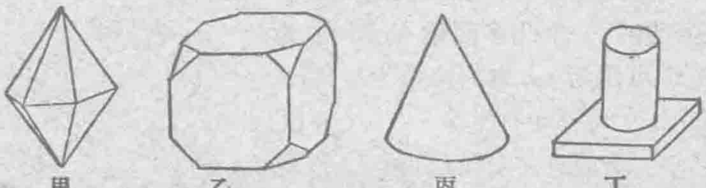


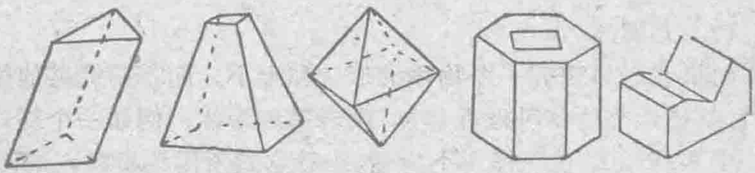
图 170

多面角，各个多面角的頂点就叫做多面体的頂点。連接不在同一个面內的两頂点的綫段就叫做多面体的对角綫。

根据以上定义，我們可以知道在图 170 中的甲、乙是多面体，而丙、丁就不是多面体。

定义：把多面体的任意一个面延展成平面时，如果这个多面体其他各面都在这个面的同旁，这个多面体就叫做凸多面体。

如图 171 中甲、乙、丙都是凸多面体，丁、戊就不是凸多面体。在本书內仅研究凸多面体，故今后凡提到多面体，除特殊声明者外，都是指的凸多面体。



甲　　乙　　丙　　丁　　戊

图 171

空間的点不完全在一个平面內，而任意三个点一定在一个平面內，那末不在一个平面內的点数最少为四个。每三个点可以作一个平面，因而有：

$$C_4^3=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}=4$$

也就是多面体的面数最少为四个，我們按多面体的面数可称为：四面体、五面体等。

3. 多面体的面、頂点、棱間的数目关系

定理79 一个凸多面体的面数为 f，它的頂点数为 v，它的棱数为 e，那末一定有：$f+v=e+2$

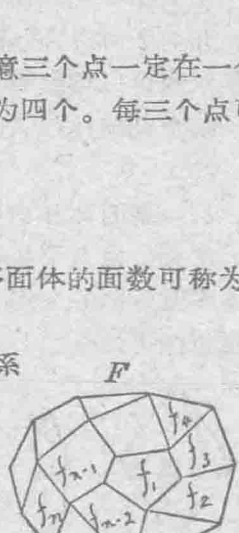


图 172

已知：多面体 F，它的面数、頂点数和棱数分别为 f、v 和 e。

求証: $f+v=e+2$

証明: 設多面体F是由n个面所成的，設这些面为f_1、f_2、f_3、……f_n。

今由F中先取去面f_n，再取去f_{n-1}，以后逐次将各面取去仅留面f_1。然后再按f_2、f_3、……f_n放置各面于原处，仍完成原来多面体F。这样作法我們认为是可作的。

当仅有一个面f_1时，面数为1，边数和頂点数相等，故有:

$$f+v=e+1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

其次于图形中增加面f_2时，此时f_1与f_2公有一棱和两个頂点，也就是說明增加的棱数就等于增加的面数与頂点数的和。于是(1)式的关系仍成立。

再于图形中增加面f_3时，如果与f_1和f_2公有两棱那末就公有三个頂点，这就是說: 如果面数增加了1，棱数少增加2时，頂数就要少增加3，仍說明增加的棱数就等于增加的面数与頂数的和。(1)的关系式仍成立。

当我們逐次将面f_4、f_5，……f_{n-1}添上时，总是这样: 每增加一个面时，不論有几条棱重合，頂点的重合数总是多一个，也就是說明增加的棱数恆等于增加的面数与頂数的和。因而(1)式也就一直是成立的。

但是放置最后一个面f_n时，頂点与棱数都不增加，故由(1)式可得出:

$$f+v=e+2,$$

于是定理証实。这个公式叫做关于多面体的尤拉公式。

4. 棱柱

定义: 一个多面体有两个面互相平行，而其余各面中，每相邻的两个面的交綫互相平行，这样的多面体就叫做棱柱。

棱柱可以由下面的作法得出(图173): 任意作一个多边形$ABC\cdots\cdots E$。过各頂点而不在它的平面內引互相平行的直綫

AA_1、BB_1、……EE_1 等。每相邻两平行綫就可以作一个平面 AB_1、BC_1…EA_1等。再用一个平行于平面 ABC……E 的平面截这些平行綫，并分别与它們相交于 A_1、B_1……E_1 等，由所作的各平面圍成的几何体就是棱柱。

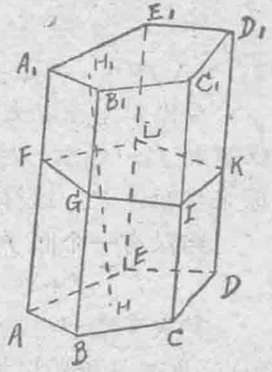


图 173

棱柱表示法，通常記它的各頂点，如“棱柱$ABCDE$——$A_1B_1C_1D_1E_1$”也可以記它不在同一面內的两个頂点，如“棱柱 AD_1”或“棱柱 AC_1”等。

棱柱中两个平行的面，叫做棱柱的底面，如多边形 $ABCDE$和$A_1B_1C_1D_1E_1$；棱柱的其余各面，就叫做棱柱的側面，如 AB_1、BC_1……等；两个相邻側面的公共边，叫做棱柱的側棱，如 AA_1、BB_1、……等；两个底面間的距离，叫做棱柱的高，如 HH_1；过不在同一个側面的两条側棱所作的截面，就叫做棱柱的对角面，如 AA_1C_1C、AA_1D_1D、……等；不在同一个面內两个頂点連綫，就叫做棱柱对角綫，如AC_1 等；垂直于棱柱側棱(或延长綫)的截面，就叫做棱柱的直截面，如截面 $FGIKL$。

根据棱柱作法，有下面的性質定理：

定理80　任一棱柱具有下列性質：

(1)側面都是平行四边形；

(2)两底是对应边平行的两个全等多边形。

已知：棱柱 AD_1

求証：(1)側面 AA_1B_1B、BB_1C_1C、…… 等都是平行四边形。

(2)底面 $ABCDE$ 与 $A_1B_1C_1D_1E_1$的对应边平行并且全等。

証明：(1) $\because$ 平面$ABCED \parallel$ 平面$A_1B_1C_1D_1E_1$，分别过AA_1 和 BB_1，BB_1和CC_1，……等作平面与两底相交，所以$AB \parallel$

A_1B_1, $BC \parallel B_1C_1$,……等；又 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel$ …… 等，所以 ABB_1A_1, BB_1C_1C,…… 等为平行四边形。

（2）既然侧面是平行四边形，那末 $AB \perp\!\!\!\perp A_1B_1$、$BC \perp\!\!\!\perp B_1C_1$、……等，并且方向相同，于是 $\angle BAE = \angle B_1A_1E_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, ……等，因此底面 $ABCDE$ 与 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的对应边和对应角都相等，所以它們全等，而且对应边是互相平行的。

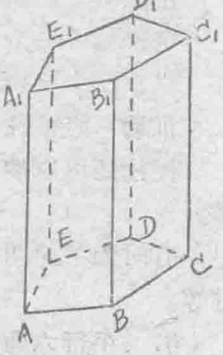


图 174

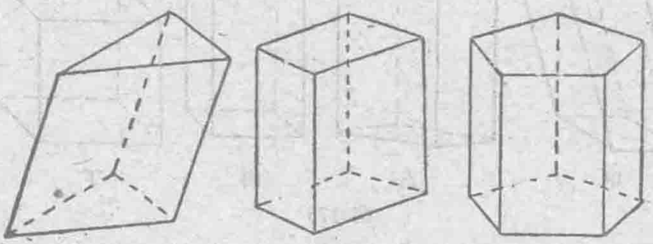
推論 1：两个平行平面截一个棱柱所有的側棱，所得的截面是全等多边形。

推論 2：一个棱柱的任何两个直截面是全等多边形。

推論 3：一个棱柱的所有側棱都是相等且平行的。

推論 4：棱柱的对角面是平行四边形。

5. 棱柱的种类



甲　　乙　　丙

图 175

定义：側棱和底面斜交的棱柱，就叫做斜棱柱（图175甲）。側棱垂直于底面的棱柱，就叫做直棱柱（图 175 乙）。底面是正多边形的直棱柱，就叫做正棱柱。

定理81　直棱柱的侧面是矩形。

定理82　一个正棱柱的各个侧面都是全等的矩形。

以上两个定理由讀者自己証明。

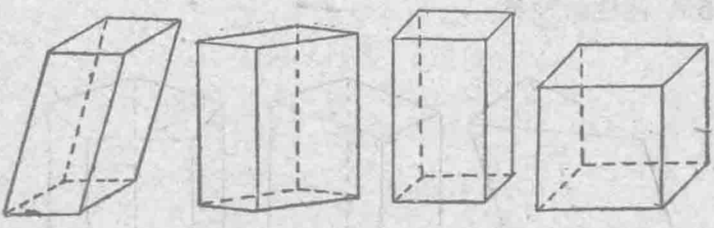
推論　直棱柱或正棱柱的对角面是矩形。

棱柱还可以按它的侧棱数分为：三棱柱、四棱柱、五棱柱等。

有时为了說明棱柱的形状和性質就称：正三棱柱、直四棱柱等。

6.　平行六面体

定义：底面是平行四边形的棱柱，就叫做平行六面体（图176甲）。侧棱垂直于底的平行六面体，就叫做直平行六面体（图176乙）。底面为矩形的直平行六面体，就叫做长方体（图176丙），在长方体中，交于一个顶点三条棱的长，就叫做长方体的三度，也就是长方体的长、寬和高。三度相等的长方体，就叫做正方体（图176丁）。



甲　　乙　　丙　　丁

图 176

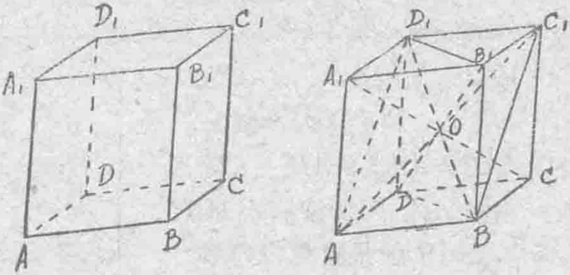
定理83　任一平行六面体具有下列性質：

（1）相对的两个面互相平行并且全等；

（2）四条对角綫交于一点，并且在这点互相平分。

已知：平行六面体$ABCD$——$A_1B_1C_1D_1$。

求証：（1）面AB_1与DC_1，面AD_1与BC_1，面AC与A_1C_1分



甲　　　　乙

图 177

别互相平行并且全等。

(2)对角綫AC_1、BD_1、CA_1和DB_1 相交于点 O，并且在点 O 互相平分。

証明：(1)因为平行六面体是棱柱，所以两底 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 是全等的(图 177 甲)。

其次，侧面AA_1D_1D与BB_1C_1C中，侧棱 $AA_1 \underline{\parallel} BB_1$，底面中，$A_1D_1 \underline{\parallel} B_1C_1$，所以面 $AA_1D_1D \underline{\parallel}$ 面 BB_1C_1C。

同理可知　　　　　面$ABB_1A_1 \underline{\parallel}$面 DCC_1D_1。

这就証明了平行六面体相对两面是互相平行而且全等。

(2)連結对角綫 BD_1 和 B_1D(图 177 乙)。

因为侧棱　$BB_1 \underline{\parallel} DD_1$，所以 BB_1D_1D 是平行四边形，那末 BD_1 与 B_1D 是它的对角綫，故必相交于点 O，并且互相平分。

又連結对角綫 AC_1，再連 AD_1 和 BC_1，

因为　$AB \underline{\parallel} A_1B_1$，而$A_1B_1 \underline{\parallel} D_1C_1$，

$\therefore$　　$AB \underline{\parallel} D_1C_1$，　故得$ABC_1D_1$为平行四边形，

那末 BD_1 与 AC_1 又是它的对角綫，故 AC_1 必过 BD_1 的中点 O，并且互相平分。

同理可証：对角綫 A_1C 也必过 BD_1 的中点 O，并且互相平分。所以四条对角綫交于一点，并且互相平分。

定理84 长方体的任意一条对角綫的平方等于它的三度的平方和。

已知：长方体$ABCD$——$A_1B_1C_1D_1$（图178），A_1C是它的一条对角綫。

求証：$A_1C^2=AA_1{}^2+AB^2+AD^2$。

証明：連結AC，因側棱AA_1垂直于底面，那末A_1AC就是直角三角形。在底面$ABCD$中，对角綫

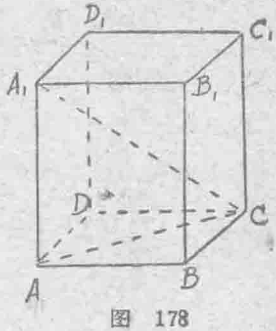


图 178

$$AC^2=AB^2+AD^2,$$

而在直角三角形A_1AC中，$A_1C^2=AA_1{}^2+AC^2$

也就是 $A_1C^2=AA_1{}^2+AB^2+AD^2$。

7. 棱錐

定义：一个多面体有一个面是多边形，其余各面是有一个公共頂点的三角形，这样的多面体就叫做棱錐。

棱錐可以由下面作法得出（图179）：用一个平面去截一个多面角，使与多面角的各面都相交，这样便得出一个棱錐。

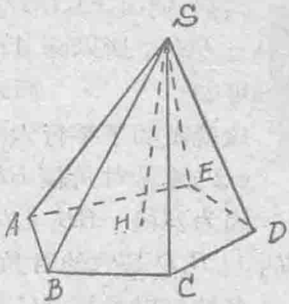


图 179

在一个棱錐里，多边形的面就叫做棱錐的底面，如多边形$ABCDE$；有公共頂点的三角形的面就叫做棱錐的側面，如SAB、SBC、……等；两个相邻側面的公共边就叫做棱錐的側棱，如SA、SB、……等；各側面的公共頂点就叫做棱錐的頂点，如点S；从頂点到底面的距离就叫做棱錐的高，如SH；过棱錐不相邻的两条側棱所作的平面截棱錐而得的截面就叫做对角面，如SAC、SAD……等。

棱錐表示法是先写出“棱錐”二字和頂点的字母，再画一

条短横綫，然后依次写出底面多边形的各頂点的字母，例如“棱錐$S—ABCDE$”；棱錐也可以只用表示頂点的一个字母来表示，例如“棱錐S”。

定义：一个棱錐的底面如果是正多边形，从頂点所引的高通过底面的中心，这样的棱錐就叫做正棱錐；由頂点向底面多边形各边所引的垂綫，就叫做正棱錐的斜高。

定理85　一个正棱錐具有下列性質：

（1）所有的側棱都是相等的；

（2）所有側面都是全等的等腰三角形；

（3）各个側面內的斜高都是相等的。

这个定理証明是很容易的，由讀者自己完成。

棱錐可以按它的側棱数分为：三棱錐、四棱錐、五棱錐等。

有时为了說明棱錐形状和性質就称：正三棱錐、正五棱錐等。

8.棱錐中平行于底面的截面的性質

定理86　如果一个棱錐被平行于它底面的平面所截，那末它具有下列性質：

（1）棱錐的所有側棱和高被分成比例綫段；

（2）截面和底面是相似多边形；

（3）截面面积和底面面积的比，等于从頂点到截面和从頂点到底面的距离的平方比。

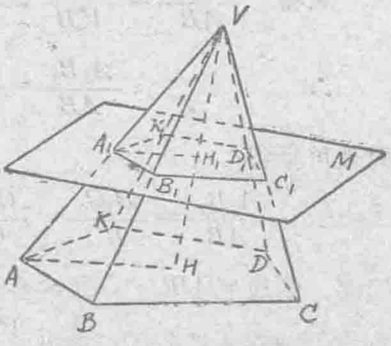


图 180

已知：棱錐$V—ABC\cdots\cdots K$被平行于底面的一个平面M所截，截面是$A_1B_1C_1\cdots\cdots K_1$。棱錐的高$VH$与截面

相交于 H_1，底面和截面面积設为 S 和 S_1（180 图）。

求証：（1） $\dfrac{VA_1}{VA}=\dfrac{VB_1}{VB}=\dfrac{VC_1}{VC}=\cdots\cdots$

$$=\frac{VK_1}{VK}=\frac{VH_1}{VH};$$

（2） 多边形$ABC\cdots\cdots K\backsim$多边形$A_1B_1C_1\cdots\cdots K_1$；

（3） $\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{VH_1{}^2}{VH^2}$。

証明：（1）連結 A_1H_1 和 AH，因为平面 M 平行于底面，所以 $A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, \cdots\cdots K_1A_1 \parallel KA$，和 $A_1H_1 \parallel AH$，由相似三角形得：

$$\frac{VA_1}{VA}=\frac{VB_1}{VB}=\frac{VC_1}{VC}=\cdots\cdots$$

$$=\frac{VK_1}{VK}=\frac{VH_1}{VH}。$$

（2）因为截面多边形与底面多边形，各边对应平行，故得

$\angle A_1B_1C_1=ABC$， $\angle B_1C_1D_1=\angle BCD, \cdots\cdots$

$\angle K_1A_1B_1=\angle KAB$;

又得 $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{VB_1}{VB}$， 而 $\dfrac{VB_1}{VB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}$，

$$\therefore \quad \frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC},$$

同理可推得：

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\cdots\cdots=\frac{K_1A_1}{KA}。$$

因而 多边形$ABC\cdots\cdots K\backsim$多边形$A_1B_1C\cdots\cdots K_1$。

（3）在$\triangle VAH$中，得出 $\dfrac{VH_1}{VH}=\dfrac{VA_1}{VA}$，

也就是 $$\frac{VH_1}{VH}=\frac{A_1B_1}{AB};$$

但 $$\frac{S_1}{S}=\frac{A_1B_1^2}{AB^2},$$

$$\therefore \quad \frac{S_1}{S}=\frac{VH_1^2}{VH^2}。$$

定理87　如果两个等高的棱錐，分别被平行于底面的平面所截，并且頂点到截面距离相等，那末这两个截面面积的比等于两个底面面积的比。

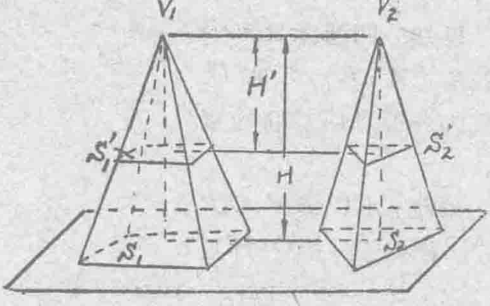


图 181

已知：設棱錐 V_1 和 V_2 有相等的高 H，两底面积为 S_1和 S_2，并且 $S_1=S_2$。这两个棱錐为平行于底面而且与頂点距离都为 H' 的平面所截，所截得的面积为 S'_1和S'_2（图 181）。

求証： $$\frac{S_1'}{S_1}=\frac{S_2'}{S_2}。$$

証明：由定理

可知 $$\frac{S_1'}{S_1}=\frac{H'^2}{H^2}\text{和}\frac{S_2'}{S_2}=\frac{H'^2}{H^2},$$

所以 $$\frac{S_1'}{S}=\frac{S_2'}{S_2}。$$

9.　四面体的性質

在平面几何中，边数最少的多边形是三角形，所以三角形是平面內直綫形的基础，因而我們用了很大一部分研究三角形的

性质。在立体几何中，面数最少的多面体是四面体，现在让我們研究四面体的一些性質。

定理88　四面体的各頂点与它所对的面的重心的連綫，此四直綫必通过同一点，并且从这点到每个面的的重心的距离，等于从这点到这个面所对頂点的距离的 $\frac{1}{3}$。

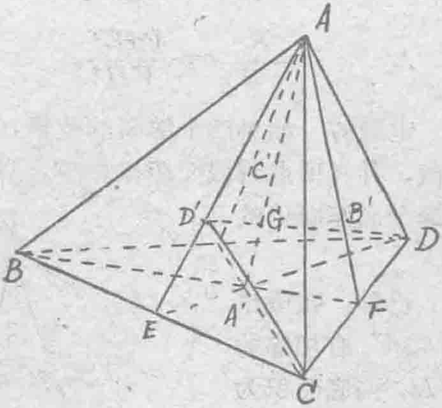


图 182

已知：四面体 $ABCD$（图182），A'、B'、C'、和 D' 分别为各頂点所对面的重心。

求証：AA'、BB'、CC' 和 DD' 相交于一点 G，并且有 $=\frac{A'G}{AG}=\frac{B'G}{BG}=\frac{C'G}{CG}=\frac{D'G}{DG}=\frac{1}{3}$。

証明：連 AD' 和 DA'，并延长它們均过 BC 的中点 E，且有

$$\frac{EA'}{ED}=\frac{ED'}{EA}=\frac{1}{3}，\quad 故\quad A'D' \parallel DA。$$

設 AA' 和 DD' 相交于 G，

于是　　$\triangle GA'D' \backsim \triangle GAD$，

故有　　$\frac{A'G}{AG}=\frac{D'G}{DG}=\frac{D'A'}{DA}=\frac{EA'}{ED}=\frac{1}{3}$，也就是 AA' 与 DD' 必相交于內分 $A'A$ 于 $\frac{1}{3}$ 的点 G。

同理由 AB' 与 $A'B$，相交于 CD 的中点 F，仿上証可知 BB'

与AA'也必相交于内分AA'于$\frac{1}{3}$的点G。

同理也可証得CC'与AA'仍相交于G。

故AA'、BB'和CC'过同一点G且有

$$\frac{A'G}{AG}=\frac{B'G}{BG}=\frac{C'G}{CG}=\frac{D'G}{DG}=\frac{1}{3}。$$

註：这样的点G就叫做四面体的重心。

定理89　由四面体各面的外心，所引各面的垂綫必通过同一点。

已知：四面体$ABCD$（图183）。

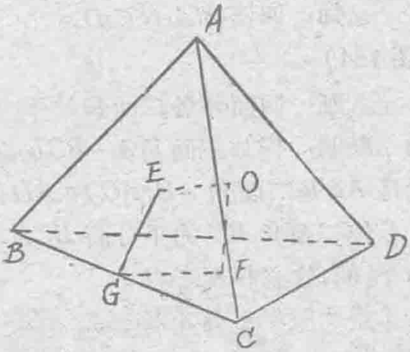


图 183

求証：过四面体各面外心，所引各面的垂綫必通过同一点。

証明：設E和F分别为面ABC和BCD的外心。分别过E和F向BC引垂綫必通过BC的中点G，此时EGF平面与棱BC垂直，也就是面ABC与面EGF垂直。那末过E引平面ABC的垂綫EO必在平面EGF內。同理过F引平面BCD的垂綫FO也必在平面EGF內。由于GE、GF不平行，因而EO与FO必相交于一点，設此点为O。

点O旣与点A、B、C等距离，又与B、C、D等距离，那末一定有：

$$OA=OB=OC=OD$$

既然点O距A、B、D等远，故必在过$\triangle ABD$的外心的垂綫上；同理也就必在过$\triangle ACD$的外心的垂綫上。因此过四面体各面外心，所引各面的垂綫必通过同一点。

註：这样的点心叫做四面体的外心。

推論　四面体各棱的垂直平分面必通过四面体的外心。

定理90　四面体中各二面角的平分角面必通过同一点。

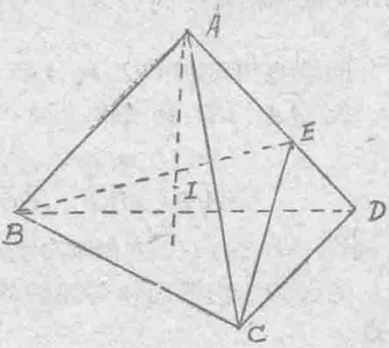


图 184

已知：四面体$ABCD$(图184)。

求証：四面体各二面角的平分角面必通过同一点。

証明：作与三面角$A—BCD$各面等距离的点的軌迹AI，也就是AI是二面角AB、AC和AD的交綫。

作二面角BC的平分面BCE，而面BCE与AI均在二面角BC内部，故必相交于点I。

点I既然距面ACD和面ABC等远，叉距面ABC和面BCD等远，那末I一定在二面角CD的平分角面內。

同理可証点I也必在二面角BD的平分角面內。

因此，四面体各二面角的平分角面必通过同一点。

註：这样的点I叫做四面体的內心。

定理91　如果一个四面体的对棱互相垂直，从各頂点至对面所引的四条垂綫必通过同一点，

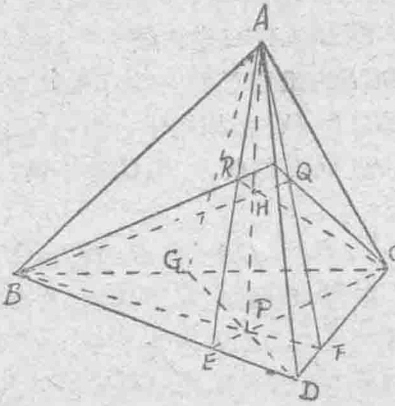


图 185

已知：四面体$ABCD$