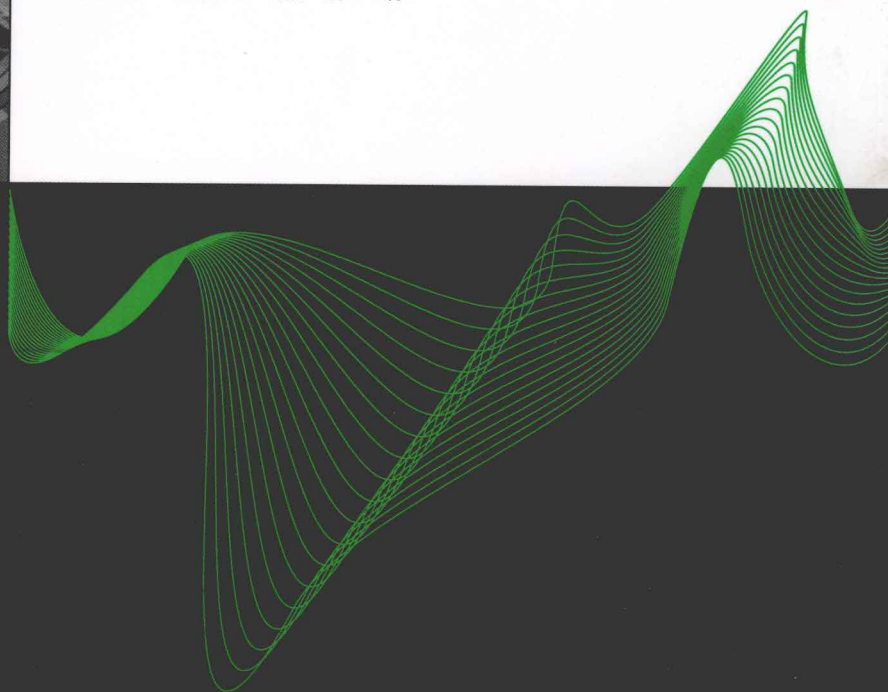
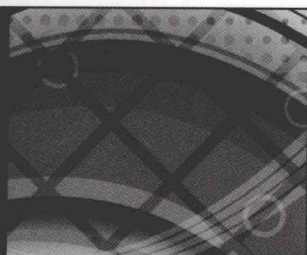


概率论与数理统计

◆ 大连理工大学数学科学学院
◆ 冯敬海 王晓光 鲁大伟 编



大学数学系列教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

大连理工大学数学科学学院
冯敬海 王晓光 鲁大伟 编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书以概率论与数理统计教学基本要求为依据,参考国内外主流教材编写而成。内容简练明确,同时注重理论分析与实际应用。主要讲授概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数的点估计及其优良性、参数的区间估计与假设检验等内容。

本书可作为高等院校各专业(数学专业除外)概率论与数理统计课程的教材,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 冯敬海, 王晓光, 鲁大伟编.

—北京: 高等教育出版社, 2012. 8

ISBN 978-7-04-035542-0

I. ①概… II. ①冯…②王…③鲁… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 181115 号

策划编辑 李 茜	责任编辑 李晓鹏 杨 帆	封面设计 李卫青	版式设计 杜微言
插图绘制 尹文军	责任校对 王 雨	责任印制 毛斯璐	

出版发行 高等教育出版社	咨询电话 400-810-0598
社 址 北京市西城区德外大街 4 号	网 址 http://www.hep.edu.cn
邮政编码 100120	http://www.hep.com.cn
印 刷 国防工业出版社印刷厂	网上订购 http://www.landaco.com
开 本 787mm×960mm 1/16	http://www.landaco.com.cn
印 张 13	版 次 2012 年 8 月第 1 版
字 数 230 千字	印 次 2012 年 8 月第 1 次印刷
购书热线 010-58581118	定 价 19.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 35542-00

前 言

本书以概率论与数理统计教学基本要求为依据,参考国内外主流教材编写而成,可供高等院校各专业(数学专业除外)使用,也可供工程技术人员参考。

概率论是研究随机现象内在规律的一门科学。它已广泛地应用于经济、金融、保险、工程技术、军事和工农业等各个领域,已成为理工、经管等各类专业本科生的必修课。本书由两部分组成:第一部分包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等内容。第二部分包括数理统计的基本概念、参数的点估计及其优良性、参数的区间估计与假设检验等内容。

本书的主要任务是帮助读者了解概率论与数理统计的基本概念,熟悉概率论与数理统计的思维方式,学会分析与解决实际问题的基本方法。在总结了多年教学经验的基础上,本书在编写过程中主要注意突出以下特点:

1. 对学生不容易理解的概念进行重点讲解,必要时提供了多种理解方式。
2. 对正态总体参数的置信区间与假设检验问题进行了全新的处理。

3. 习题量较大,每节后配有习题,每章后配有复习题,同时每章的最后都增加了综合例题,重点讲解较难的例题。

教师如果需要讲授本书全部内容,需 48 学时,如果只讲授概率论部分(即前 5 章),只需 32 学时。

虽然编者在教学过程中积累了一些教学经验,但由于水平所限,不足之处在所难免,恳请读者能够给予批评指正。

编 者

2012 年 6 月于创新园

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第 1 章 概率论的基本概念	1
§ 1.1 随机事件及其运算	1
1.1.1 随机试验(随机现象)与随机事件	1
1.1.2 事件间的关系与运算	3
习题	5
§ 1.2 概率的定义及其基本性质	6
1.2.1 频率与概率	6
1.2.2 概率的公理化定义	7
习题	10
§ 1.3 等可能概型(古典概型与几何概型)	10
1.3.1 古典概型	10
1.3.2 几何概型	14
习题	15
§ 1.4 条件概率	16
1.4.1 条件概率的定义	16
1.4.2 乘法公式	17
1.4.3 全概率公式与贝叶斯公式	18
习题	22
§ 1.5 独立性与伯努利试验	22
1.5.1 事件的相互独立性	22
1.5.2 n 重伯努利试验	24
习题	26
§ 1.6 综合例题	27
复习题 1	29
第 2 章 随机变量及其分布	31
§ 2.1 随机变量及其分布函数	31
2.1.1 随机变量	31
2.1.2 随机变量的分布函数	32
习题	35
§ 2.2 离散型随机变量	35

2.2.1 分布列及其性质	35
2.2.2 常见的离散型随机变量	37
习题	39
§ 2.3 连续型随机变量	40
2.3.1 连续型随机变量的定义与密度函数	40
2.3.2 常见的连续型随机变量	43
习题	52
§ 2.4 随机变量函数的分布	53
2.4.1 离散型随机变量函数的分布列	54
2.4.2 连续型随机变量函数的分布	54
习题	57
§ 2.5 综合例题	58
复习题 2	60
第 3 章 二维随机变量及其分布	62
§ 3.1 二维随机变量的联合分布与边际分布	62
3.1.1 二维随机变量的联合分布函数及其性质	62
3.1.2 边际分布函数	64
习题	65
§ 3.2 二维离散型随机变量	65
3.2.1 离散型随机变量的边际分布	66
3.2.2 二维离散型随机变量的独立性	69
3.2.3 二维离散型随机变量的条件分布列	70
习题	71
§ 3.3 二维连续型随机变量	72
3.3.1 二维连续型随机变量的边际密度	74
3.3.2 二维连续型随机变量的独立性	77
3.3.3 二维连续型随机变量的条件密度	78
习题	81
§ 3.4 二维随机变量函数的分布	81
3.4.1 二维离散型随机变量函数的分布	81
3.4.2 二维连续型随机变量函数的分布	82
3.4.3 极大极小分布	87
习题	88
§ 3.5 综合例题	89
复习题 3	91

第 4 章 随机变量的数字特征	93
§ 4.1 随机变量的数学期望	93
4.1.1 离散型随机变量的数学期望	93
4.1.2 连续型随机变量的数学期望	95
4.1.3 随机变量函数的数学期望	96
4.1.4 二维随机变量函数的数学期望	97
4.1.5 数学期望的性质	99
习题	101
§ 4.2 方差	102
4.2.1 随机变量的方差	102
4.2.2 方差的性质	104
4.2.3 常见分布的随机变量的期望与方差	104
习题	106
§ 4.3 协方差和相关系数	107
4.3.1 协方差	107
4.3.2 相关系数的定义与性质	109
习题	113
§ 4.4 其他数字特征	114
4.4.1 矩	114
4.4.2 协方差矩阵	114
习题	115
§ 4.5 综合例题	115
复习题 4	118
第 5 章 大数定律与中心极限定理	120
§ 5.1 大数定律	120
5.1.1 切比雪夫不等式	120
5.1.2 大数定律	121
习题	123
§ 5.2 中心极限定理	124
习题	127
第 6 章 数理统计的基本概念	128
§ 6.1 总体、样本、统计量	128
§ 6.2 常用统计量的分布	130
习题	134

§ 6.3 正态总体的抽样分布	134
习题	138
§ 6.4 抽样分布的上 α 分位点	138
习题	140
复习题 6	141
第 7 章 参数的点估计及其优良性	142
§ 7.1 点估计	142
7.1.1 矩估计法	142
7.1.2 最大似然估计法	145
习题	150
§ 7.2 点估计优良性的评定标准	150
7.2.1 无偏性	150
7.2.2 有效性	153
7.2.3 一致性(相合性)	153
习题	154
§ 7.3 综合例题	155
复习题 7	157
第 8 章 参数的区间估计与假设检验	159
§ 8.1 区间估计	159
习题	165
§ 8.2 假设检验	166
8.2.1 假设检验问题的提法	167
8.2.2 双侧检验与单侧检验	168
8.2.3 两类错误	169
8.2.4 正态总体假设检验的基本步骤	169
习题	172
附表	175
附表 1 几种常用的概率分布	175
附表 2 泊松分布表	178
附表 3 标准正态分布表	180
附表 4 χ^2 分布表	182
附表 5 t 分布表	185
附表 6 F 分布表	187

第 1 章 概率论的基本概念

在自然界和人类的生活活动中,人们会遇到各种各样的现象,这些现象按照结果可以分成两类:必然现象与随机现象.

所谓必然现象是指在一定的条件下某特定结果一定会出现的现象.例如“在一个大气压下,纯水加热到 100°C 必然会沸腾”,“以一定速度一定角度抛出一物体,在该物体落地前的任何一个时刻,其高度可以精确计算出一个唯一的结果,落点也是唯一确定的”.总之,对于必然现象,当条件满足时,其结果是可以预测的.

除了必然现象之外,还有一类现象,其结果是无法事先预知的,我们称之为随机现象.例如“掷一颗骰子出现的点数”是无法预知的,“某股票明天的收盘价格”也是无法预知的,“从 52 张(无大小王)扑克牌中任取一张,其字码与花色”是不能事先知道的.与必然现象不同,对于随机现象,尽管条件不变,但每次的结果都是不可预测的.

概率论之所以能够成为一门重要的数学学科,是因为它所研究的自然现象与其他的数学学科有本质区别.读者在此之前所学的所有数学学科都是研究必然性现象的,而概率论则是研究随机现象的,确切地说,是研究随机现象中的必然规律.

本章主要介绍概率论的基本知识以及一些简单应用,包括随机事件及事件之间的关系和运算、概率的定义、古典概型及几何概型、条件概率和全概率公式、事件的独立性与伯努利试验.这些基本概念与基本知识是学习概率论的基础,对理解整个概率论的内容是至关重要的.

§ 1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机试验(随机现象)与随机事件

研究随机现象,首先要对研究对象进行观察,所以在给出随机现象(或随机试验)的定义之前,我们先看几个简单的例子:

E_1 : 掷一枚硬币,观察出现正面还是反面;

E_2 : 掷一颗骰子,观察出现的点数;

E_3 : 掷两颗骰子,观察出现的点数;

E_4 : 掷两颗骰子, 观察出现的点数之和;

E_5 : 任取一个灯泡, 观察其寿命(单位:h);

E_6 : 观察某商店每天到达的顾客人数.

上述试验(或现象)具有两个共同特征: 每个试验的所有可能结果都是试验之前已知的, 但是在试验之前并不能预知哪个结果会出现. 比如骰子的所有点数是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 但掷之前并不知道哪个点数会出现; 每天到达商店的顾客人数可能是 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 中的任何一个数, 但不可能预知到底有几个人.

定义 1.1.1 一个现象 E 如果具有以下特征, 我们就称该现象为一个随机现象(或随机试验):

- (1) 该试验可在相同条件下重复地进行;
- (2) 所有可能出现的结果是已知的;
- (3) 试验之前不可预知哪个结果会出现.

以 $\Omega = \{\omega\}$ 表示随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 并称之为随机试验 E 对应的样本空间. Ω 的元素称为样本点, 即样本点就是可能结果.

例 1.1.1 随机试验 E_1 到 E_6 对应的样本空间分别为:

$$\Omega_1 = \{\text{正面, 反面}\}; \quad \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$\Omega_3 = \{(i, j): i, j = 1, 2, \dots, 6\}; \quad \Omega_4 = \{2, 3, \dots, 12\};$$

$$\Omega_5 = [0, +\infty); \quad \Omega_6 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

由随机试验 E_3 与 E_4 对应的样本空间 Ω_3 与 Ω_4 的区别可以看出, 虽然是相同的试验, 但由于观察的目的不一样, 对应的样本空间也是不一样的.

样本空间是一个集合, 但是, 一般情况下, 样本空间的子集对我们来讲更加重要. 比如, 赌徒在用骰子进行赌博时, 更加关心出现的点数是“大”还是“小”, “大”就是 4 或 5 或 6, 可以表示成 $A = \{4, 5, 6\}$, “小”就是 1 或 2 或 3, 可以表示成 $B = \{1, 2, 3\}$. 掷一颗骰子, 可能“大”也可能“小”, 或者说“大”和“小”都是可能发生也可能不发生的事件. 在随机现象中, 这种可能发生也可能不发生的事件是我们主要研究的对象. 由上面的例子可以看出 $A = \{4, 5, 6\}$ 与 $B = \{1, 2, 3\}$ 都是样本空间 $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集, 于是我们有下面的定义:

定义 1.1.2 一般地, 我们将随机试验 E 对应的样本空间 Ω 的子集称为随机试验的随机事件, 简称事件. 事件一般用 $A, B, C, \dots$ 表示.

随机事件是可能发生也可能不发生的事件, 如果在试验中, 属于某个事件 A 的样本点(即可能结果)出现了, 我们就称该事件发生了. 比如, 骰子出现的点数为 2, 那么“小”这个随机事件就发生了.

我们知道样本空间 Ω 作为一个集合, 它是自己的子集, 也是一个随机事件, 由于它包含了所有的样本点, 故每次试验它必然发生, 所以我们把样本空间 Ω

称为**必然事件**. 另外, 空集 $\emptyset$ 作为样本空间 Ω 的子集, 也是一个事件, 只不过它不包含任何样本点, 所以它在每次试验中都不可能发生, 于是我们把空集 $\emptyset$ 称为**不可能事件**. 比如买彩票, 如果你把所有的组合全买, 那么你必然中奖; 反之, 如果你一注也不买, 那你不可能中奖.

1.1.2 事件间的关系与运算

实际问题中遇到的随机事件往往是比较复杂的, 这就需要将较复杂的事件“分解”成一些简单事件的组合. 由前面的定义, 样本空间可以看作全集, 事件是其子集, 因此就可以用集合之间的关系和运算来描述事件之间的关系和运算.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 的每一个样本点都包含在事件 B 中, 则称事件 B 包含事件 A , 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ (图 1-1). 这时, 若事件 A 发生必导致事件 B 发生. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与 B 相等, 记为 $A=B$.

2. 和事件

设 A 与 B 为两个随机事件, 事件 $A \cup B$ 称为 A 与 B 的和事件. 有时 $A \cup B$ 也记为 $A+B$ (图 1-2). 用概率论的语言来说, $A \cup B$ 发生的充要条件为 A 与 B 至少有一个发生. 类似地, 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, 那么 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生.

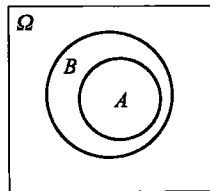


图 1-1

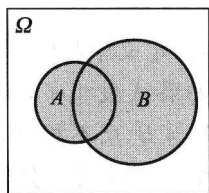


图 1-2

3. 积事件

设 A 与 B 为两个随机事件, 事件 $A \cap B$ 称为 A 与 B 的积事件. $A \cap B$ 经常写成 AB (图 1-3). 用概率论的语言来说, $A \cap B$ 发生的充要条件为 A 与 B 都(或同时)发生. 类似地, 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, 那么 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 都发生.

4. 差事件

设 A 与 B 为两个随机事件, $A-B$ 为 A 与 B 的差事件(图 1-4). 用概率论的语言来说, $A-B$ 发生的充要条件为 A 发生而 B 不发生.

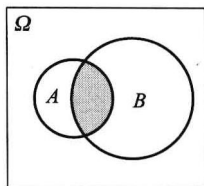


图 1-3

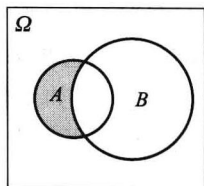


图 1-4

5. 补事件

设 A 为随机事件, 我们称 $\bar{A} = \Omega - A$ 为事件 A 的补事件 (图 1-5). 一般地我们称 A 与 $\bar{A}$ 互补, 或互逆.

注意 $A - B = A - AB = A\bar{B}$.

6. 互不相容

若 $AB = \emptyset$, 我们称 A 与 B 互不相容, 或互斥 (图 1-6).

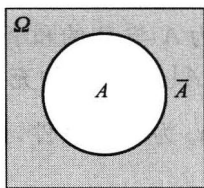


图 1-5

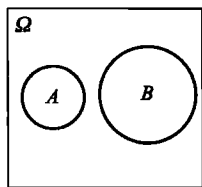


图 1-6

从互不相容的定义中我们可以看出, $AB = \emptyset$ 的意思是 A 与 B 不可能同时发生, 也就是说如果 A 发生了, B 就不会发生; 反之, 如果 B 发生了, A 就不会发生. 注意, 如果 A 与 B 互不相容, 并不是说 A 与 B 没有关系, 而是有很大的关系, 因为其中一个事件的发生会限制另一个事件的发生.

另外, 事件的运算与子集的运算一样, 必须遵循一些原则:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (3) 分配律: $B \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n (A_i B); B \cup (\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup B)$;
- (4) 德摩根律: $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i; \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$.

例 1.1.2 设有三个人各购买了一注福利彩票, 以 A 表示“第一个人中奖”, B 表示“第二个人中奖”, C 表示“第三个人中奖”. 试用 A, B, C 表示下列事件:

- (1) 至少有一个人中奖;
- (2) 恰有一个人中奖;

(3) 至多有一人中奖.

解 (1) $A \cup B \cup C$.

(2) 恰有一人中奖是指其中有一人中奖而另外两个人没中奖,即

$$\overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C}.$$

(3) 至多有一人中奖是指没有人中奖或恰有一人中奖,所以

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C}.$$

例 1.1.3 靶子由 10 个同心圆组成,半径分别为 $r_1, r_2, \dots, r_{10}$, 且 $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$, 以事件 A_k 表示命中点在半径为 r_k 的圆内,叙述下列事件的意义:

(1) $\bigcup_{k=1}^6 A_k$; (2) $\bigcap_{k=1}^8 A_k$; (3) $\overline{A_1}A_2$.

解 (1) 命中点在半径为 r_6 的圆域内;

(2) 命中点在半径为 r_1 的圆域内;

(3) 命中点在内径为 r_1 , 外径为 r_2 的圆环域内.

数学家简介 德摩根(De Morgan, 1806—1871), 英国数学家, 1823—1827 年间入读剑桥大学三一学院. 1828 年, 他的老师皮科克等人推荐他任伦敦大学学院数学教授一职. 1865 年, 他积极筹备伦敦数学会, 1866 年担任第一任会长. 德·摩根主要在分析学、代数学、数学史及逻辑学等方面作出重要的贡献. 他的工作对 19 世纪的数学具有相当的影响力.

习 题

1. 设 A, B, C 为三个事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:

- (1) B 发生, A, C 都不发生; (2) A, B, C 都发生;
- (3) A, B, C 至少有一个发生; (4) A, B, C 都不发生;
- (5) A, B, C 中不多于一个发生; (6) A, B, C 中不多于两个发生;
- (7) A, B, C 中至少有两个发生.

2. 在区间 $[0, 1]$ 上任取一数, 记 $A = \left\{ x \mid \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \right\}$, $B = \left\{ x \mid \frac{1}{3} \leq x < 1 \right\}$, 求下列事件的表达式: (1) $A \cup B$; (2) AB ; (3) $\overline{A}B$; (4) $A \cup \overline{B}$.

3. 某射手向一目标射击三次, 令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次射击命中目标}\} (i=1, 2, 3)$, $B = \{\text{三次射击中至少命中 1 次}\}$, $C_j = \{\text{三次射击中恰好命中 } j \text{ 次}\} (j=0, 1, 2, 3)$. 用 A_1, A_2, A_3 表示 B 和 C_j .

4. 记录某电话机在一天内的呼叫次数, 设 $A_k = \{\text{至少 } k \text{ 次呼叫}\}$, 试分别叙述事件 $\overline{A_k}$, $A_k - A_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^n A_k$, $\bigcap_{k=0}^n A_k$ 的含义.

§ 1.2 概率的定义及其基本性质

1.2.1 频率与概率

一个随机试验有多个可能结果,但是各种结果出现的机会并不一样.就是说,如果将试验进行很多次,有些结果出现的次数明显要多,有些则很少,它们具有统计规律性.比如,26个英文字母在英语的使用中出现的频率(即可能性)是不一样的,如果键盘把出现频率较高的一些字母排在便于手指碰到的地方,那么这样的键盘在打字时速度就会比较快.为了统一地描述这种规律性,下面我们给出一个定量的刻画.

设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间, A 为 E 的一个事件.将试验重复进行 n 次,其中事件 A 发生了 n_A 次,则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 A 发生的频率,记作 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$. “频率”的大小反映了事件 A 在试验中发生的频繁程度.容易看出,频率具有以下性质:

- (1) 非负性: $f_n(A) \geq 0$;
- (2) 归一性: $f_n(\Omega) = 1$;
- (3) 有限可加性:若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 为两两互不相容的事件,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i).$$

例如,将“抛硬币”的随机试验重复进行 n 次,记 $A = \{\text{正面向上}\}$,事件 A 发生的次数记作 n_A ,则事件 A 发生的频率为 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.当 n 较小时,频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度比较大,但随着 n 的增大,频率将呈现出稳定性.一些著名的统计学家曾进行过大量抛掷硬币的试验,所得结果如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	投掷次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

从表 1-1 中可以看出,随着投掷次数的不断增加,出现正面的频率越来越接近 $\frac{1}{2}$,这说明出现正面的概率为 $\frac{1}{2}$.

1.2.2 概率的公理化定义

在上面,事件的概率是用频率来定义的,称为概率的统计学定义.但在实际问题中,我们不可能对每一个事件都进行大量的试验.一个事件 A 的概率 $P(A)$ 不是定义出来的,也不是凭空捏造出来的,它是现实存在的.因此,为了理论分析与实际应用的需要,从频率的三条性质出发定义概率,就得到了概率的公理化定义.

定义 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间,如果对于任意事件 $A \subset \Omega$,有一个实数 $P(A)$ 与之对应,且满足:

- (1) 非负性: $P(A) \geq 0$;
- (2) 归一性: $P(\Omega) = 1$;
- (3) 可加性: 设 $A_1, A_2, \dots$ 是一列两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad (1.2.1)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

从定义中可以看出,概率 P 是一个映射,它将 Ω 的任何一个子集(事件) A 映成一个实数 $P(A)$,但要遵循一定的规则.另外,读者应该知道,只有事件才能有概率,其他任何事物都没有概率.

上述定义是柯尔莫哥洛夫于 1933 年给出的,在此之前许多人将概率论视为伪科学而拒不接受.在柯尔莫哥洛夫给出概率的定义之后,概率论才发展成为一门科学,并应用日益广泛,渗透到各个工程领域及其他应用领域,已成为目前每个工程技术人员与理论工作者必不可少的工具.

由定义的四条公理,可以得到概率的一些基本性质如下:

- (1) $P(\emptyset) = 0$.

证明 由于 $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, 所以,由可加性可得

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots,$$

所以 $P(\emptyset) = 0$.

- (2) **有限可加性** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.2.2)$$

证明 取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$, 由可加性可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

(3) 如果 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$.

证明 因为 $B = A \cup B\bar{A}$, 且 A 与 $B\bar{A}$ 互不相容, 所以由有限可加性得

$$P(B) = P(A) + P(B\bar{A}),$$

又因为 $P(B\bar{A}) \geq 0$, 所以 $P(A) \leq P(B)$.

(4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

证明 因为 A 与 $\bar{A}$ 互不相容且 $\Omega = A \cup \bar{A}$, 所以

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

(5) 减法公式

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \quad (1.2.3)$$

证明 因为 $A = AB \cup A\bar{B}$, 且 AB 与 $A\bar{B}$ 互不相容, 所以

$$P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}),$$

即 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$.

(6) 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.2.4)$$

证明 因为 $A \cup B = B \cup A\bar{B}$, 且 B 与 $A\bar{B}$ 互不相容, 所以

$$P(A \cup B) = P(B \cup A\bar{B}) = P(B) + P(A\bar{B}) = P(B) + P(A) - P(AB),$$

其中加法公式可以推广到多个事件的情形, 比如

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

证明留给读者.

例 1.2.1 设事件 A 与 B 的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{3}$, 试求下列三种情况下

$P(A - B)$ 的值: (1) $AB = \emptyset$; (2) $B \subset A$; (3) $P(AB) = \frac{1}{4}$.

解 (1) 因为 $P(AB) = 0$, 所以 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) = \frac{1}{2}$;

(2) 因为 $B \subset A$, 所以 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(B) = \frac{1}{6}$;