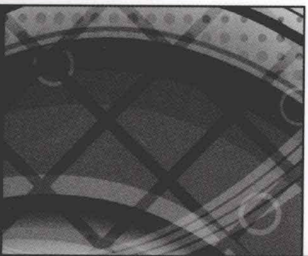
大 学 数 学 系 列 教 材

概率论与数理统计



◆ 大连理工大学数学科学学院
◆ 冯敬海　王晓光　鲁大伟　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

大连理工大学数学科学学院
冯敬海　王晓光　鲁大伟　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书以概率论与数理统计教学基本要求为依据，参考国内外主流教材编写而成。内容简练明确，同时注重理论分析与实际应用。主要讲授概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数的点估计及其优良性、参数的区间估计与假设检验等内容。

本书可作为高等院校各专业（数学专业除外）概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／冯敬海，王晓光，鲁大伟编. --北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-035542-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①冯…②王…③鲁… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第181115号

策划编辑 李 茜　责任编辑 李晓鹏 杨 帆　封面设计 李卫青　版式设计 杜微言
插图绘制 尹文军　责任校对 王 雨　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13	版　　次	2012年8月第1版
字　　数	230千字	印　　次	2012年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	19.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　35542-00

前　言

本书以概率论与数理统计教学基本要求为依据，参考国内外主流教材编写而成，可供高等院校各专业（数学专业除外）使用，也可供工程技术人员参考。

概率论是研究随机现象内在规律的一门科学。它已广泛地应用于经济、金融、保险、工程技术、军事和工农业等各个领域，已成为理工、经管等各类专业本科生的必修课。本书由两部分组成：第一部分包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等内容。第二部分包括数理统计的基本概念、参数的点估计及其优良性、参数的区间估计与假设检验等内容。

本书的主要任务是帮助读者了解概率论与数理统计的基本概念，熟悉概率论与数理统计的思维方式，学会分析与解决实际问题的基本方法。在总结了多年教学经验的基础上，本书在编写过程中主要注意突出以下特点：

1. 对学生不容易理解的概念进行重点讲解，必要时提供了多种理解方式。

2. 对正态总体参数的置信区间与假设检验问题进行了全新的处理。

3. 习题量较大，每节后配有习题，每章后配有复习题，同时每章的最后都增加了综合例题，重点讲解较难的例题。

教师如果需要讲授本书全部内容，需 48 学时，如果只讲授概率论部分（即前 5 章），只需 32 学时。

虽然编者在教学过程中积累了一些教学经验，但由于水平所限，不足之处在所难免，恳请读者能够给予批评指正。

编　者

2012 年 6 月于创新园

郑重声明

目　录

第1章 概率论的基本概念

在自然界和人类的生活活动中,人们会遇到各种各样的现象,这些现象按照结果可以分成两类:必然现象与随机现象.

所谓必然现象是指在一定的条件下某特定结果一定会出现的现象.例如“在一个大气压下,纯水加热到100℃必然会沸腾”,“以一定速度一定角度抛出一物体,在该物体落地前的任何一个时刻,其高度可以精确计算出一个唯一的结果,落点也是唯一确定的”.总之,对于必然现象,当条件满足时,其结果是可以预测的.

除了必然现象之外,还有一类现象,其结果是无法事先预知的,我们称之为随机现象.例如“掷一颗骰子出现的点数”是无法预知的,“某股票明天的收盘价格”也是无法预知的,“从52张(无大小王)扑克牌中任取一张,其字码与花色”是不能事先知道的.与必然现象不同,对于随机现象,尽管条件不变,但每次的结果都是不可预测的.

概率论之所以能够成为一门重要的数学学科,是因为它所研究的自然现象与其他的数学学科有本质区别.读者在此之前所学的所有数学学科都是研究必然性现象的,而概率论则是研究随机现象的,确切地说,是研究随机现象中的必然规律.

本章主要介绍概率论的基本知识以及一些简单应用,包括随机事件及事件之间的关系和运算、概率的定义、古典概型及几何概型、条件概率和全概率公式、事件的独立性与伯努利试验.这些基本概念与基本知识是学习概率论的基础,对理解整个概率论的内容是至关重要的.

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机试验(随机现象)与随机事件

研究随机现象,首先要对研究对象进行观察,所以在给出随机现象(或随机试验)的定义之前,我们先看几个简单的例子:

E_1:掷一枚硬币,观察出现正面还是反面;

E_2:掷一颗骰子,观察出现的点数;

E_3:掷两颗骰子,观察出现的点数;

E_4：掷两颗骰子，观察出现的点数之和；

E_5：任取一个灯泡，观察其寿命(单位：h)；

E_6：观察某商店每天到达的顾客人数.

上述试验(或现象)具有两个共同特征：每个试验的所有可能结果都是试验之前已知的，但是在试验之前并不能预知哪个结果会出现. 比如骰子的所有点数是1,2,3,4,5,6，但掷之前并不知道哪个点数会出现；每天到达商店的顾客人数可能是$\{0,1,2,\cdots\}$中的任何一个数，但不可能预知到底有几个人.

定义 1.1.1 一个现象E如果具有以下特征，我们就称该现象为一个**随机现象(或随机试验)**：

(1) 该试验可在相同条件下重复地进行；

(2) 所有可能出现的结果是已知的；

(3) 试验之前不可预知哪个结果会出现.

以$\Omega=\{\omega\}$表示随机试验E的所有可能结果组成的集合，并称之为随机试验E对应的**样本空间**. Ω的元素称为**样本点**，即样本点就是可能结果.

例 1.1.1 随机试验E_1到E_6对应的样本空间分别为：

$\Omega_1=\{$正面,反面$\}$； $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_3=\{(i,j):i,j=1,2,\cdots,6\}$； $\Omega_4=\{2,3,\cdots,12\}$；

$\Omega_5=[0,+\infty)$； $\Omega_6=\{0,1,2,\cdots\}$.

由随机试验E_3与E_4对应的样本空间Ω_3与Ω_4的区别可以看出，虽然是相同的试验，但由于观察的目的不一样，对应的样本空间也是不一样的.

样本空间是一个集合，但是，一般情况下，样本空间的子集对我们来讲更加重要. 比如，赌徒在用骰子进行赌博时，更加关心出现的点数是“大”还是“小”，“大”就是4或5或6，可以表示成$A=\{4,5,6\}$，“小”就是1或2或3，可以表示成$B=\{1,2,3\}$. 掷一颗骰子，可能“大”也可能“小”，或者说“大”和“小”都是可能发生也可能不发生的事件. 在随机现象中，这种可能发生也可能不发生的事件是我们主要研究的对象. 由上面的例子可以看出$A=\{4,5,6\}$与$B=\{1,2,3\}$都是样本空间$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$的子集，于是我们有下面的定义：

定义 1.1.2 一般地，我们将随机试验E对应的样本空间Ω的子集称为随机试验的**随机事件**，简称事件. 事件一般用$A,B,C,\cdots$表示.

随机事件是可能发生也可能不发生的事件，如果在试验中，属于某个事件A的样本点(即可能结果)出现了，我们就称该事件发生了. 比如，骰子出现的点数为2，那么“小”这个随机事件就发生了.

我们知道样本空间Ω作为一个集合，它是自己的子集，也是一个随机事件，由于它包含了所有的样本点，故每次试验它必然发生，所以我们把样本空间Ω

称为**必然事件**. 另外,空集$\varnothing$作为样本空间Ω的子集,也是一个事件,只不过它不包含任何样本点,所以它在每次试验中都不可能发生,于是我们把空集$\varnothing$称为**不可能事件**. 比如买彩票,如果你把所有的组合全买,那么你必然中奖;反之,如果你一注也不买,那你不可能中奖.

1.1.2 事件间的关系与运算

实际问题中遇到的随机事件往往是比较复杂的,这就需要我们将较复杂的事件"分解"成一些简单事件的组合. 由前面的定义,样本空间可以看作全集,事件是其子集,因此就可以用集合之间的关系和运算来描述事件之间的关系和运算.

1. 事件的包含与相等

若事件A的每一个样本点都包含在事件B中,则称事件B包含事件A,记为$A\subset B$或$B\supset A$(图 1-1). 这时,若事件A发生必导致事件B发生. 若$A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A与B相等,记为$A=B$.

2. 和事件

设A与B为两个随机事件,事件$A\cup B$称为A与B的和事件. 有时$A\cup B$也记为$A+B$(图 1-2). 用概率论的语言来说,$A\cup B$发生的充要条件为A与B至少有一个发生. 类似地,如果$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个事件,那么$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$表示$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生.

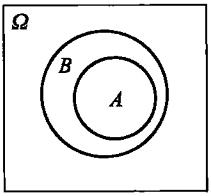


图 1-1

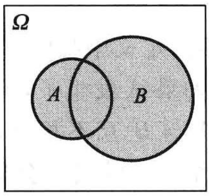


图 1-2

3. 积事件

设A与B为两个随机事件,事件$A\cap B$称为A与B的积事件. $A\cap B$经常写成AB(图 1-3). 用概率论的语言来说,$A\cap B$发生的充要条件为A与B都(或同时)发生. 类似地,如果$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个事件,那么$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$表示$A_1,A_2,\cdots,A_n$都发生.

4. 差事件

设A与B为两个随机事件,$A-B$为A与B的差事件(图 1-4). 用概率论的语言来说,$A-B$发生的充要条件为A发生而B不发生.

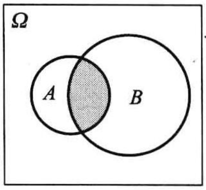


图1-3

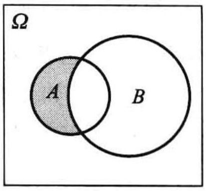


图1-4

5. 补事件

设A为随机事件,我们称$\overline{A}=\Omega-A$为事件A的补事件(图1-5).一般地我们称A与$\overline{A}$互补,或互逆.

注意$A-B=A-AB=A\overline{B}$.

6. 互不相容

若$AB=\varnothing$,我们称A与B **互不相容**,或互斥(图1-6).

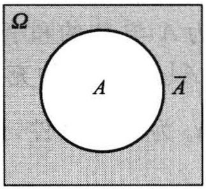


图1-5

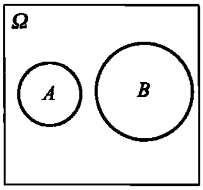


图1-6

从互不相容的定义中我们可以看出,$AB=\varnothing$的意思是A与B不可能同时发生,也就是说如果A发生了,B就不会发生;反之,如果B发生了,A就不会发生.注意,如果A与B互不相容,并不是说A与B没有关系,而是有很大的关系,因为其中一个事件的发生会限制另一个事件的发生.

另外,事件的运算与子集的运算一样,必须遵循一些原则:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律:$B\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A_iB)$;$B\cup(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(A_i\cup B)$;

(4) 德摩根律:$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

例1.1.2 设有三个人各购买了一注福利彩票,以A表示"第一个人中奖",B表示"第二个人中奖",C表示"第三个人中奖".试用A,B,C表示下列事件:

(1) 至少有一个人中奖;

(2) 恰有一个人中奖;

(3) 至多有一个人中奖.

解 (1) $A\cup B\cup C$.

(2) 恰有一个人中奖是指其中有一个人中奖而另外两个人没中奖，即

$$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C.$$

(3) 至多有一个人中奖是指没有人中奖或恰有一个人中奖，所以

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C.$$

例 1.1.3 靶子由 10 个同心圆组成，半径分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_{10}$，且 $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$，以事件 A_k 表示命中点在半径为 r_k 的圆内，叙述下列事件的意义：

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{6}A_k$；(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{8}A_k$；(3) $\bar{A}_1A_2$.

解 (1) 命中点在半径为 r_6 的圆域内；

(2) 命中点在半径为 r_1 的圆域内；

(3) 命中点在内径为 r_1，外径为 r_2 的圆环域内.

数学家简介 德摩根(De Morgan，1806—1871)，英国数学家，1823—1827年间入读剑桥大学三一学院．1828 年，他的老师皮科克等人推荐他任伦敦大学学院数学教授一职．1865 年，他积极筹备伦敦数学会，1866 年担任第一任会长．德·摩根主要在分析学、代数学、数学史及逻辑学等方面作出重要的贡献．他的工作对 19 世纪的数学具有相当的影响力.

习　　题

1. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) B 发生，A,C 都不发生；　(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 至少有一个发生；　(4) A,B,C 都不发生；

(5) A,B,C 中不多于一个发生；　(6) A,B,C 中不多于两个发生；

(7) A,B,C 中至少有两个发生.

2. 在区间$[0,1]$上任取一数，记 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant x<1\right\}$，求下列事件的表达式：(1)$A\cup B$；(2)$AB$；(3)$\bar{A}B$；(4)$A\cup\bar{B}$.

3. 某射手向一目标射击三次，令 $A_i=\{$第 i 次射击命中目标$\}(i=1,2,3)$，$B=\{$三次射击中至少命中 1 次$\}$，$C_j=\{$三次射击中恰好命中 j 次$\}(j=0,1,2,3)$. 用 A_1,A_2,A_3 表示 B 和 C_j.

4. 记录某电话机在一天内的呼叫次数，设 $A_k=\{$至少 k 次呼叫$\}$，试分别叙述事件 $\bar{A}_k$，A_k-A_{k+1}，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，$\bigcap\limits_{k=0}^{n}A_k$ 的含义.

§1.2　概率的定义及其基本性质

1.2.1　频率与概率

一个随机试验有多个可能结果，但是各种结果出现的机会并不一样. 就是说，如果将试验进行很多次，有些结果出现的次数明显要多，有些则很少，它们具有统计规律性. 比如，26 个英文字母在英语的使用中出现的频率（即可能性）是不一样的，如果键盘把出现频率较高的一些字母排在便于手指碰到的地方，那么这样的键盘在打字时速度就会比较快. 为了统一地描述这种规律性，下面我们给出一个定量的刻画.

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，A 为 E 的一个事件. 将试验重复进行 n 次，其中事件 A 发生了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 A 发生的频率，记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$. "频率"的大小反映了事件 A 在试验中发生的频繁程度. 容易看出，频率具有以下性质：

(1) 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$；

(2) 归一性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为两两互不相容的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

例如，将"抛硬币"的随机试验重复进行 n 次，记 $A=\{$正面向上$\}$，事件 A 发生的次数记作 n_A，则事件 A 发生的频率为 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$. 当 n 较小时，频率 $f_n(A)$在 0 与 1 之间随机波动，其幅度比较大，但随着 n 的增大，频率将呈现出稳定性. 一些著名的统计学家曾进行过大量抛掷硬币的试验，所得结果如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	投掷次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K・皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

从表 1－1 中可以看出，随着投掷次数的不断增加，出现正面的频率越来越接近$\frac{1}{2}$，这说明出现正面的概率为$\frac{1}{2}$.

1.2.2 概率的公理化定义

在上面，事件的概率是用频率来定义的，称为概率的统计学定义. 但在实际问题中，我们不可能对每一个事件都进行大量的试验. 一个事件 A 的概率 $P(A)$ 不是定义出来的，也不是凭空捏造出来的，它是现实存在的. 因此，为了理论分析与实际应用的需要，从频率的三条性质出发定义概率，就得到了概率的公理化定义.

定义 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，如果对于任意事件 $A\subset\Omega$，有一个实数 $P(A)$与之对应，且满足：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2) 归一性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$是一列两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.2.1}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

从定义中可以看出，概率 P 是一个映射，它将 Ω 的任何一个子集(事件)A 映成一个实数 $P(A)$，但要遵循一定的规则. 另外，读者应该知道，只有事件才能有概率，其他任何事物都没有概率.

上述定义是柯尔莫哥洛夫于 1933 年给出的，在此之前许多人将概率论视为伪科学而拒不接受. 在柯尔莫哥洛夫给出概率的定义之后，概率论才发展成为一门科学，并应用日益广泛，渗透到各个工程领域及其他应用领域，已成为目前每个工程技术人员与理论研究工作者必不可少的工具.

由定义的三条公理，可以得到概率的一些基本性质如下：

(1) $P(\varnothing)=0$.

证明 由于$\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，所以，由可加性可得

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots,$$

所以 $P(\varnothing)=0$.

(2) **有限可加性** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.2.2}$$

证明 取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，由可加性可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) 如果 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$.

证明 因为 $B = A \cup B\bar{A}$,且 A 与 $B\bar{A}$ 互不相容,所以由有限可加性得

$$P(B) = P(A) + P(B\bar{A}),$$

又因为 $P(B\bar{A}) \geqslant 0$,所以 $P(A) \leqslant P(B)$.

(4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

证明 因为 A 与 $\bar{A}$ 互不相容且 $\Omega = A \cup \bar{A}$,所以

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

(5) **减法公式**

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \tag{1.2.3}$$

证明 因为 $A = AB \cup A\bar{B}$,且 AB 与 $A\bar{B}$ 互不相容,所以

$$P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}),$$

即 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$.

(6) **加法公式**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.2.4}$$

证明 因为 $A \cup B = B \cup A\bar{B}$,且 B 与 $A\bar{B}$ 互不相容,所以

$$P(A \cup B) = P(B \cup A\bar{B}) = P(B) + P(A\bar{B}) = P(B) + P(A) - P(AB),$$

其中加法公式可以推广到多个事件的情形,比如

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

证明留给读者.

例 1.2.1 设事件 A 与 B 的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{3}$,试求下列三种情况下 $P(A-B)$ 的值:(1) $AB = \varnothing$;(2) $B \subset A$;(3) $P(AB) = \frac{1}{4}$.

解 (1) 因为 $P(AB) = 0$,所以 $P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) = \frac{1}{2}$;

(2) 因为 $B \subset A$,所以 $P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(B) = \frac{1}{6}$;