数学 4

全日制十年制学校高中课本·第四册

SHUXUE

人民教育出版社

目　　录

第七章　数列和极限

一　数列

7.1　数列

我们看下面的例子:

1. 图 7-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层. 自上而下各层的钢管数排列成一列数:

$$4,5,6,7,8,9,10. \quad (1)$$

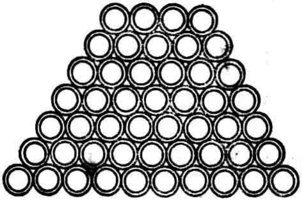

图　7-1

2. 自然数 1, 2, 3, 4, 5, … 的倒数排列成一列数:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots. \quad (2)$$

3. $\sqrt{2}$ 的精确到1, 0.1, 0.01, 0.001, … 的不足近似值排列成一列数:

$$1,1.4,1.41,1.414,\cdots. \qquad (3)$$

象上面例子中按一定次序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数叫做这个数列的**一项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项，……，第 n 项，……. 对于上面的数列(1)，每一项与它的序号有下面的对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{项} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

这告诉我们：数列可看作一个定义域为自然数集(或它的有限子集 $\{1,2,\cdots,n\}$) 的函数当自变量从小到大依次取自然数时相应的一系列函数值.

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项. 有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$. 例如,把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作$\left\{\frac{1}{n}\right\}$. 如果一个数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示，就把这个公式叫做这个数列的**通项公式**. 例如，数列(1)的通项公式是 $a_n=n+3$, $(n\leqslant 7)$; 数列(2)的通项公式是 $a_n=\frac{1}{n}$. 如果已知一个数列的通项公式, 那么只要依次用 1, 2, 3… 去代替公式中的 n, 就可以求出这个数列的各项.

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 上面的数列(1)是有穷数列, 数列(2)与数列(3)是无穷数列.

例 1 根据通项公式, 求出下面各数列的前 5 项:

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$;　　　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解: (1) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$, 得到数列的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6};$$

（2）在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列的前5项为

$$-1,2,-3,4,-5.$$

例2 写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

（1）1, 3, 5, 7；

（2）$\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$；

（3）$-\frac{1}{1\cdot2},\ \frac{1}{2\cdot3},\ -\frac{1}{3\cdot4},\ \frac{1}{4\cdot5}$.

解：（1）数列的前4项1, 3, 5, 7都是序号的2倍减去1，所以通项公式是 $a_n=2n-1$；

（2）数列的前4项 $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$ 的分母都等于序号加上1，分子都等于分母的平方减去1，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

（3）数列的前4项 $-\frac{1}{1\cdot2},\frac{1}{2\cdot3},-\frac{1}{3\cdot4},\frac{1}{4\cdot5}$ 的绝对值都等于序号与序号加上1的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

练　习

1. 根据下面数列的通项公式，写出它的前5项：

(1) $a_n=n^2$;　　(2) $a_n=10n$;

(3) $a_n=(-1)^{n+1}$;　　(4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列的通项公式，写出它的第7项与第10项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3}$;　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n+3$.

3. (口答)说出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 2, 4, 6, 8;

(2) 15, 25, 35, 45;

(3) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点，试在框内填上适当的数，并写出它们的通项公式：

(1) 2, 4, $\boxed{}$, 8, 10, $\boxed{}$, 14;

(2) 2, 4, $\boxed{}$, 16, 32, $\boxed{}$, 128, $\boxed{}$;

(3) $\boxed{}$, 4, 9, 16, 25, $\boxed{}$, 49;

(4) $\boxed{}$, 4, 3, 2, 1, $\boxed{}$, -1, $\boxed{}$;

(5) 1, $\sqrt{2}$, $\boxed{}$, 2, $\sqrt{5}$, $\boxed{}$, $\sqrt{7}$.

例 3 一个数列的第 1 项是 1，以后各项由公式 $a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$ 给出，写出这个数列的前 5 项.

解： $a_1=1$,

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}.$$

练 习

写出下面数列的前 5 项：

(1) $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n+3$;

(2) $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$;

(3) $a_1=3$, $a_2=6$, $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$;

(4) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

1.2 等差数列

上一节中我们提到过数列

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \qquad (1)$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 1.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示. 例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

与

$$5, 0, -5, -10, \cdots$$

都是等差数列，它们的公差分别是 2 与 -5.

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

例 1 求等差数列 8, 5, 2, …的第 20 项.

解：$\because \quad a_1 = 8,\ d = 5 - 8 = -3,\ n = 20,$

$\therefore \quad a_{20} = 8 + (20-1) \times (-3) = -49.$

例 2 等差数列 $-5, -9, -13, \cdots$ 的第几项是 -401？

解：$a_1 = -5,\ d = -9 - (-5) = -4,\ a_n = -401$，因此，

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得

$$n=100.$$

答：这个数列的第 100 项是 -401.

例 3 梯子的最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110 cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列. 计算中间各级的宽.

解：$a_1=33$，$a_{12}=110$，$n=12$，

$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

因此，

$$a_2=33+7=40,$$

$$a_3=40+7=47,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽从上到下依次是 40，47，54，61，68，75，82，89，96，103 cm.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷

等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项.

练　习

1. (1) 求等差数列 3, 7, 11, … 的第 4, 7, 10 项;

   (2) 求等差数列 10, 8, 6, … 的第 20 项;

   (3) 求等差数列 2, 9, 16, … 的第 n 项;

   (4) 求等差数列 0, $-3\frac{1}{2}$, -7, … 的第 $n+1$ 项.

2. 在等差数列里:

   (1) $d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 a_1;

   (2) $a_1=12$, $a_6=27$, 求 d;

   (3) $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 n;

   (4) $a_4=10$, $a_7=19$, 求 a_1 与 d.

下面通过一个具体例子，说明求等差数列的前 n 项和的方法.

为了求出图 7-1 所示的钢管的总数，我们设想在这堆钢管的旁边,如图 7-2 那样倒放着同样的一堆钢管. 这样,每层

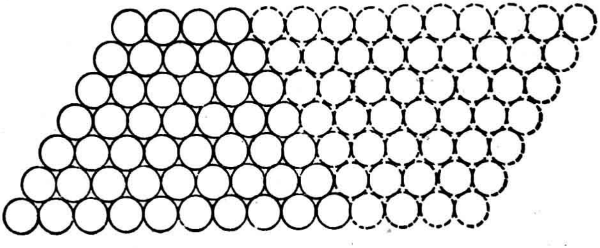

图 7-2

的钢管数都相等，即

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

由于共有 7 层，两堆钢管的总数是$(4+10)\times 7$，因此所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times 7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

它的前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]. \quad (1)$$

同理，把各项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)的两边分别相加，得

$$\begin{aligned} 2S_n &= \overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{ 个}} \\ &= n(a_1+a_n), \end{aligned}$$

由此得到等差数列的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 4　如图 7-3 所示，一个堆放铅笔的V形架的最下面一层放 1 支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放 1 支，最上面一层放 120 支。这个V形架上共放着多少支铅笔？

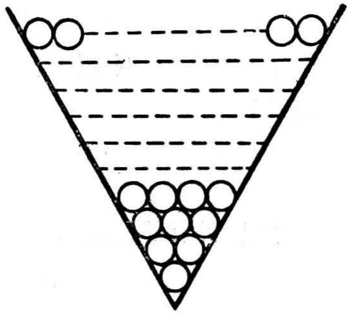

图　7-3

解： 由题意可知，这个V形架上共放着 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，其中 $a_1=1$，$a_{120}=120$. 根据等差数列前 n 项和的公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7260(\text{支}).$$

答：V形架上共放着 7260 支铅笔.

例 5　在小于 100 的正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？求它们的和.

解： 在小于 100 的正整数的集合中，以下各数是 7 的倍数：

$$7,\ 7\times2,\ 7\times3,\ \cdots,\ 7\times14,$$

或记作

$$7, 14, 21, \cdots, 98.$$

显然，这个数列共有 14 项，并且是一个等差数列，其中 $a_1=7$，$a_{14}=98$. 因此，

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

答：在小于 100 的正整数的集合中有 14 个数是 7 的倍数，它们的和等于 735.

例 6 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列，求证它们的比是 3:4:5.

证明： 将成等差数列的三条边的长从小到大排列，它们可以表示为 $a-d, a, a+d$，这里 $a-d>0, d>0$. 由于它们是直角三角形的三条边的长，根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

于是这三条边的长是 $3d, 4d, 5d$.

因此，这三条边的长的比是 3:4:5.

练　习

1. 根据下列各组条件，求相应的等差数列的 S_n：

(1) $a_1=5,\ a_n=95,\ n=10$;

(2) $a_1=100,\ d=-2,\ n=50$;

(3) $a_1=\frac{2}{3},\ a_n=-\frac{3}{2},\ n=14$;

(4) $a_1=14.5,\ d=0.7,\ a_n=32$.

2. (1) 求自然数列中前 n 个数的和；

(2) 求自然数列中前 n 个偶数的和.

习　题　一

1. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $3, 6, 9, 12$;　　(2) $0, -2, -4, -6$;

(3) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$;　　(4) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}$;

(5) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$;　　(6) $\sqrt[3]{1}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列 $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$.

(1) 求这个数列的第 10 项, 第 31 项及第 48 项;

(2) 420 是这个数列中的第几项?

3. (1) 一个数列的第 1 项是 1, 第 2 项是 2, 以后各项由公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 给出. 写出这个数列的前 10 项.

(2) 用上面的数列, 通过公式 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$, 可构造一个新的数列: 第 1 项是上面数列中第 1 项与第 2 项的商 $\frac{1}{2}$, 第 2 项是上面数列中第 2 项与第 3 项的商 $\frac{2}{3}$, 依此类推. 写出这个数列的前 10 项.

4. 已知一个数列的通项公式是 $a_n=-2n+3$.

(1) 计算 a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, a_5-a_4;

(2) 计算 $a_{n+1}-a_n$;

(3) 这个数列是不是等差数列? 它的首项与公差各是多少?

5. (1) 一个等差数列的第 1 项是 5.6, 第 6 项是 20.6, 求它的第 4 项;

(2) 一个等差数列的第 3 项是 9, 第 9 项是 3, 求它的第 12 项.

6. 求下列各组数的等差中项:

(1) 647 与 895;　　　　　　(2) -180 与 360;

(3) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 与 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; (4) $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$.

7. (1) 下面是全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码(表示鞋底长,单位是厘米):

$21,\ 21\frac{1}{2},\ 22,\ 22\frac{1}{2},\ 23,\ 23\frac{1}{2},\ 24,\ 24\frac{1}{2},\ 25.$

这些尺码是否成等差数列?如果是,公差是多少?

(2) 全国统一鞋号中成年男鞋共有 14 种尺码,其中最小的尺码是 $23\frac{1}{2}$(厘米),各相邻的两个尺码都相差 $\frac{1}{2}$ 厘米,将全部尺码按从小到大的顺序写出来.

8. (1) 在 12 与 60 之间插入 3 个数,使它们同这两个数成等差数列;

(2) 在 8 与 36 之间插入 6 个数,使它们同这两个数成等差数列.

9. 在通常情况下,从地面到 1 万米高空,高度每增加 1 千米,气温就下降某一固定数值.如果 1 千米高度的气温是 8.5°C, 5 千米高度的气温是 -17.5°C,求 2 千米、4 千米及 8 千米高度的气温.

10. 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列,且最大的与最小的皮带轮的直径分别是 216 毫米与 120 毫米,求中间三个皮带轮的直径.

11. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列,其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 与 45,求其余各齿轮的齿数.

12. (1) 在正整数集合中有多少个三位数？求它们的和.

(2) 在三位正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？求它们的和.

(3) 求等差数列 13, 15, 17, …, 81 的各项的和.

(4) 求等差数列 10, 7, 4, …, −47 的各项的和.

13. 根据下列各组条件，求相应的等差数列的有关未知数：

(1) $a_1=20, a_n=54, S_n=999$, 求 d 及 n;

(2) $d=\frac{1}{3}$, $n=37$, $S_n=629$, 求 a_1 及 a_n;

(3) $a_1=\frac{5}{6}$, $d=-\frac{1}{6}$, $S_n=-5$, 求 n 及 a_n;

(4) $d=2$, $n=15$, $a_n=-10$, 求 a_1 及 S_n.

14. (1) 某等差数列的通项公式是 $a_n=3n-2$, 求它的前 n 项的和的公式.

(2) 某等差数列的前 n 项和的公式是 $S_n=5n^2+3n$, 求它的前 3 项, 并求它的通项公式.

15. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺了瓦片 21 块，往下每一层多铺一块，斜面上铺了瓦片 19 层，共铺瓦片多少块？

16. 一个剧场设置了 20 排座位，第一排有 38 个座位，往后每一排都比前一排多 2 个座位. 这个剧场一共设置了多少个座位？

17. 一个等差数列的第 6 项是 5，第 3 项与第 8 项的和也是 5. 求这个等差数列前 9 项的和.

18. 三个数成等差数列，它们的和等于 18，它们的平方和等于 116，求这三个数.

19. 某多边形的周长等于158cm，所有各边的长成等差数列，最大的边长等于 44cm，公差等于 3cm，求多边形的边数.

20. 一个梯形两条底边的长分别是 12cm 与 22cm，将梯形的一条腰 10 等分，过每个分点作平行于梯形底边的直线，求所作的夹在梯形两腰间的所有平行线段的长度的和.

7.3 等比数列

我们知道，细胞逐次分裂后的个数，组成数列

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots.$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于常数 2.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**，通常用字母 q 表示. 例如，数列

$$5,\ 25,\ 125,\ 625,\ \cdots$$

与

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots$$

都是等比数列，它们的公比分别是 5 与 $-\frac{1}{2}$.

因为在一个等比数列里，从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于公比，所以每一项都等于它的前一项乘以公比. 这就是说，如果等比数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ 的公比是 q，那么

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2,$$