

一九七九年高中毕业生

数学总复习纲要

SHUXUEZONGFUXI
GANGYAO

福建人民出版社

一九七九年高中毕业生

数 学 总 复 习 纲 要

福建教育学院编

福建人民出版社

编 者 的 话

《数学总复习纲要》是参照教育部颁发的一九七九年全国高考复习大纲（数学部分）和中学数学教学大纲（试行草案）的要求进行编写的。编写时，吸取了我院一九六三年编写的、省人民教育出版社出版的《数学总复习纲要》的特点，对复习大纲中的复习内容进行适当的综合、概括和提高，使学生通过复习能够获得比较系统的扎实的数学基础知识。本书中各部分都注意围绕中学数学教材的重点和关键，选择较有启发性的范例和练习题，以培养学生的运算、逻辑推理和逻辑表达，以及空间想象的能力，帮助学生熟练地掌握数学的基本概念、定理和公式，准确、灵活地进行文字和数字的综合运算，尽可能做到“透彻理解、举一反三、熟练应用”。

本书对于某些数学知识（如定理、法则和性质）只提出纲目或概括成简单的图表，如果学生对这些知识有所遗忘或所学的现行数学教材有所缺漏，必须参考有关数学课本进行复习。为了启发学生如何正确应用所学的数学知识分析问题和解决问题，书中有些范例为了突出说明某些数学知识的应用，所采用的解题或证题方法并不是最简便的，有的也不完整。练习题中凡标有“*”号的是一些难度较大的题目，供解题能力较好的学生选做，一般学生可以不做，以免花费太多的复习时间，影响复习效果。

本《纲要》由我组同志编成初稿后，特请我省九个地、市有教学经验的十五位数学教师集体审稿，同时参考一些中学数学教研组的宝贵意见进行了修改。在编写过程，承卢世恭、黄国雄、刘时珪和周志文等老师协助完成初稿，陈敏贤、倪木森老师协助整理，特此表示感谢！

由于我们水平有限和时间匆促，本书难免存在不少缺点和错误，希望读者批评指正。

福建教育学院数学组

1978年12月

目 录

代 数

一、实数与代数式	(1)
(一) 实数	(1)
(二) 代数式	(3)
二、方程与方程组	(22)
(一) 方程的基本知识	(22)
(二) 方程	(24)
(三) 方程组	(33)
(四) 列方程(组)解应用题	(39)
三、不等式	(50)
(一) 不等式的概念和基本性质	(50)
(二) 不等式和不等式组的解法	(51)
四、函数	(62)
(一) 初等函数的分类表	(62)
(二) 函数的基本概念	(63)
(三) 函数关系的表示法	(63)
(四) 函数的一些重要性质	(63)
(五) 有理整函数	(66)
(六) 有理分函数	(72)
五、指数与对数	(79)
(一) 指数的概念和运算法则	(79)
(二) 对数的概念	(80)
(三) 指数函数与对数函数	(81)

(四) 积、商、幂、方根的对数和对数的换底公式·····	(83)
(五) 常用对数·····	(83)
(六) 简单的指数方程和对数方程·····	(88)
六、数列·····	(94)
(一) 数列的概念和数列的通项公式·····	(94)
(二) 等差数列与等比数列·····	(95)

几 何

一、定理的证明·····	(112)
(一) 定理的组成·····	(112)
(二) 定理的证明·····	(112)
二、相交线与平行线·····	(116)
(一) 线段、射线、直线·····	(116)
(二) 相交线·····	(117)
(三) 平行线·····	(119)
(四) 成比例线段·····	(120)
三、多边形·····	(125)
(一) 三角形·····	(125)
(二) 四边形·····	(140)
(三) 多边形·····	(143)
四、圆·····	(152)
(一) 圆的基本性质·····	(152)
(二) 关于圆的比例线段·····	(152)
(三) 圆心角、圆周角和弦切角定理·····	(153)
(四) 判定四边形内接于圆的定理·····	(153)
(五) 圆的切线·····	(153)
(六) 两圆的位置关系·····	(154)
(七) 弧长与面积的计算公式·····	(154)

五、基本轨迹和作图题	(166)
* (一) 四种命题间的关系	(166)
* (二) 基本轨迹	(167)
(三) 作图题	(168)
六、直线与平面	(171)
(一) 平面	(171)
(二) 直线与直线的位置关系	(171)
(三) 直线与平面的位置关系	(173)
(四) 平面与平面的位置关系	(175)
七、简单几何体	(185)
(一) 多面体	(185)
(二) 旋转体	(187)

三 角

一、三角函数的定义及其基本性质	(203)
(一) 任意角的概念	(203)
(二) 三角函数的定义	(206)
(三) 三角函数值的变化	(211)
(四) 同角三角函数间的关系	(213)
(五) 诱导公式	(218)
(六) 三角函数表	(222)
(七) 三角函数的周期性	(224)
(八) 三角函数的图象和性质	(225)
二、两角和与差的三角函数	(236)
(一) 两角和与两角差的三角函数	(236)
(二) 倍角与半角的三角函数	(240)
(三) 三角函数的和差化积与积化和差	(248)
三、反三角函数和三角方程	(261)

(一) 反三角函数	(261)
(二) 三角方程	(266)
四、解三角形	(274)
(一) 解直角三角形	(274)
(二) 解斜三角形	(277)
(三) 三角形解法的应用	(284)

平面解析几何

一、曲线与方程	(308)
(一) 平面直角坐标系	(308)
(二) 基本公式	(308)
(三) 曲线与方程	(312)
二、直线方程	(322)
(一) 直线方程的几种形式	(322)
(二) 点和直线的位置关系	(322)
(三) 两条直线的位置关系	(322)
三、二次曲线	(332)
(一) 圆	(332)
(二) 抛物线	(337)
(三) 椭圆	(341)
(四) 双曲线	(345)
(五) 圆、抛物线、椭圆、双曲线小结	(348)
(六) 坐标平移与二次曲线方程化简	(353)
四、参数方程	(365)

综合题及参考解答

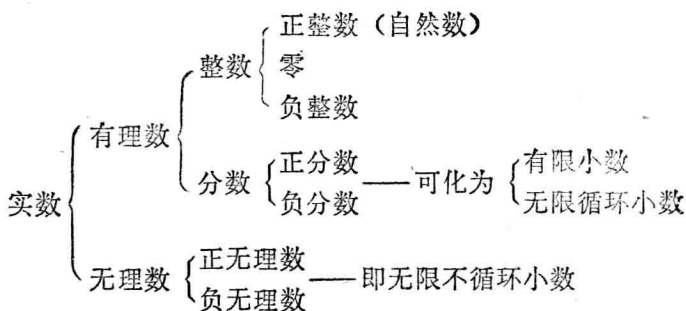
一、综合题题目	(380)
二、综合题参考解答	(387)

代 数

一、实数与代数式

(一) 实 数

1. 实数的系统表



表示物体个数的数1, 2, 3, ……等的每一个数都叫做自然数。正整数、零、负整数统称为整数。整数、分数统称为有理数。无限不循环小数叫做无理数。有理数、无理数统称为实数。

2. 实数的运算定律

(1) 交换律 $a + b = b + a;$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c);$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(3) 分配律 $a(b+c) = ab+ac$.

运算时, 如果运算的式子里没有括号, 就要先算乘方、开方, 次算乘、除, 最后算加、减; 如果有括号, 就先算括号里的数.

3. 数轴 规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴.

实数与数轴上的点具有“一一对应”的关系, 这就是: 任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应; 反过来, 数轴上的任意一个点, 也都有确定的一个实数与它对应.

4. 实数的绝对值 实数 a 的绝对值是:

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}); \\ 0 & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}); \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \end{cases}$$

5. 实数大小的比较

(1) 按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较大小, 在数轴上的点越往右, 它表示的数就越大, 也就是任何正实数都大于零, 任何负实数都小于零, 任何正实数都大于任何负实数.

(2) 用求差法比较两个实数的大小, 即若 $a-b > 0$, 则 $a > b$; 若 $a-b = 0$, 则 $a = b$; 若 $a-b < 0$, 则 $a < b$.

例 1 计算: $\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - (-5.5) \times \frac{6}{11} + (-2)^3 \div [1 - (0.5)^{-2}]$.

解 原式 = $\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{11}{2}\right) \times \frac{6}{11} - 8 \div \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]$

$$= \frac{4}{3} + 3 - 8 \div (1 - 4)$$

$$= \frac{4}{3} + 3 + \frac{8}{3} = 7.$$

例 2 把下列各数按从小到大的顺序用不等号连结起来:

$$|-5|, -3, |\frac{2}{3}|, 0, \sqrt{5}, -|-\frac{1}{\sqrt{2}}|.$$

解 $\because |-5| = 5, |\frac{2}{3}| \approx 0.67, \sqrt{5} \approx 2.24,$

$$-|-\frac{1}{\sqrt{2}}| = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.71,$$

$$\therefore -3 < -|-\frac{1}{\sqrt{2}}| < 0 < |\frac{2}{3}| < \sqrt{5} < |-5|.$$

(二) 代数式

1. 代数式

(1) 代数式的定义 用代数运算符号把数字和字母连结起来的式子, 叫做代数式。

(2) 代数式的分类表

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \\ \text{无理式} \end{cases} \begin{cases} \text{整式} \\ \text{分式} \end{cases} \begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases}$$

(3) 代数式的值 用数值代替代数式里的字母, 计算得出的结果, 叫做代数式的值。

2. 有理式

(1) 有理式的定义 一个代数式如果只含有加、减、乘、

除和乘方等五种运算，这样的代数式叫做有理代数式，简称有理式。

(2) 整式

①整式的定义 一个代数式如果不含有除法运算，或虽有除法运算，但除数不含字母，这样的代数式叫做有理整式，简称整式。

整式按照它是由几个单项式的代数和组成的，可以分为单项式、二项式、三项式等等。项数在二项以上的统称为多项式。

②整式的四则运算

i. 加、减法

(i) 去括号

$$a + (b - c + d) = a + b - c + d \text{ (括号内的项都不变号);}$$

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d \text{ (括号内的项都变号).}$$

(ii) 合并同类项 将含有相同字母，且各字母的指数又一样的项(同类项)合并成一项，合并时只要把同类项系数的代数和作为结果的系数。

ii. 乘除法、乘方 在进行乘除法、乘方运算时，经常用到下面正整数指数幂的运算法则以及乘法公式：

正整指数幂运算法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m > n);$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

乘法公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

(i) 乘法

单项式乘以单项式：应用乘法交换律、结合律及幂的运算法则进行计算。

单项式乘以多项式：应用乘法对加法的分配律转化为单项式乘以单项式进行计算。

多项式乘以多项式：把一个多项式的各项分别乘以另一个多项式的每一项，并把所得的积相加。

(ii) 除法

单项式除以单项式：把系数和相同字母的幂分别相除，并把被除式单独有的字母连同它们的指数保留在商里。若某些字母在被除式里的指数小于除式里的指数，或者除式里出现某些在被除式里所没有的字母，则结果用分式表示。

多项式除以单项式：先把多项式的每一项除以这个单项式，再求商的代数和。

(iii) 乘方 应用积的乘方和幂的乘方法则进行运算。

例 1 计算代数式 $2x^3 - 5x^2 + 3x - 8$ 的值：

(1) 当 $x = -1$ 时；(2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时。

解 (1) 当 $x = -1$ 时，

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 &= 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) - 8 \\ &= -2 - 5 - 3 - 8 = -18; \end{aligned}$$

(2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时，

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 8$$

$$= 2\left(\frac{1}{8}\right) - 5\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 8$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - 8 = -7\frac{1}{2}.$$

例 2 试用语言叙述下列各式所确定的实数 a 、 b (或 a 、 b 、 c) 之间的关系或值的范围:

- (1) $a^2 = b^2$; (2) $a + b = 0$; (3) $ab = 1$;
 (4) $ab = -1$; (5) $ab = 0$; (6) $ab \neq 0$;
 (7) $(a - b)^2 = 0$; (8) $a^2 + b^2 = 0$; (9) $a^2 + b^2 > 0$;
 (10) $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$;
 (11) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \neq 0$.

解 (1) a 、 b 的绝对值相等; (2) a 、 b 互为相反数;

(3) a 、 b 互为倒数; (4) a 、 b 互为负倒数;

(5) a 、 b 中至少有一个为零;

(6) a 、 b 均不为零; (7) a 、 b 相等;

(8) a 、 b 均为零; (9) a 、 b 不全为零;

(10) a 、 b 、 c 中至少有两个相等;

(11) a 、 b 、 c 不全相等.

例 3 计算:

$$(1) (x-1)(x-2) - 3x(x+3) + 2[(x+2)(x+1) - 3];$$

$$(2) (-3a^2b^3)^3 \div (3ab)^2.$$

解

$$\begin{aligned} (1) & (x-1)(x-2) - 3x(x+3) + 2[(x+2)(x+1) - 3] \\ &= x^2 - 2x - x + 2 - 3x^2 - 9x + 2(x^2 + x + 2x + 2 - 3); \\ &= -2x^2 - 12x + 2 + 2x^2 + 6x - 2 \\ &= -6x; \end{aligned}$$

$$(2) (-3a^2b^3)^3 \div (3ab^2)^2$$

$$= -27a^6b^3 \div 9a^2b^4$$

$$= -3a^4b^5.$$

例 4 计算:

$$(1) (3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2) - (3a+2b)$$

$$(9a^2-6ab+4b^2);$$

$$(2) (x+2y)^3(x-2y)^3 - (2x+y)^3(2x-y)^3.$$

解 (1) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2) - (3a+2b)$

$$(9a^2-6ab+4b^2)$$

$$= (3a)^3 - (2b)^3 - (3a)^3 - (2b)^3$$

$$= -16b^3;$$

$$(2) (x+2y)^3(x-2y)^3 - (2x+y)^3(2x-y)^3$$

$$= (x^2-4y^2)^3 - (4x^2-y^2)^3$$

$$= x^6 - 12x^4y^2 + 48x^2y^4 - 64y^6 - 64x^6 + 48x^4y^2$$

$$- 12x^2y^4 + y^6$$

$$= -63x^6 + 36x^4y^2 + 36x^2y^4 - 63y^6.$$

③因式分解 把一个多项式用几个因式的积来表示,叫做多项式的因式分解。

一个多项式能不能分解因式,要根据在什么数范围内进行因式分解来决定。在指定的数的范围内分解因式时,一定要分解到不能再分解为止。在分解因式之后,如有相同因式,要写成幂的形式,并且各个因式要化简。

因式分解通常用到下列基本方法:

i. 提取公因式法

例 5 分解 $-8a^3b+12a^2b-20ab^2$ 的因式。

解 原式 $= -4ab(2a^2-3a+5b).$

ii. 分组分解法

例 6 分解因式: $10a^2+21xy-14ax-15ay.$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= 5a(2a-3y) - 7x(2a-3y) \\ &= (2a-3y)(5a-7x).\end{aligned}$$

iii. 应用乘法公式法

$$\text{例 7 分解因式: } 8(x+y)^3 - 27(x-y)^3.$$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= [2(x+y) - 3(x-y)][4(x+y)^2 + 2(x+y) \\ &\quad \cdot 3(x-y) + 9(x-y)^2] \\ &= (2x+2y-3x+3y)(4x^2+8xy+4y^2+6x^2 \\ &\quad - 6y^2+9x^2-18xy+9y^2) \\ &= (5y-x)(19x^2-10xy+7y^2).\end{aligned}$$

$$\text{例 8 分解因式: } a^3x^3+x^3-a^3y^3-y^3.$$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= x^3(a^3+1) - y^3(a^3+1) \\ &= (a^3+1)(x^3-y^3) \\ &= (a+1)(a^2-a+1)(x-y)(x^2+xy+y^2).\end{aligned}$$

$$\text{例 9 分解因式: } x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2.$$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= x^4-2x^2y^2+y^4-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2 \\ &= (x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-(2yz)^2 \\ &= [(x^2-y^2)-z^2]^2-(2yz)^2 \\ &= (x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz) \\ &= [x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2] \\ &= (x-y-z)(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).\end{aligned}$$

iv. 应用十字相乘法

$$\text{例 10 分解 } x^2+9x-10 \text{ 的因式.}$$

$$\text{解 原式} = (x-1)(x+10).$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times \\ x \end{array} \begin{array}{r} -1 \\ 10 \end{array}$$

$$\text{例 11 分解因式:}$$

$$2x^2-9xy+10y^2.$$

$$\text{解 原式} = (x-2y)(2x-5y).$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times \\ 2x \end{array} \begin{array}{r} -2y \\ -5y \end{array}$$

v. 应用配方法

例 12 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 6x + 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= 2\left(x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right) \\
 &= 2\left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] \\
 &= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right] \\
 &= 2\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \\
 &= 2\left(x - \frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{7}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

从上例可以看出, 如果二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的两根为 x_1, x_2 , 那么这个二次三项式可以分解为

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

例 13 分解因式: $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3$.

解法 1 原式 $= 4x^2 - 4(y+1)x - (3y^2 - 10y + 3)$.

$$x = \frac{4(y+1) \pm \sqrt{16(y+1)^2 + 4 \cdot 4 \cdot (3y^2 - 10y + 3)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{4y + 4 \pm 8(y-1)}{8},$$

$$x_1 = \frac{3y-1}{2}, \quad x_2 = \frac{3-y}{2}.$$

$$\therefore 4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3$$

$$= 4\left(x - \frac{3y-1}{2}\right)\left(x - \frac{3-y}{2}\right)$$

$$= (2x - 3y + 1)(2x + y - 3).$$

解法 2 原式

$$\begin{aligned}
 &= 4x^2 - 4(y+1)x - (3y^2 - 10y + 3) \\
 &= 4x^2 - 4(y+1)x - (3y-1)(y-3) \\
 &= (2x-3y+1)(2x+y-3).
 \end{aligned}$$

$\begin{array}{r}
 3y \quad \times \quad -1 \\
 y \quad \times \quad -3 \\
 2x \quad \times \quad -(3y-1) \\
 2x \quad \times \quad y-3
 \end{array}$

例 14 分别在有理数和实数范围内分解因式:

$$x^4 - 11x^2 + 18.$$

解 原式 $= (x^2 - 2)(x^2 - 9)$
 $= (x^2 - 2)(x+3)(x-3)$ (在有理数范围内)
 $= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x+3)(x-3).$
 (在实数范围内)

(3) 分式

①分式的定义 除式中含有字母的有理式叫做有理分式, 简称分式. 分式中字母的允许值是使分母的值不为零的那些数值.

②分式的基本性质

$$\frac{b}{a} = \frac{bm}{am}, \quad (m \neq 0)$$

③约分、通分和分式的四则运算

i. 约分与通分

(i) 约分 应用分式的基本性质, 把分式的分子、分母的公因式都约去, 这种运算过程叫做约分, 所得结果叫做最简分式.

(ii) 通分 应用分式的基本性质, 把两个或两个以上分母不同的分式化成分母相同的分式, 且又不改变分式的值的过程叫做通分. 通分时, 一般取各分母的最低公倍式作为公