一九七九年高中毕业生

数学总复习纲要

SHUXUEZONGFUXI GANGYAO

福建人民出版社

一九七九年高中毕业生

数学总复习纲要

福建教育学院编

福建人民出版社

编 者 的 话

《数学总复习纲要》是参照教育部颁发的一九七九年全国高考复习大纲（数学部分）和中学数学教学大纲（试行草案）的要求进行编写的。编写时，吸取了我院一九六三年编写的、省人民教育出版社出版的《数学总复习纲要》的特点，对复习大纲中的复习内容进行适当的综合、概括和提高，使学生通过复习能够获得比较系统的扎实的数学基础知识。本书中各部分都注意围绕中学数学教材的重点和关键，选择较有启发性的范例和练习题，以培养学生的运算、逻辑推理和逻辑表达，以及空间想象的能力，帮助学生熟练地掌握数学的基本概念、定理和公式，准确、灵活地进行文字和数字的综合运算，尽可能做到“透彻理解、举一反三、熟练应用”。

本书对于某些数学知识（如定理、法则和性质）只提出纲目或概括成简单的图表，如果学生对这些知识有所遗忘或所学的现行数学教材有所缺漏，必须参考有关数学课本进行复习。为了启发学生如何正确应用所学的数学知识分析问题和解决问题，书中有些范例为了突出说明某些数学知识的应用，所采用的解题或证题方法并不是最简便的，有的也不完整。练习题中凡标有“*”号的是一些难度较大的题目，供解题能力较好的学生选做，一般学生可以不做，以免花费太多的复习时间，影响复习效果。

本《纲要》由我组同志编成初稿后，特请我省九个地、市有教学经验的十五位数学教师集体审稿，同时参考一些中学数学教研组的宝贵意见进行了修改。在编写过程，承卢世恭、黄国雄、刘时珪和周志文等老师协助完成初稿，陈敏贤、倪木森老师协助整理，特此表示感谢！

由于我们水平有限和时间匆促，本书难免存在不少缺点和错误，希望读者批评指正。

福建教育学院数学组

1978年12月

目　　录

代　　数

几　何

三　　角

平面解析几何

综合题及参考解答

代　数

一、实数与代数式

（一）实　数

1．实数的系统表

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\text{——可化为}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{——即无限不循环小数}\end{cases}$$

表示物体个数的数1，2，3，……等的每一个数都叫做自然数。正整数、零、负整数统称为整数。整数、分数统称为有理数。无限不循环小数叫做无理数。有理数、无理数统称为实数。

2．实数的运算定律

（1）交换律　$a+b=b+a$；

$a\cdot b=b\cdot a$。

（2）结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。

(3) 分配律　　$a(b+c)=ab+ac$。

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，次算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括号里的数。

3．数轴　规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴。

实数与数轴上的点具有“一一对应”的关系，这就是：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应。

4．实数的绝对值　实数a的绝对值是：

$$|a|=\begin{cases} a & （当a>0时）；\\ 0 & （当a=0时）；\\ -a & （当a<0时）。\end{cases}$$

5．实数大小的比较

(1) 按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较大小，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数。

(2) 用求差法比较两个实数的大小，即若 $a-b>0$，则$a>b$；若$a-b=0$，则$a=b$；若$a-b<0$，则$a<b$。

例 1　计算：$\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-(-5.5)\times\frac{6}{11}+(-2)^3$
$\div[1-(0.5)^{-2}]$。

解　原式$=\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{11}{2}\right)\times\frac{6}{11}-8\div\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]$

$$=\frac{4}{3}+3-8\div(1-4)$$

$$=\frac{4}{3}+3+\frac{8}{3}=7.$$

例 2 把下列各数按从小到大的顺序用不等号连结起来：

$$|-5|,\ -3,\ |\frac{2}{3}|,\ 0,\ \sqrt{5},\ -|-\frac{1}{\sqrt{2}}|.$$

解 $\because$ $|-5|=5,\ |\frac{2}{3}|\approx0.67,\ \sqrt{5}\approx2.24,$

$$-|-\frac{1}{\sqrt{2}}|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\approx-0.71,$$

$$\therefore\quad -3<-|-\frac{1}{\sqrt{2}}|<0<|\frac{2}{3}|<\sqrt{5}<|-5|.$$

（二）代数式

1. 代数式

(1) 代数式的定义　用代数运算符号把数字和字母连结起来的式子，叫做代数式。

(2) 代数式的分类表

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

(3) 代数式的值　用数值代替代数式里的字母，计算得出的结果，叫做代数式的值.

2. 有理式

(1) 有理式的定义　一个代数式如果只含有加、减、乘、

除和乘方等五种运算，这样的代数式叫做有理代数式，简称有理式。

（2）整式

①整式的定义　一个代数式如果不含有除法运算，或虽有除法运算，但除数不含字母，这样的代数式叫做有理整式，简称整式。

整式按照它是由几个单项式的代数和组成的，可以分为单项式、二项式、三项式等等。项数在二项以上的统称为多项式。

②整式的四则运算

i．加、减法

（i）去括号

$a+(b-c+d)=a+b-c+d$（括号内的项都不变号）；

$a-(b-c+d)=a-b+c-d$（括号内的项都变号）。

（ii）合并同类项　将含有相同字母，且各字母的指数又一样的项（同类项）合并成一项，合并时只要把同类项系数的代数和作为结果的系数。

ii．乘除法、乘方　在进行乘除法、乘方运算时，经常用到下面正整数指数幂的运算法则以及乘法公式：

正整指数幂运算法则：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0,\ m>n)$；

$(a^m)^n=a^{mn}$；　$(ab)^n=a^nb^n$；

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(b\neq 0).$$

乘法公式：

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$。

(i) 乘法

单项式乘以单项式：应用乘法交换律、结合律及幂的运算法则进行计算。

单项式乘以多项式：应用乘法对加法的分配律转化为单项式乘以单项式进行计算。

多项式乘以多项式：把一个多项式的各项分别乘以另一个多项式的每一项，并把所得的积相加。

(ii) 除法

单项式除以单项式：把系数和相同字母的幂分别相除，并把被除式单独有的字母连同它们的指数保留在商里。若某些字母在被除式里的指数小于除式里的指数，或者除式里出现某些在被除式里所没有的字母，则结果用分式表示。

多项式除以单项式：先把多项式的每一项除以这个单项式，再求商的代数和。

(iii) 乘方　应用积的乘方和幂的乘方法则进行运算。

例 1　计算代数式 $2x^3-5x^2+3x-8$的值：

(1) 当$x=-1$时；(2) 当$x=\dfrac{1}{2}$时。

解　(1) 当$x=-1$时，

$$2x^3-5x^2+3x-8=2(-1)^3-5(-1)^2+3(-1)-8$$
$$=-2-5-3-8=-18;$$

(2) 当$x=\dfrac{1}{2}$时，

$$2x^3-5x^2+3x-8=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)-8$$

$$=2\left(\frac{1}{8}\right)-5\left(\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)-8$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}-8=-7\frac{1}{2}.$$

例 2　试用语言叙述下列各式所确定的实数 a、b(或a、b、c)之间的关系或值的范围：

(1) $a^2=b^2$；　(2) $a+b=0$；　(3) $ab=1$；

(4) $ab=-1$；　(5) $ab=0$；　(6) $ab\neq 0$；

(7) $(a-b)^2=0$；　(8) $a^2+b^2=0$；　(9) $a^2+b^2>0$；

(10) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$；

(11) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$。

解　(1) a、b的绝对值相等；(2) a、b互为相反数；

(3) a、b互为倒数；　(4) a、b互为负倒数；

(5) a、b中至少有一个为零；

(6) a、b均不为零；　(7) a、b相等；

(8) a、b均为零；　(9) a、b不全为零；

(10) a、b、c中至少有两个相等；

(11) a、b、c不全相等。

例 3　计算：

(1) $(x-1)(x-2)-3x(x+3)+2[(x+2)(x+1)-3]$；

(2) $(-3a^2b^3)^3\div(3ab)^2$。

解

(1) $(x-1)(x-2)-3x(x+3)+2[(x+2)(x+1)-3]$

$=x^2-2x-x+2-3x^2-9x+2(x^2+x+2x+2-3)$；

$=-2x^2-12x+2+2x^2+6x-2$

$=-6x$；

(2) $(-3a^2b^3)^3\div(3ab^2)^2$

$=-27a^6b^9\div 9a^2b^4$

$=-3a^4b^5$。

例 4 计算：

(1) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)-(3a+2b)$
$(9a^2-6ab+4b^2)$；

(2) $(x+2y)^3(x-2y)^3-(2x+y)^3(2x-y)^3$。

解 (1) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)-(3a+2b)$
$(9a^2-6ab+4b^2)$

$=(3a)^3-(2b)^3-(3a)^3-(2b)^3$

$=-16b^3$；

(2) $(x+2y)^3(x-2y)^3-(2x+y)^3(2x-y)^3$

$=(x^2-4y^2)^3-(4x^2-y^2)^3$

$=x^6-12x^4y^2+48x^2y^4-64y^6-64x^6+48x^4y^2$
$-12x^2y^4+y^6$

$=-63x^6+36x^4y^2+36x^2y^4-63y^6$。

③因式分解　把一个多项式用几个因式的积来表示，叫做多项式的因式分解。

一个多项式能不能分解因式，要根据在什么数范围内进行因式分解来决定。在指定的数的范围内分解因式时，一定要分解到不能再分解为止。在分解因式之后，如有相同因式，要写成幂的形式，并且各个因式要化简。

因式分解通常用到下列基本方法：

i。提取公因式法

例 5 分解$-8a^3b+12a^2b-20ab^2$的因式。

解 原式$=-4ab(2a^2-3a+5b)$。

ii。分组分解法

例 6 分解因式：$10a^2+21xy-14ax-15ay$。

解 原式$=5a(2a-3y)-7x(2a-3y)$

$=(2a-3y)(5a-7x)$。

iii. 应用乘法公式法

例 7 分解因式：$8(x+y)^3-27(x-y)^3$。

解 原式$=[2(x+y)-3(x-y)][4(x+y)^2+2(x+y)\cdot 3(x-y)+9(x-y)^2]$

$=(2x+2y-3x+3y)(4x^2+8xy+4y^2+6x^2-6y^2+9x^2-18xy+9y^2)$

$=(5y-x)(19x^2-10xy+7y^2)$。

例 8 分解因式：$a^3x^3+x^3-a^3y^3-y^3$。

解 原式$=x^3(a^3+1)-y^3(a^3+1)$

$=(a^3+1)(x^3-y^3)$

$=(a+1)(a^2-a+1)(x-y)(x^2+xy+y^2)$。

例 9 分解因式：$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$。

解 原式

$=x^4-2x^2y^2+y^4-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+z^4-(2yz)^2$

$=[(x^2-y^2)-z^2]^2-(2yz)^2$

$=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)$

$=[x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]$

$=(x-y-z)(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$。

iv. 应用十字相乘法

例 10 分解 $x^2+9x-10$ 的因式。

$$\begin{array}{ccc} x & & -1 \\ & \times & \\ x & & 10 \end{array}$$

解 原式$=(x-1)(x+10)$。

例 11 分解因式：

$2x^2-9xy+10y^2$。

$$\begin{array}{ccc} x & & -2y \\ & \times & \\ 2x & & -5y \end{array}$$

解 原式$=(x-2y)(2x-5y)$。

v. 应用配方法

例 12　在实数范围内分解因式：$2x^2-6x+1$。

解　原式$=2\left(x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$

$$=2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\right]$$

$$=2\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$=2\left(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right).$$

从上例可以看出，如果二次三项式ax^2+bx+c的两根为x_1，x_2，那么这个二次三项式可以分解为

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

例 13　分解因式：$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$。

解法 1　原式$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$。

$$x=\frac{4(y+1)\pm\sqrt{16(y+1)^2+4\cdot4\cdot(3y^2-10y+3)}}{2\times4}$$

$$=\frac{4y+4\pm8(y-1)}{8},$$

$$x_1=\frac{3y-1}{2},\qquad x_2=\frac{3-y}{2}.$$

$\therefore$　$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

$$=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left(x-\frac{3-y}{2}\right)$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

解法 2 原式

$$
\begin{aligned}
&= 4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3) \\
&= 4x^2-4(y+1)x-(3y-1)(y-3) \\
&= (2x-3y+1)(2x+y-3)。
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccc}
3y & & -1 \\
 & \times & \\
y & & -3 \\
2x & & -(3y-1) \\
 & \times & \\
2x & & y-3
\end{array}
$$

例 14 分别在有理数和实数范围内分解因式：

x^4-11x^2+18。

解 原式 $=(x^2-2)(x^2-9)$

$=(x^2-2)(x+3)(x-3)$（在有理数范围内）

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)(x-3)$。

（在实数范围内）

(3) 分式

①分式的定义 除式中含有字母的有理式叫做有理分式，简称分式。分式中字母的允许值是使分母的值不为零的那些数值。

②分式的基本性质

$$\frac{b}{a}=\frac{bm}{am}。\ (m\neq 0)$$

③约分、通分和分式的四则运算

i。约分与通分

(i) 约分 应用分式的基本性质，把分式的分子、分母的公因式都约去，这种运算过程叫做约分，所得结果叫做最简分式。

(ii) 通分 应用分式的基本性质，把两个或两个以上分母不同的分式化成分母相同的分式，且又不改变分式的值的过程叫做通分。通分时，一般取各分母的最低公倍式作为公