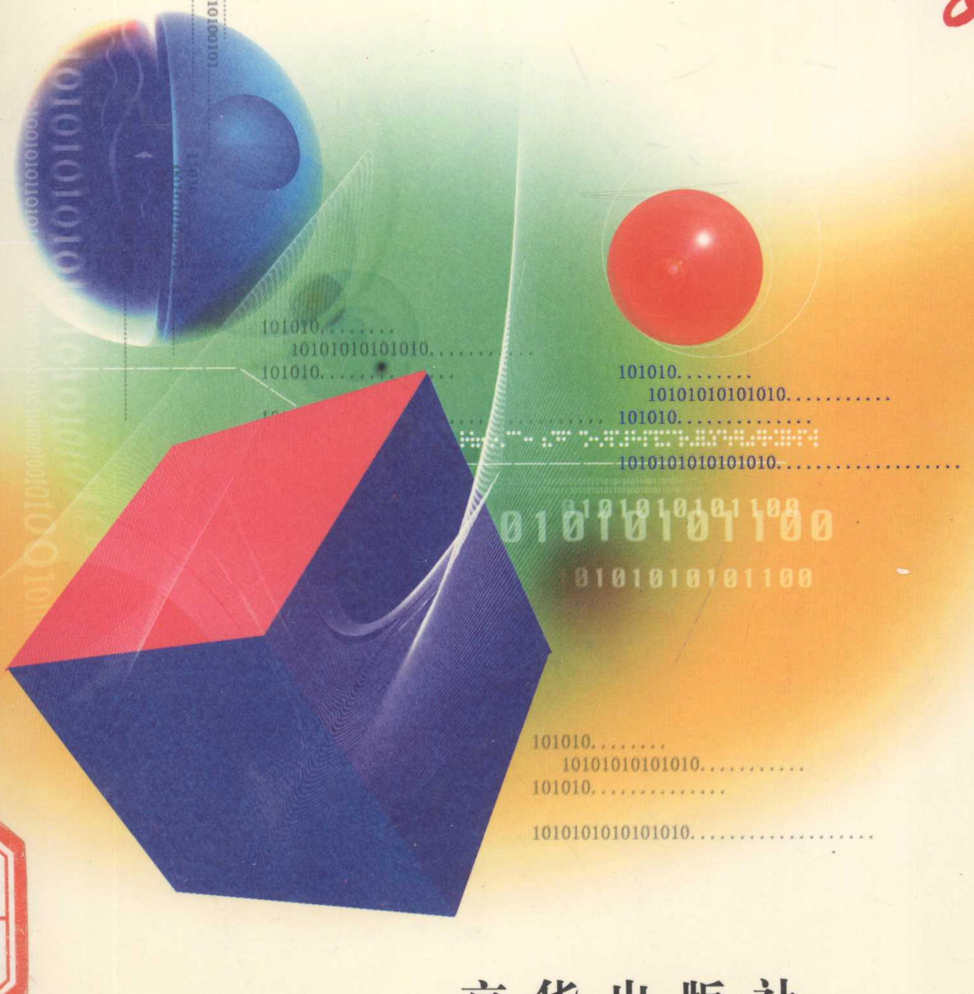
中小学学科奥林匹克编辑部组编

新课标·新教材

# 金牌奥赛每周测

## 高二年级超级试卷

## 数学



京华出版社

# 金牌奥赛每周测高二年级超级试卷

## （数　学）

主编：司海举　刘富森
编者：刘富森　司海举　王秋芳
张爱荣　平志潭　张利法
丁惠睿



京华出版社

**责任编辑**:徐秀琴　王　建
**封面设计**:周春林　默　石

**图书在版编目(CIP)数据**
金牌奥赛每周测高二年级超级试卷.数学/北京阶梯素质教育研究所编.
-北京:京华出版社,2004.4
ISBN 7-80600-883-7

Ⅰ.金…　Ⅱ.北…　Ⅲ.数学-高中-习题　Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 027044 号

| | |
|---|---|
| 著　　者 | 北京阶梯素质教育研究所 |
| 出版发行 | 京华出版社 |
| | (北京市朝阳区安华西里 1 区 13 号楼 2 层　100011) |
| 印　　刷 | 北京国防印刷厂印刷 |
| 开　　本 | 16 开 |
| 字　　数 | 180 千字 |
| 印　　张 | 10 |
| 印　　数 | 1-5000 |
| 出版日期 | 2004 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 |
| 书　　号 | ISBN 7-80600-883-7/G·493 |
| 定　　价 | 11.50 元 |

京华版图书,若有质量问题,请与本社联系

# 前　言

随着社会的发展、科技的进步及国力的增强，我国的教育制度、教育理念和方法都有了很大的改变，我国中小学教科书也从一纲一本的单一模式演变为一纲多本的多元模式，呈现出一种百花齐放的欣欣向荣景象。同时学科奥林匹克类图书也一枝独秀，长久不衰地伴随着教科书的变化、发展，不断地散发出自己独特的魅力，21 世纪的到来，又诞生了新课标及新课标体制下的新教材。

新课标、老教材与学科奥林匹克竞赛三者不是孤立的，三者是有机的统一体，相辅相成，你中有我，我中有你，三者缺一不可。基于以上的认识，结合多年的教学实践和探索，我们注重了对学生基础知识点、综合素质和能力的测试，同时又兼顾了有特殊才能的学生的需要，把最基础的知识点和技巧性、趣味性强的学科奥林匹克竞赛题融为一体，我们将三者中最新、最精髓、最本质的练习题按学科知识点分单元设置编纂出版了这套超级测试卷系列丛书，供使用不同版本教科书、不同地区的学生作单元或每周测试使用。

本系列丛书是我社系列奥林匹克竞赛图书中的又一力作，是我们京华出版社的精华之作。全书共 44 册，其中小学 12 册，初中 15 册，高中 17 册。

本系列丛书虽然从策划、编写，再到出版、设计，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免。如果您有什么意见和建议，欢迎并感谢赐教，让我们共同努力，以使本系列丛书更好地服务于广大的中小学师生。

中小学学科奥林匹克编辑部

# 目　录

试卷/答案

单元测试卷一　不等式的性质…………………………………………………………（1）（97）
单元测试卷二　均值不等式…………………………………………………………（4）（99）
单元测试卷三　不等式的证明………………………………………………………（7）（101）
单元测试卷四　不等式的解法………………………………………………………（10）（103）
单元测试卷五　含绝对值的不等式…………………………………………………（13）（104）
单元测试卷六　不等式的综合应用…………………………………………………（15）（107）
单元测试卷七　直线的倾斜角和斜率………………………………………………（18）（109）
单元测试卷八　直线的方程…………………………………………………………（21）（110）
上学期期中超级测试卷………………………………………………………………（24）（112）
单元测试卷九　直线的位置关系……………………………………………………（27）（113）
单元测试卷十　简单的线性规划……………………………………………………（30）（114）
单元测试卷十一　圆…………………………………………………………………（34）（116）
单元测试卷十二　椭圆………………………………………………………………（37）（118）
单元测试卷十三　双曲线……………………………………………………………（40）（120）
单元测试卷十四　抛物线……………………………………………………………（43）（123）
单元测试卷十五　圆锥曲线…………………………………………………………（46）（126）
上学期期末超级测试卷………………………………………………………………（49）（129）
单元测试卷十六　平面与空间直线…………………………………………………（52）（131）
单元测试卷十七　线面、面面平行…………………………………………………（55）（133）
单元测试卷十八　直线与平面垂直…………………………………………………（58）（135）
单元测试卷十九　空间向量…………………………………………………………（62）（137）
单元测试卷二十　夹角与距离………………………………………………………（66）（140）
单元测试卷二十一　简单几何体与球………………………………………………（70）（143）
下学期期中超级测试卷………………………………………………………………（74）（146）
单元测试卷二十二　计数原理与排列………………………………………………（78）（148）
单元测试卷二十三　组合与二项式…………………………………………………（81）（149）
单元测试卷二十四　随机事件的概率………………………………………………（84）（149）
单元测试卷二十五　互斥事件概率…………………………………………………（87）（150）
单元测试卷二十六　独立事件的概率………………………………………………（90）（150）
下学期期末超级测试卷………………………………………………………………（93）（151）

伽利略(意大利)

注意事项　一、学生要写清校名、班级、姓名　二、仔细审题，认真解答。　三、字迹清楚，卷面整洁。

# 单元测试卷一　不等式的性质

学校__________ 班级__________ 姓名__________ 等级__________

## 一、选择题

1. 若 $x<a<0$,则一定成立的不等式是 (　　)

A. $x^2<ax<a^2$　B. $x^2>ax>a^2$　C. $x^2<a^2<ax$　D. $x^2>a^2>ax$

2. 已知 $a$ 是非零实数,给出如下四个不等式:$3a>2a$; $a^3>a^2$; $3^a>2^a$; $\frac{3}{a}>\frac{2}{a}$.其中正确不等式的个数为 (　　)

A.0　B.1　C.2　D.3

3. 若 $a<b<0$,则下列不等式中,不成立的是 (　　)

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　C. $|a|>|b|$　D. $a^2>b^2$

4. 若 $0<a<1$,则下列不等式中正确的是 (　　)

A. $(1-a)^{\frac{1}{3}}<(1-a)^{\frac{1}{2}}$　B. $\log_{(1-a)}(1+a)>0$

C. $(1-a)^3>(1+a)^2$　D. $(1-a)^{1+a}>1$

5. 当 $a>b$ 时,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$的充要条件是 (　　)

A. $a>0>b$　B. $a>b>0$　C. $0>a>b$　D. $1>a>b>0$

6. 设 $a$、$b$ 是两个实数,给出下列条件:① $a+b>1$; ② $a+b=2$; ③ $a+b>2$; ④ $a^2+b^2>2$; ⑤ $ab>1$.其中能推出“$a$, $b$ 中至少有一个数大于 1”的条件是 (　　)

A.②③　B.①②③　C.③④⑤　D.③

7. 设 $a, b, c\in R^+$,且 $a+d=b+c$, $|a-d|<|b-c|$,则有 (　　)

A. $ad>bc$　B. $ad=bc$　C. $ad<bc$　D. $ad$ 与 $bc$ 大小不定

8. 设命题甲:$\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$,命题乙:$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}$,那么 (　　)

A. 甲是乙的充分非必要条件　B. 甲是乙的必要非充分条件

C. 甲是乙的充要条件　D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

9. 若 $a>b>0$,则下列各式中恒成立的是 (　　)

A. $\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$　B. $\frac{b^2+1}{a^2+1}>\frac{b^2}{a^2}$　C. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$　D. $a^a>b^b$

10. 若 $0<b<a<\frac{1}{4}$,则 (　　)

A. $\sqrt{a}-\sqrt{b}<a-b<\sqrt{a-b}$　B. $a-b<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

C. $a-b<\sqrt{a-b}<\sqrt{a}-\sqrt{b}$　D. $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}<a-b$

单元测试卷一　不等式的性质

摄尔西乌斯(瑞典)

11. 若 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z<0$,则 $x^{\frac{1}{2}},y^{\frac{1}{3}},z^{\frac{1}{5}}$之间的大小关系是 ( )

A. $y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}$　B. $x^{\frac{1}{2}}<y^{\frac{1}{3}}<z^{\frac{1}{5}}$　C. $z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}$　D. $x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}$

12. 若 $a$、$b$ 是实数,$a+b>0$, $b<0$,则必有 ( )

A. $a>b>-a>-b$　B. $a>-a>b>-b$

C. $a>-b>b>-a$　D. $-b>a>b>-a$

13. $a$, $b\in R$, 下列四个命题中正确的一个是 ( )

A. 若 $a>b$, 则 $a^2>b^2$　B. 若$|a|>b$,则 $a^2>b^2$

C. 若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$　D. 若 $a^2>b^2$,则 $a>b$

14. 已知 $0<a<b<1$,则 $a^b$, $\log_b a$, $\log_{\frac{1}{a}}b$ 的大小关系是 ( )

A. $\log_{\frac{1}{a}}b<a^b<\log_b a$　B. $\log_{\frac{1}{a}}b<\log_b a<a^b$

C. $\log_b a<\log_{\frac{1}{a}}b<a^b$　D. $a^b<\log_{\frac{1}{a}}b<\log_b a$

15. 定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的奇函数 $f(x)$为增函数,偶函数 $g(x)$在区间$[0,+\infty)$上的图像与 $f(x)$的图像重合,设 $a>b>0$,给出下列不等式:

①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$;

②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$;

③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$;

④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$.

其中成立的是 ( )

A. ①与③　B. ②与③　C. ①与④　D. ②与④

## 二、填空题

1. 已知 $12<x<60$, $15<y<36$,则 $x-y$ 的取值范围是________;$\frac{x}{y}$的取值范围是________.

2. 若 $-1<a<b<0$,则$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $a^2$, $b^2$ 中值最小的是________.

3. 已知三个不等式:① $ab>0$;② $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$;③ $bc>ad$.以其中的两个作为条件,余下一个作为结论,则可以组成________个正确命题.

4. 设 $a=\sqrt{5}-1$, $b=6-2\sqrt{5}$,则 $a$, $b$ 的大小关系是______.

5. 若 $a\geqslant b$, $x\geqslant y$,则 $ax+by$ 与 $ay+bx$ 的大小关系是________.

6. 给出以下四个命题:① $a<b\Rightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1}(n\in N^*)$; ② $a>b\Rightarrow a^a>a^b$;③ $a>b>c>0\Rightarrow\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$;④ $a>b>1\Rightarrow\log_{\frac{1}{a}}b>\log_{\frac{1}{b}}a$.其中正确命题的序号是________.

7. 设 $a$、$b$、$c\in R$,则 $ac^2>bc^2$ 是 $a>b$ 的________条件.

8. 已知 $a$、$b\in R^+$,不等式$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$成立的充要条件是________.

## 三、解答题

1. 已知 $6\leqslant a\leqslant 10$, $\frac{a}{2}\leqslant b\leqslant 2a$, $c=a+b$,求 $c$ 的取值范围.

2. 设 $a>1, m>n$, $m、n\in N^*$. 试比较 $a^m+\frac{1}{a^m}$ 与 $a^n+\frac{1}{a^n}$ 的大小.

3. 对于实数 $a、b、c$, 试判断下列命题的真假.

(1)若 $a>b$,则 $ac>bc$;

(2)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$;

(3)若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$;

(4)若 $a<b<0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;

(5)若 $a<b<0$,则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$.

4. 实数 $a,b,c,d$ 满足条件:

$$\begin{cases} d>c & ① \\ a+b=c+d & ② \\ a+d<b+c & ③ \end{cases}$$

试将 $a,b,c,d$ 按照从小到大的顺序排列起来,并加以证明.

5. 若 $\frac{1}{a}<a<1$,试比较 $|1-a-a^2|$ 与 $a^2$ 的大小.

6. 设 $a、b$ 是不相等的正数, $A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$, $H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, $Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 试比较 $A、G、H、Q$ 的大小.

7. 设 $f(x)=ax^2+bx$, 且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $2\leqslant f(1)\leqslant 4$. 求 $f(-2)$ 的取值范围.

8. 已知 $f(x)=|\lg x|$, $a$, $b$ 是满足 $f(a)=f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 的实数,其中 $0<a<b$. 求证:

(1) $a<1<b$;

(2) $2<4b-b^2<3$.

# 单元测试卷二 均值不等式

学校__________ 班级__________ 姓名__________ 等级__________

## 一、选择题

1. 已知函数：① $y=x+\frac{1}{x}$；② $y=\cos x+\frac{4}{\cos x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$；③ $y=\frac{1}{3}\left(x^2+8x+\frac{8}{x^3}\right)(x>0)$；④$y=(1+\cot x)\left(\frac{1}{2}+2\tan x\right)\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.其中以 4 为最小值的函数的个数是 （　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

2. 设 $m+n=1$ 且 $m>n>0$,则四个数$\frac{1}{2}$, $m$, $2mn$, $m^2+n^2$ 中最大的是 （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $m$　　C. $2mn$　　D. $m^2+n^2$

3. 实数 $x$, $y$ 满足 $x+2y=4$, 则 $3^x+9^y$ 的最小值为 （　　）

A.18　　B.12　　C.$2\sqrt{3}$　　D.$4\sqrt[4]{3}$

4. 若 $x>0$, $y>0$, 且$\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=1$, 则 $xy$ 有(　　)

A. 最大值 64　　B. 最小值$\frac{1}{64}$　　C. 最小值 64　　D. 最大值$\frac{1}{64}$

5. 设 $x$ 是实数,且满足$\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=\cos\theta$,则实数 $\theta$ 等于(以下各式中 $k\in Z$) （　　）

A. $2k\pi$　　B. $(2k+1)\pi$　　C. $k\pi$　　D. $k\pi+\frac{\pi}{2}$

6. 某种商品计划再次提价,有甲、乙、丙三种提价方案,如图表所示,其中 $p>q>0$:

| 方案 \ 次 | 第一次提价 | 第二次提价 |
| --- | --- | --- |
| 甲 | $p\%$ | $q\%$ |
| 乙 | $q\%$ | $p\%$ |
| 丙 | $\frac{p+q}{2}\%$ | $\frac{p+q}{2}\%$ |

经两次提价后,哪种方案的提价幅度较大? （　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 一样大

7. 已知 $a>b>0$, 则下列不等式成立的是(　　)

A. $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　　B. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

C. $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　D. $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$



注意事项

一、学生要写清校名、班级、姓名

二、仔细审题，认真解答。

三、字迹清楚，卷面整洁。


8. 若 $a$、$b$、$c\in R$,且 $ab+bc+ca=1$,则下列不等式中成立的是 ( )

A. $a^2+b^2+c^2\geqslant 2$ B. $(a+b+c)^2\geqslant 3$

C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2\sqrt{3}$ D. $a+b+c\leqslant\sqrt{3}$

9. $a$、$b\in R^+$,记 $P=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$,$Q=\sqrt{a+b}$,则 $P$、$Q$ 的大小关系是 ( )

A. $P>Q$ B. $P<Q$ C. $P\geqslant Q$ D. $P\leqslant Q$

10. 若 $x>0$,则 $3-3x-\frac{1}{x}$ 的最大值是 ( )

A. 3 B. $3-2\sqrt{2}$ C. $3-2\sqrt{3}$ D. $-1$

11. 若 $a>b>1$,$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,$R=\lg\frac{a+b}{2}$,则 $P$、$Q$、$R$ 的大小关系是 ( )

A. $R<P<Q$ B. $P<Q<R$ C. $Q<P<R$ D. $P<R<Q$

12. 若 $a$,$b\in R^+$,且 $a+b\leqslant 4$,则下列不等式中恒成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 1$ C. $\sqrt{ab}\geqslant 2$ D. $\frac{1}{ab}\geqslant 2$

13. $R_1$、$R_2$ 是阻值不同的两个电阻,现分别按 $a$ 和 $b$ 连接,设相应的总阻值分别为 $R_A$ 和 $R_B$,则 $R_A$ 和 $R_B$ 的大小关系是 ( )

A. $R_A>R_B$ B. $R_A=R_B$ C. $R_A<R_B$ D. 不确定

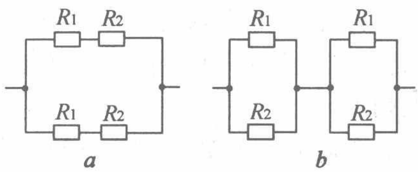



图 1

14. 设 $a>b>c$,若 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$ 恒成立,则 $n$ 的最大值为 ( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

15. 设 $a$,$b$,$c\in R^+$,且 $a+b+c=1$,若 $M=\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$,则必有 ( )

A. $0\leqslant M<\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{8}\leqslant M<1$ C. $1\leqslant M<8$ D. $M\geqslant 8$

## 二、填空题

1. 若 $\lg x+\lg y=2$,则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为__________.

2. 设 $x>\frac{1}{2}$,则函数 $y=x+\frac{8}{2x-1}$ 的最小值为__________.

3. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$,则函数 $y=\sin x\cdot\cos^2 x$ 的最大值为__________.

4. 设 $a>0,b>0$,则下面两式的大小关系为 $2\lg(1+\sqrt{ab})$__________ $\lg(1+a)+\lg(1+b)$.

5. 若不等式 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ 成立,则 $a$、$b$ 必须且只需满足的条件是__________.

6. 若正数 $a$、$b$ 满足 $ab=a+b+3$,则 $ab$ 的取值范围是__________.

7. 设 $a,b,c\in R^+$, $a+b+c=1$,则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值为__________.

8. 已知实数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=0$ 且 $abc>0$,设 $T=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,则 $T$ 与 0 的大小关系是__________.

## 三、解答题

1. 已知 $a$、$b$ 是正实数,$a+b=1$.求证:$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

2. 求下列最值:

(1)已知 $x<\frac{5}{4}$,求函数 $y=4x-1+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值;

(2)已知 $x$, $y\in R^+$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,求 $x+y$ 的最小值;

(3)设 $0<\theta<\pi$,求函数 $y=(1+\cos\theta)\sin\frac{\theta}{2}$ 的最大值.

3. 从边长为 $2a$ 的正方形纸片的四角各剪去一小块边长为 $x$ $(0<x<a)$ 的正方形后再折成一个无盖的盒子,则 $x$ 为何值时,盒子的容积最大?求容积的最大值.

4. 如图 2,某农场要修建 3 个矩形养鱼塘,每个为 10000 平方米,鱼塘前面要留 4 米宽的运料通道,其余各边为 2 米宽的堤埂.问每个鱼塘的长、宽各为多少米时,占地总面积最少?

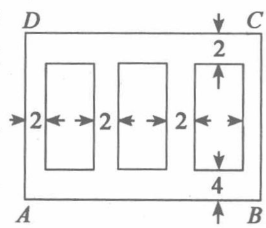


图 2

5. 如图 3 所示,为处理含有某种杂质的污水要制造一底宽为 2m 的无盖长方体沉淀箱.污水从 $A$ 孔流入,经沉淀后,从 $B$ 孔流出.设箱体的长度为 $a$ 米,高度为 $b$ 米.已知流出的水中该杂质的质量分数与 $a$、$b$ 的乘积 $ab$ 成反比.现有制箱材料 $60\text{m}^2$.问当 $a$、$b$ 各为多少米时,经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小?($A$、$B$ 孔的面积忽略不计).

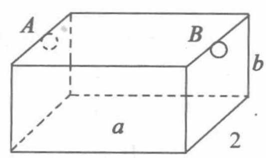


图 3

6. 某单位决定投资 3200 元建一简易仓库(长方体状),高度恒定,它的后墙不花钱,正面用铁栅,每米长造价 40 元,两侧墙用砖砌,每米长造价 45 元,顶部每平方米造价 20 元.试计算:

(1)仓库底面积 $S$ 的最大允许值是多少?

(2)为使 $S$ 达到最大,而实际投资又不超过预算,那么正面铁栅应设计多长?

# 单元测试卷三　不等式的证明

学校__________班级__________姓名__________等级__________

## 一、选择题

1. 已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，$P=\log_a(a^2-a+1)$，$Q=\log_a(a^3-a+1)$，则 $P$、$Q$ 的大小关系是　（　）

A. $P>Q$　　B. $P<Q$　　C. $P=Q$　　D. 不确定

2. 若 $a<b<c$，$x<y<z$，则下列四个式子中：

①$ax+by+cz$；　②$ax+cy+bz$；　③$bx+ay+cz$；　④$cx+by+az$.

其中值最大的是　（　）

A.①　　B.②　　C.③　　D.④

3. 若 $x>0,y>0$.且$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$成立，则 $a$ 的最小值为　（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知 $p=a^2+b^2$，$q=2(a+b-1)$，则下面说法正确的是　（　）

A. $p$ 恒大于 $q$　　B. 当 $a>0$ 且 $b>0$ 时，$p>q$

C. $p$ 与 $q$ 不可能相等　　D. 当 $a$ 与 $b$ 不同时等于 1 时，$p>q$

5. $a$、$b$ 为不相等的正数，$k\in N^*$，则$(ab^k+a^kb)-(a^{k+1}+b^{k+1})$的符号为　（　）

A. 恒正　　B. 与 $a$、$b$ 的大小有关

C. 恒负　　D. 与 $k$ 的奇偶有关

6. 设 $0<x<1$，则 $a=\sqrt{2x}$，$b=1+x$，$c=\dfrac{1}{1-x}$中最大的一个是　（　）

A. $a$　　B. $b$　　C. $c$　　D. 不确定

7. 设 $a,b,c,d,m,n$ 都是正数，$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{n}}$，则必有　（　）

A. $P\leqslant Q$　　B. $P\geqslant Q$　　C. $P=Q$　　D. 不确定

8. 设 $a,b,m$ 都是正数，且 $a<b$，则下列不等式中恒不成立的是　（　）

A. $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+m}{b+m}<1$　B. $\dfrac{a}{b}\geqslant\dfrac{a+m}{b+m}$　C. $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a+m}{b+m}\leqslant 1$　D. $1<\dfrac{b+m}{a+m}<\dfrac{b}{a}$

9. 设 $\alpha$、$\beta$、$\alpha+\beta$ 均为锐角，且 $P=\sin\alpha+\sin\beta$，$Q=\cos\alpha+\cos\beta$，$R=\sin(\alpha+\beta)$，则 $P$、$Q$、$R$ 的大小关系为　（　）

A. $P<Q<R$　　B. $R<P<Q$　　C. $P>Q>R$　　D. $R>P>Q$

10. 已知 $a,b,c$ 都是正数，则三个数 $a+\dfrac{1}{b}$；$b+\dfrac{1}{c}$；$c+\dfrac{1}{a}$　（　）

注意事项　一、学生要写清校名、班级、姓名　二、仔细审题，认真解答。　三、字迹清楚，卷面整洁。

A. 都不大于 2　　B. 都不小于 2
C. 至少有一个不大于 2　　D. 至少有一个不小于 2

11. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>0$，$S_n$ 是其前 $n$ 项的和，则　　(　　)

A. $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$　　B. $S_nS_{n+2}\leqslant S_{n+1}^2$　　C. $S_nS_{n+2}>S_{n+1}^2$　　D. $S_nS_{n+2}\geqslant S_{n+1}^2$

12. 下列不等式中，错误的是　　(　　)

A. 若 $x,y,z\in R^+$，则 $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 3$　　B. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$

C. $\lg x+\log_x 10\geqslant 2$　　D. $a\in R^+$，$(1+a)\left(1+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4$

13. 若 $a\geqslant 2$，$b\geqslant 2$，则有　　(　　)

A. $ab\geqslant a+b$　　B. $ab\leqslant a+b$　　C. $ab>a+b$　　D. $ab<a+b$

14. 设 $a,b\in R^+$，且 $a\neq b$，则下列不等式中，正确的是　　(　　)

A. $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　B. $\frac{a+b}{2}>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\sqrt{ab}$

C. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

15. 若 $P=\sqrt{a}+\sqrt{a+7}$，$Q=\sqrt{a+3}+\sqrt{a+4}$，$(a\geqslant 0)$，则 $P$、$Q$ 的大小关系是
(　　)

A. $P<Q$　　B. $P=Q$　　C. $P>Q$　　D. 不确定

16. 设 $a$ 是互异三个正数 $a$，$b$，$c$ 中的最大数，且 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系是　　(　　)

A. $a+d<b+c$　　B. $a+d>b+c$　　C. $a+d=b+c$　　D. 无法确定

**二、填空题**

1. 实数 $x$，$y$ 满足 $\frac{x}{y}=x-y$，则 $x$ 的取值范围是____________.

2. 记 $A=\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}+1}+\frac{1}{2^{10}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{11}-1}$，则 $A$ 与 1 的大小关系是____________.

3. 设 $a,b,c\in R^+$，$a^2+b^2=c^2$. 则当 $n\geqslant 3$ 时，$a^n+b^n$ 与 $c^n$ 的大小关系是____________.

4. 已知 $a,b,c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边，且 $a^3+b^3+c^3=3abc$，则 $\triangle ABC$ 的形状是____________.

5. 已知 $x,y\in R$，且 $x^2-2xy+2y^2=2$，则 $|x+y|$ 的最大值是____________.

6. 设 $P=a^2b^2+5$，$Q=2ab-a^2-4a$，若 $P>Q$，则实数 $a,b$ 满足的条件是________.

7. 已知 $a,b$ 是正实数，则 $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ 与 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的大小关系是____________.

8. 已知 $a>b>c$，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=3$，则 $a$ 的取值范围是____________.

三、解答题

1. 设 $a+b>0$, $n$ 为正偶数. 试证明: $\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

2. 若 $a$、$b>0$, $2c>a+b$, 求证:

(1) $c^2>ab$;

(2) $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

3. 已知: $x_1+x_2+x_3>0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1>0$, $x_1x_2x_3>0$. 求证: $x_1$, $x_2$, $x_3$ 均大于0.

4. 设 $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$, 求证: $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

5. 某两个正数 $x$, $y$ 之间, 插入两个数 $a_1$, $a_2$, 使 $x$, $a_1$, $a_2$, $y$ 成等差数列; 另外插入两个数 $b_1$, $b_2$, 使 $x$, $b_1$, $b_2$, $y$ 成等比数列. 求证: $(\sqrt{b_1b_2}+1)^2\leqslant(a_1+1)(a_2+1)$.

6. 如果 $|a|\leqslant1$, $|b|\leqslant1$, 求证:

$|ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}|\leqslant1$.



阿格兰德(德国)

# 单元测试卷四　不等式的解法

学校__________ 班级__________ 姓名__________ 等级__________

## 一、选择题

1. 关于 $x$ 的不等式 $ax^2+ax+a-1<0$ 的解集为 $R$,则 $a$ 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

C. $(-\infty,0]$　　D. $(-\infty,0]\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

2. 下列各组不等式中同解的是　(　　)

A. $\frac{x^2-2x}{x-1}<\frac{3}{x-1}$ 与 $x^2-2x<3$　　B. $x+\frac{1}{x^2-3x+2}<5+\frac{1}{x^2-3x+2}$ 与 $x<5$

C. $\frac{(x-3)(x+1)}{x+1}>0$ 与 $x-3>0$　　D. $\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}>0$ 与 $x+1>0$

3. 不等式 $(x^2-2x-3)(x^2-4x+4)<0$ 的解集为　(　　)

A. $\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$　　B. $\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$

C. $\{x|-1<x<3\}$　　D. $\{x|-1<x<2$ 或 $2<x<3\}$

4. 已知不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$,则不等式 $\frac{x^2+px+q}{x^2-5x-6}>0$ 的解集为　(　　)

A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|x<-1$ 或 $1<x<2$ 或 $x>6\}$

C. $\{x|-1<x<1$ 或 $2<x<6\}$　　D. $\{x|x<-1$ 或 $x>6\}$

5. 不等式 $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geqslant 0$ 的解集为　(　　)

A. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|-\sqrt{3}\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 2\}$

C. $\{x|-2\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|-\sqrt{3}\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant\sqrt{3}\}$

6. 若使不等式 $x^2-4x+3<0$ 和 $x^2-6x+8<0$ 同时成立的 $x$ 值,使得关于 $x$ 的不等式 $2x^2-9x+a<0$ 也成立,则　(　　)

A. $a>9$　　B. $a=9$　　C. $a\leqslant 9$　　D. $0<a\leqslant 9$

7. 已知集合 $M=\{x|2^{2x^2}<2^{3x}\}$, $N=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>0\}$,则 $M\cap N=$　(　　)

A. $\left(0,\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},2\right)$　　C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $(0,1)$

8. 不等式 $\sqrt{1-x^2}<x+1$ 的解集是　(　　)

A. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|x>0\}$　　C. $\{x|x>-1\}$　　D. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

9. 设 $a>0$, $b>0$,则关于 $x$ 的不等式 $a>\frac{1}{x}>-b$ 的解集为　(　　)

注意事项　一、学生要写清校名、班级、姓名　二、仔细审题，认真解答。　三、字迹清楚，卷面整洁。

A. $\left\{x \mid -\frac{1}{b}<x<0 \text{ 或 } 0<x<\frac{1}{a}\right\}$　　B. $\left\{x \mid -\frac{1}{a}<x<0 \text{ 或 } 0<x<\frac{1}{b}\right\}$

C. $\left\{x \mid x<-\frac{1}{b} \text{ 或 } x>\frac{1}{a}\right\}$　　D. $\left\{x \mid -\frac{1}{a}<x<\frac{1}{a}\right\}$

10. 若不等式$\frac{x+a}{x^2+4x+3}\geqslant 0$的解集为$\{x \mid -3<x<-1 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$,则 $a$ 的值为（　　）

A. 2　　B. $-2$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

11. 若不等式 $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1<0$ 的解集是$\left\{x \mid a<x<\frac{1}{a}\right\}$, 则 $a$ 的取值范围是（　　）

A. $0<a<1$　　B. $0<a<1$ 或 $a<-1$

C. $a<-1$　　D. $a>0$

12. 已知 $\log_a(a^2+1)<\log_a 2a<0$, 则 $a$ 的取值范围为（　　）

A. $0<a<1$　　B. $\frac{1}{2}<a<1$

C. $0<a<\frac{1}{2}$　　D. $a>0$ 且 $a\neq 1$

13. 不等式 $\log_2\frac{2x+1}{1-2x}<1$ 的解集是（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{6}\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$

14. 不等式$\sqrt{x^2-5x+6}>x-1$ 的解集是（　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $\left[1,\frac{5}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$

15. 不等式 $\lg(-x-3)+\lg(-x)<1$ 的解集是（　　）

A. $(-5,2)$　　B. $(-5,-3)$　　C. $(-5,0)$　　D. $(-2,5)$

## 二、填空题

1. 设集合 $A=\left\{x \mid x\geqslant\frac{1}{x}\right\}$, $B=\{x \mid \sqrt{2x+1}<3\}$, 则 $A\cap B=$__________.

2. 不等式组$\begin{cases}2^{x^2+7x+6}<1\\ \log_{x^2}(6-5x)>1\end{cases}$的解集是__________.

3. 不等式 $x(x-1)(x-2)^2(x^2-1)(x^3-1)>0$ 的解集为__________.

4. 已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x \mid \alpha<x<\beta\}$,$(0<\alpha<\beta)$, 则不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集为__________.

5. 不等式 $\log_2(4+3x-x^2)-\log_2(2x-1)>1$ 的解集为__________.

6. 已知 $M=\{x \mid 3-x\geqslant\sqrt{x-1}\}$, $N=\{x \mid x^2-(a+1)x+a\leqslant 0\}$, 当 $M\subset N$ 时,实数 $a$ 的取值范围为__________.

7. 若不等式 $ax^2+4x+a>1-2x^2$ 对任意实数 $x$ 均成立,则实数 $a$ 的取值范围为__________.

8. 设 $A=\{x\mid x^2+4x+p<0\}$，$B=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，若 $A\subset B$，则 $p$ 的取值范围是____________.

## 三、解答题

1. 解下列各不等式：

(1)$\sqrt{3x-x^2-2}>4-3x$；

(2)$\dfrac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}\geqslant 3$；

(3)$\dfrac{a(x-1)}{x-2}>1(a>0)$

2. 设对所有实数 $x$，不等式

$x^2\cdot\log_2\dfrac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\dfrac{2a}{a+1}+\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}>0$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围.

3. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

(2)求 $a$ 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

4. 设 $A=\{x\mid 5-x\geqslant\sqrt{2(x-1)}\}$，$B=\{x\mid x^2-ax\leqslant x-a\}$，而 $A\supset B$，求实数 $a$ 的取值范围.

5. 若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $|m|\leqslant 2$ 的所有 $m$ 都成立，求 $x$ 的取值范围.

6. 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-2x+2}{1+2ax}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2)求使 $f(x)>0$ 的所有 $x$ 的集合.