



理工类本科生

21世纪高等学校数学系列教材

(第二版)

数学文化赏析

■ 主 编 邹庭荣 夏静波

■ 副主编 沈婧芳 胡动刚



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

(第二版)

数学文化赏析

■ 主 编 邹庭荣 夏静波

■ 副主编 沈婧芳 胡动刚

■ 参 编 孙玲琍 李 燕 李娜娜 杨亚敏



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学文化赏析/邹庭荣,夏静波主编;沈婧芳,胡动刚副主编. —2版. —武汉:武汉大学出版社,2013.2

21世纪高等学校数学系列教材

理工类本科生

ISBN 978-7-307-10417-4

I. 数… II. ①邹… ②夏… ③沈… ④胡… III. 数学—文化—高等学校—教材 IV. 01-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第013939号

责任编辑:李汉保 责任校对:王 建 版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北省荆州市今印印务有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:15.5 字数:371千字 插页:1

版次:2007年11月第1版 2013年2月第2版

2013年2月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-307-10417-4/O·486 定价:24.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

21 世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

主 任	羿旭明	武汉大学数学与统计学院，副院长，教授
副 主 任	何 穗	华中师范大学数学与统计学院，副院长，教授
	蹇 明	华中科技大学数学学院，副院长，教授
	曾祥金	武汉理工大学理学院，数学系主任，教授、博导
	李玉华	云南师范大学数学学院，副院长，教授
	杨文茂	仰恩大学（福建泉州），教授
编 委	（按姓氏笔画为序）	
	王绍恒	重庆三峡学院数学与计算机学院，教研室主任，副教授
	叶牡才	中国地质大学（武汉）数理学院，教授
	叶子祥	武汉科技学院东湖校区，副教授
	刘 俊	曲靖师范学院数学系，系主任，教授
	全惠云	湖南师范大学数学与计算机学院，系主任，教授
	何 斌	红河师范学院数学系，副院长，教授
	李学峰	仰恩大学（福建泉州），副教授
	李逢高	湖北工业大学理学院，副教授
	杨柱元	云南民族大学数学与计算机学院，院长，教授
	杨汉春	云南大学数学与统计学院，数学系主任，教授
	杨泽恒	大理学院数学系，系主任，教授
	张金玲	襄樊学院，讲师
	张惠丽	昆明学院数学系，系副主任，副教授
	陈圣滔	长江大学数学系，教授
	邹庭荣	华中农业大学理学院，教授
	吴又胜	咸宁学院数学系，系副主任，副教授
	肖建海	孝感学院数学系，系主任
	沈远彤	中国地质大学（武汉）数理学院，教授
	欧贵兵	武汉科技学院理学院，副教授
	赵喜林	武汉科技大学理学院，副教授
	徐荣聪	福州大学数学与计算机学院，副院长
	高遵海	武汉工业学院数理系，副教授

梁 林	楚雄师范学院数学系，系主任，副教授
梅汇海	湖北第二师范学院数学系，副主任
熊新斌	华中科技大学数学学院，副教授
蔡光程	昆明理工大学理学院数学系，系主任，教授
蔡炯辉	玉溪师范学院数学系，系副主任，副教授
执行编委 李汉保	武汉大学出版社，副编审
黄金文	武汉大学出版社，副编审

内 容 简 介

本书系统地介绍了数学文化的起源，数论与数学文化，毕达哥拉斯定理，勾股定理，斐波纳契数列与黄金比，幻方文化，数学问题、数学猜想与数学发展，数学悖论，变量数学的产生与发展，中国古代数学文化，欧拉与哥尼斯堡七桥问题，分形几何欣赏等。

本书是为高等学校各专业本科生素质教育通识课而编写的教材，兼通俗性、趣味性及知识性于一体，对于中学生也不失为一部素质训练的好教材，也可以供高等学校数学教师、中学数学教师以及数学爱好者参考。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套 21 世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等 20 余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力，武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

第二版前言

本书第一版于2007年在武汉大学出版社出版，第一版的书名为《数学文化欣赏》，在作者提出本书再版的意向时，本书责任编辑，我的同学李汉保同志提议将书名改为《数学文化赏析》，我也认为“数学文化赏析”的叫法更贴切，所以就欣然接受了。

本书第一版出版至今得到许多读者和朋友的关心和支持，许多读者来信还提出了许多非常好的意见和建议，尤其是云南大学的张大中老先生，他几乎是逐字逐句地阅读了本书，提出的许多建设性意见和建议，多数意见已经在第二版中有所体现。在此对张先生及所有关心本书的读者表示感谢！

这次修订再版在保持第一版“通俗性、趣味性、知识性于一体”特色的同时，相对于第一版有下列变化：

1. 根据读者的意见和建议对相关内容作了修改。
2. 增加了几位作者，他们都是我校数学文化团队的主要成员，这些成员在该课程讲授及本书修订再版过程中，做了许多建设工作。
3. 在每一章后面增加了适量的复习与思考题，供读者阅读时参考。
4. 在本书的最后增加了一个附录：数学与建筑艺术——分析世界著名建筑中的数学思想与数学元素。这部分内容是根据2012年在南京举行的第二届数学文化论坛上作者所作的大会报告整理而成。

2012年8月，作者应中国数学会严加安院士的邀请，在“第二届数学文化论坛”上作了45分钟特邀大会报告，在作此报告之前，花了比较多的精力查阅资料，收集材料。报告的效果比较好，尤其是许多与会代表对报告很感兴趣（有的还拷贝了PPT），所以让作者觉得这些材料可能对读者有用，正赶上本书修订再版，故借本书第二版出版之际，将其部分内容整理并作为附录一并出版。

武汉大学出版社的李汉保编辑为本书第二版的出版付出了辛勤的劳动，使得本书得以顺利出版，在此深表感谢！

作 者

2012年9月

前 言

从书名就可以知道，展现在读者面前的不是一部数学作品，而是一部文化作品。当然，本书以数学为背景，因此要涉及数学。我们是从欣赏的角度去介绍数学。不仅要使本书易于理解，更重要的是如何品味它、欣赏它，亦即从文化的角度看待它。

之前，作者曾给大学生作过“数学美学欣赏”和“数学文化欣赏”两场报告，均受到热烈欢迎，反应很强烈。从那时起，作者就萌生了开设数学文化课的念头。只是由于缺乏资料可以借鉴，更由于“数学文化”仍是一个有待于深入研究的课题，连名称也有争议，空有想法而已。而今，许多高校都开设了《数学文化》选修课，据说效果很佳。这也坚定了作者在本校开设这门课的决心，把这门课取名为《数学文化欣赏》，是源于那两次讲座的缘故。一是同学们习惯这个名称；二是希望同学们从欣赏的角度去看待数学文化，看待数学文化的美。

说到数学文化，不过是为了强调而已。其实，数学本身就是一种文化，上海教育出版社的叶中豪先生认为：“数学是一种文化，而文化就是要被继承的东西。事实也确实如此：世界上的语言、文字、宗教等都有地域之分，但世界上只有一种数学，数学定理又能万世流传。”按叶中豪先生的说法，数学确实是最具有文化特征的了。

本书是为大学生素质教育通识课而编写的教材，兼通俗性、趣味性、知识性于一体；对于中学生也不失为一部素质训练的好教材或课外读物，对大学、中学数学教师以及数学爱好者也是一部好的教学参考书。我们希望通过本书，能达到下列目的：

- 给读者一个睿智的数学头脑，丰富他们理性思考世界的方式；
- 给读者一个好奇的广阔心胸，点燃他们强烈盼望求知的欲望；
- 给读者一个全新的研究模式，指引他们探索世界奥秘的途径；
- 给读者一个交叉的学科空间，带领他们寻求发明创造的乐土。

在成书过程中，作者参考了许多相关资料，也得到一些朋友的帮助和鼓励，有的同志甚至提议让作者尽快出版此书，提出了许多有益的建议，还提供了部分资料，在此谨向各位表示由衷的感谢！武汉大学出版社的李汉保同志为出版此书付出了辛勤的劳动，使本书得以顺利出版，在此一并致谢！同时，由于作者水平有限以及限于篇幅，您会觉得有些感兴趣的内容没有写进来，疏漏之处，作者期待广大读者批评指正。

作 者

2007 年 8 月

目 录

第 1 章 概论	1
§ 1.1 关于数学文化	1
§ 1.2 数学与数学教育	5
§ 1.3 数学分支巡礼	9
§ 1.4 数学建模与数学建模竞赛	19
第 2 章 数论与数学文化	24
§ 2.1 数论预备知识简介	24
§ 2.2 数字美学欣赏	25
§ 2.3 再叙数论——数学之皇后	37
第 3 章 毕达哥拉斯与勾股定理	40
§ 3.1 勾股定理	40
§ 3.2 古希腊数学与人类文明	47
§ 3.3 附录	57
第 4 章 斐波纳契数列与黄金比	62
§ 4.1 斐波纳契数列	62
§ 4.2 黄金分割(黄金比,黄金数)	67
§ 4.3 连分数及其应用	71
第 5 章 幻方文化——数学文化的起源	75
§ 5.1 幻方基本知识	75
§ 5.2 妙趣横生的幻方	77
§ 5.3 幻方的应用	89
§ 5.4 附录	90
第 6 章 数学问题、数学猜想与数学发展	94
§ 6.1 关于数学猜想	94
§ 6.2 哥德巴赫猜想	98
§ 6.3 费尔马大定理(费尔马最后定理)	99
§ 6.4 地图上的数学文化	104

§ 6.5 世纪数学问题欣赏	106
§ 6.6 附录	110
第7章 数学悖论——从不和谐到和谐	117
§ 7.1 数学的和谐	117
§ 7.2 数学悖论	118
§ 7.3 数学大厦基础上的裂缝——三次数学危机	121
§ 7.4 数学哲学	126
§ 7.5 附录	129
第8章 变量数学的产生与发展	135
§ 8.1 笛卡儿和费尔马的解析几何思想	135
§ 8.2 微积分的创立与发展	140
§ 8.3 再说牛顿	150
第9章 中国古代数学文化	154
§ 9.1 《九章算术》及其文化内涵	154
§ 9.2 贾宪三角及其美学意义	159
§ 9.3 《算经十书》之文化内涵	163
§ 9.4 附录	168
第10章 走出来的数学文化	178
§ 10.1 七桥问题与拓扑学	178
§ 10.2 欧拉回路与中国邮递员问题	182
§ 10.3 读读欧拉	184
§ 10.4 附录	188
第11章 分形艺术欣赏	191
§ 11.1 从数学怪物谈起	191
§ 11.2 分形几何学	196
§ 11.3 分形艺术欣赏	198
§ 11.4 分形理论在经济研究中的应用及优势	202
附录:数学与建筑艺术——分析世界著名建筑中的数学思想与数学元素	205
参考文献	235

第1章 概 论

§ 1.1 关于数学文化

1.1.1 数学文化的内涵

1. 文化的含义

文化问题是随着 19 世纪下半叶人类学、社会学、文化学等学科的兴起才受到人们的重视的。1871 年泰勒在《原始文化》一书中提出了文化的经典定义：“所谓文化或文明，就其广泛的民族学意义来说，乃是知识、信仰、艺术、道德、法律、习俗和任何人作为一名社会成员而获得的能力和习惯在内的复杂整体。”现在的文化定义也许有上百种。一般来说，文化有广义和狭义之分。广义的文化，是与自然相对的概念，它是指通过人的活动对自然状态的变革而创造的成果，即一切非自然的，由人类所创造的事物或对象看成文化；狭义的文化，则是指社会意识形态或观念形态，即人们的精神生活领域。

2. 数学文化的含义

(1) 数学是一种文化。

数学是一种文化的观点，可以说是数学观的“现在时态”。但若是因为数学与宗教有关，数学像哲学，数学与逻辑是孪生姐妹，数学美具有艺术美的特征等原故，而给数学贴上文化的标签，这未免太牵强附会了。

那么我们从历史的角度来看：考察人类文明史，数学与文化曾有过三次结合紧密的鼎盛时期，第一次是以毕达哥拉斯(Pythagoras)学派为代表的古希腊时期；第二次是以达·芬奇(Da Vinci)为代表的欧洲文艺复兴时期；第三次是 20 世纪中叶以来，随着科学一体化，系统化即大科学时代的到来和全球文化讨论热，数学与文化的关系受到人们相当的关注。然而，如果据此把数学说成是一种文化，还未免有点牵强，我们必须从数学这门学科自身的特点方面阐释论证。

数学作为一种量化模式，显然是描述客观世界的，相对于认识的主体而言，数学具有明显的客观性，但数学对象终究不是物质世界中的真实存在，而是抽象思维的产物，数学是一种人为的约定的规则系统。为了描绘世界，数学家总是在发明新的描述形式。同时数学家发明的量化模式，除了在科学技术方面的应用外，同样具有精神领域的效用。如平时所说的推理意识、规划意识、抽象意识、数学审美意识。由此可见，数学就是一种文化。

数学是一门自然科学，也是一种文化。但数学文化不同于艺术、技术一类的文化，数学属于科学文化的范畴。数学是人类文化系统中的一个系统，是人类文化的一个有机组成部分，与其他各种成分密切相关，并在相互影响中共同发展。特别地，数学对象并非自然

世界的真实存在,而是抽象思维的产物,是一种人为约定的逻辑建构系统.因此,数学对象正是作为文化而存在,是一种文化,一种特殊的文化,称之为“数学文化”.

(2) 数学文化的含义.

数学文化的提法与过去的“数学与文化”不同,“数学与文化”意味着数学和文化是两回事,数学是数学,文化是文化,重点是讨论它们的相互关系问题,而“数学文化”则强调的是数学与文化是一个有机整体,不能把它们分开来谈.

数学文化,笼统地说,就是指从文化这样一个特殊的视角对数学所作的分析.关于数学文化的详细定义,就存在许多不同的观点.

数学家齐民友先生在《数学与文化》一书中从非欧几何产生的历史阐述了数学文化的价值,指出了数学思维的文化意义.他说:“数学作为文化的一部分,其最根本的特征是它表达了一种探索精神.数学作为文化的一部分,其永恒的主题是‘认识宇宙,也认识人类自己’,在这个探索过程中,数学把理性思维的力量发挥得淋漓尽致.它提供了一种思维的方法与模式,提供了一种最有力的工具,提供了一种思维合理性的标准,给人类思想解放打开了道路.”齐民友先生深刻指出:“没有现代的数学就不会有现代的文化.没有现代数学的文化是注定要衰落的.”“一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的.”

张楚廷先生在《数学文化》一书中从广义文化学的角度阐释数学文化:一般地讲,“文化即人类创造的物质文明和精神文明.数学则既是人类精神文明又是物质文明的产物,尤其要关注到,数学是人类精神文明的硕果,数学不仅闪耀着人类智慧的光芒,而且数学也最充分地体现了人类为真理而孜孜以求乃至奋不顾身的精神,以及对美和善的追求.”他指出把数学作为一种文化的数学教育功能是多方面的,数学教育不仅可以使人变得更富有知识、更聪明,而且可以使人更高大、更高尚、变善、变美.

郑毓信先生在他的论著《数学文化学》一书中阐述:“由于在现代社会中数学家显然构成了一个特殊的群体(可以称为‘数学共同体’),并有着相对稳定的数学传统.”因此,我们也就可以在所论意义上说,数学是一种文化.即指数学家的“行为方式”,或者说,即指特定的数学传统.他还指出:“数学作为文化的特殊性在于数学对象的形式建构性与数学世界的无限丰富性和秩序性”.

以上关于数学文化的三种解释,前两种倾向于强调数学文化发展的历史性,最后一种则强调了数学活动的整体性,数学共同体和数学传统正是表现了数学文化的整体性.他们都从不同层面揭示了数学的文化本质.

总之,数学文化作为人类基本的文化活动之一与人类整体文化血肉相连.在现代意义下,数学文化作为一种基本的文化形态应属于科学文化的范畴.

1.1.2 数学文化的特点

由文化的定义与数学的特点可知:数学文化是人类文化中的一个相对独立的子文化系统,区别于其他文化.数学文化有以下特点:

1. 独特的研究对象

数学是关于量的科学,而所有文化均离不开量.由此可知,数学的研究对象十分广泛.哲学的十大范畴,均有相应的数学研究,如原因与结果,数理逻辑方法;局部与整

体, 拓扑方法; 可能与现实, 控制论方法, 等等. 不仅如此, 逻辑学抽象思维, 形象思维, 直觉思维等均在数学文化的研究范畴之内, 甚至, 人类自身的思维能力(思维限度与思维可靠性)也成为数学的研究对象.

2. 独特的研究方法

数学研究对象的广泛性与独特性决定了数学研究方法的广泛与独特. 数学的高度抽象性是连物理学也无法相比较的. 又如数学模拟, 数学实验, 公理化方法等, 都足以说明数学方法的广泛性.

3. 独特的数学语言

数学语言是世界语, 是科学通用语, 是可以传授给机器人的一种语言. 数学语言的特点是形式化、精确、逻辑严谨和应用广泛.

4. 独特的发展模式

如微积分模式: 直观原型式实际问题——数学问题——数学方法——数学理论体系.

5. 独特的价值评判标准

数学独特的价值评判标准体现在数学认识论的数学真理观中, 其结论是: 数学具有模式真理性与现实真理性.

1.1.3 数学文化的功能

数学文化的功能可以概括为以下4个方面:

1. 历史性

一谈到数学文化人们很自然地就会想到数学史. 数学发展的历史, 不但是一部文明史, 而且也是一部文化发展的史书.

人们对数学本质的认识, 从作为一种科学的数学, 到作为一种哲学的数学, 再到作为一种文化的数学, 这个变化过程与历史的发展是不能分割的. 无论是公元前600年以前的早期数学, 还是公元前600年到公元300年之间的古希腊数学, 作为一门有组织的、独立的和理性学科的数学, 不管它发展到怎样的程度, 都离不开历史的积淀过程, 即数学的社会历史性. 研究数学史, 可以增强全局观念, 提高人们的学习兴趣. 学习数学要讲究其方法, 而数学史又为数学方法论的研究提供了最主要的素材. 比如数学中“函数”这一概念在数学发展史上就经历了7次扩张, 在每一次扩张中, 随着科学的发展和社会的进步, 由于需要不断地扩大函数的范围, 直到形成今天严密、科学而又令人惊叹的广泛的函数概念. 因此, 一切与数学有关的研究, 无论怎样也不能丢开数学史. 数学传统的不断变革及数学知识的连续性, 就可以看成数学发展的一个重要特征.

2. 思维性

数学研究的任务, 主要是总结和应用人类关于现实世界的空间形式与数学关系的思维成果. 因此, 数学是思维的体现, 思维是数学的灵魂. 数学思维的素质有: 严谨性、灵活性、独创性、深刻性、目的性、概括性、主动性、批判性、论证性、条理性、简明性、敏捷性等.

数学文化的主体是数学知识以及运用这些知识的技巧与技能, 它们都要通过数学语言表示出来并获得理解、掌握、交流和应用. 数学语言包括文字语言、符号语言和图像语言, 它们同样拥有基本词汇、基本句型、基本句法和基本图形. 并且, 通过听、说、读、

写、译这5种形式来实现数学信息的吸收、输出和转换。与其他语言不同的是,运用数学语言时,人们进行的是关于实体的空间形式与数学关系的思维活动。这种思维成果以理性的逻辑思维为主,以所考察的实体为基础。在数学知识中,数学思想和数学方法是最活跃的成分,它们成为数学知识的精髓。所谓“掌握数学”,实际上就是“掌握基本的数学思想和数学方法”,即数学的思维。这种思维集中地凝聚了人类对空间形式与数学关系的规律性的认识,并且始终随着数学的发展而发展。

3. 预见性

数学来自实践,但数学主要总结与应用了人类关于现实世界的空间形式和数量关系的思维成果,因此,这种思维成果就带有开发性和预见性,也就是说,数学能指导、调控人类未来的实践活动。

例如,1846年9月18日,柏林天文台在黄经326度处的宝瓶座内黄道上,发现了海王星,其椭圆形轨道与位置完全符合勒威耶、亚当斯两人分别于1844年、1845年得到的计算结果。1847年,英国数学家、逻辑学家布尔和德·莫干两人创立了逻辑代数。当时谁也不知道逻辑代数有什么用途,谁能料到,自1946年第一台电子计算机问世后,逻辑代数竟成了自动化系统和计算机科学的奠基石!上述例子说明,数学作为一种科学可以有很大的贡献,同时数学也可以预见自身甚至别的科学的发展。

4. 审美性

数学内容充满着美感。数学既是一门纯科学,同时又是一门艺术。数学是美的王国,数学概念的简单性、统一性、协调性、对称性等都是数学美的内容。数学美的内容是丰富的,不仅有形式美、而且有严谨美;不仅是逻辑抽象美,而且是创造美和应用美。

早在公元前6世纪,毕达哥拉斯学派对数学在概念上就没有作严格的区分,他们提出了“美是和谐”的思想,把数与和谐的原则当做宇宙万物的根源,用数学和声学的观点去研究音乐的节奏与和谐。他们提出的“黄金分割”理论,将这些原则运用到建筑、绘画、音乐等各门艺术中。在那时,作为美学鼻祖的毕达哥拉斯学派本身就是一个数学家、物理学家、天文学家,同时又是艺术家的群体。在我国古代,数学也被融入了艺术之中,成为“礼、乐、射、御、书、数”六艺之一。数学的美感和数学的艺术特征,正是数学文化对人类高尚情操陶冶的具体表现。我们应该深入挖掘和精心提炼,从而使我们从数学的学习中去感觉美、理解美、鉴别美、创造美。

1.1.4 数学是人类文化中最重要的一种文化

1. 从内在结构看:数学是一个相对独立的系统

第一,数学是关于量的科学,数学研究为人类提供了通过量的分析来把握事物的可能性与现实性。同时,也造就了人类通过量来把握质的科学态度。

第二,数学理论是严密的演绎系统。对数学的研究养成了人类做事的有条理的习惯,同时也造就了人类逻辑推理与理性分析问题的能力,推动了人类智力的发展和理性的形成。推理手段是人类理解大自然的最重要的思维手段。智力是人类最重要的思维能力。心理学家通过实验得出:人的智力与人的推理能力相关系数达到0.89。这等于告诉人们数学是培养人智力的最好材料。数学素质是鉴别人智力素质的重要指标。难怪柏拉图说:不懂几何学的人不得入内。

第三,数学研究的原始动力源于现实,但纯数学早已远离了现实,“数学的本质在于自由”.数学的本质在于创造.今天,纯数学研究的动力主要来自于美,数学体系自身的完善需求与人的审美心理的需求推动着纯数学的发展.数学中蕴藏着无限丰富的美,对数学的研究促使了人的审美能力与创造能力的极大发展.

2. 从外在环境看:数学是一个开放体系

第一,数学语言是科学的语言;数学方法是科学的方法(逻辑方法,实验方法与计算机计算方法).数学是科学理论美的原因(形式美,结构美),科学因为数学而成为科学.

第二,数学——艺术美的重要原因之一.从艺术品与艺术方法定义美的原因.无论从音乐、诗歌、绘画、戏剧、雕塑、建筑等哪一方面看都会发现这一事实.如,电脑:一切归于0和1;舒心的声音、醉人的韵律、悦人的光泽、光滑的质地、美丽的形式、和谐的结构,无一不是数学.

第三,数学已渗透于人们日常生活的各个方面.试想在人们的政治、经济、文化、娱乐生活中,哪一样不与数学相关?

今天的数学,已经深入到生活的各个角落,数学不仅给人们带来了物质文明,也极大地影响了人们的思想、观念及生活方式,数学促成了现代的精神文明,促成了人类的自信,促成了人类对世界、对未来的希望.所以,人们可以毫不夸张地说,数学文化是人类诸文化中的最重要的一种文化.

§ 1.2 数学与数学教育

1.2.1 数学及其特点

1. 关于数学

人们在学习各种各样的科学知识,要理解抽象的科学概念,要记忆复杂的数学公式时,可能知道那些知识是怎样被创造出来的,那些概念和公式是如何被发现或被发明的;可能曾了解数学家们在与他的问题苦斗时的心路历程和精神状态以及在“山重水复疑无路”的困惑后,瞥见“柳暗花明又一村”美景时的惊奇与狂喜.

或许人们知道数学萌芽于一个不易为人察觉的漫长的历史过程,古往今来的世界数学恰如高山巍峨,大海浩瀚,在历史的长河中逐步形成了一种数学思想、数学精神,一部璀璨的数学文化,数学一直是形成现代文化的重要力量,同时又是这种文化的重要因素.

数学是人类最高超的智力成就,也是人类心灵最独特的创作,音乐能激发情怀,绘画能使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学能使人获得智慧,科学可以改变物质生活,而数学能给予以上的一切(克莱因).

人们也许喜欢音乐,因为音乐有优美和谐的旋律,人们或许喜欢图画,因为图画描绘人与自然的美;然而,人们应该更喜欢数学,因为数学像音乐一样和谐,像图画一样美,数学在更深的层次上,提示自然界和人类社会内在的旋律,用简洁的、漂亮的定理和公式描述世界的本质.

正因为如此,数学教育也受到人们极大的重视,从基础教育起,每个人都要学习数学,每个学生花费在数学学习上的时间应当是最多的.小学的两门主要课程是语文和数

学. 初中阶段, 数学和语文仍然是重点, 再加上一个数学奥林匹克竞赛, 义务教育结束之后, 无论是上中专、技校, 还是读高中, 数学是必修课. 到了大学, 以前学习文科的学生可以松一口气, 不愿学习数学的学生去学习文科, 把数学远远地抛在脑后, 只有学习理科的、工科的、经济的、农科的、医科的学生仍少不了学习数学, 但现在不一样了, 学习文科的学生也要学习数学. 国家教育部规定, 每个大学生都要学习数学, 有的到了硕士阶段、博士阶段仍然要学习数学, 这时是自发地去学习(无论文科、理科还是工科), 有的为了让发表的论文上档次, 去学习数学, 有的为了出国, 先进修数学, 如此种种, 这样, 在数学上花费的时间可能长达 20 多年. 这一切说明什么呢? 说明数学重要. 数学已作为一种文化渗透到人们的生活中, 数学教育成为人人关心的大事. 正因为如此, 数学教育的改革也成为人们、社会共同关注的问题.

2. 数学的特点

数学有四大特点: 第一是概念的抽象性, 第二是论证的精确性, 第三是应用的极其广泛性, 第四是结论的肯定性. 这些特点明显区别于其他学科. 当然, 抽象性不是数学独有的特点, 但数学的抽象又与其他学科的抽象具有明显的不同. 比如, 数学本身就是一个抽象概念. 说数学与别的学科抽象性不同, 是因为, 这里的抽象性有逻辑关系. 如整数的概念, 几何图形的概念等都属于原始的概念, 在原始的概念的基础上, 又形成有理数、无理数、复数、函数、微分、积分、 n 维向量空间以至无穷维空间等. 其抽象程度一层高于一层, 然而, 这些更高层的抽象概念, 仍有其非常现实的背景. 数学抽象有别于其他学科的另一两个原因是: 第一, 在数学的抽象中只保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切; 第二, 数学本身几乎完全周旋于抽象概念本身和它们相互关系的圈子中; 第三, 数学的抽象性还在于: 由于数学所研究的“形”和“数”与现实世界中的物质内涵没有直接联系. 例如 $1+1=2$, 可以是 1 个苹果加 1 个苹果等于 2 个苹果, 也可以是 1 张桌子加 1 张桌子等于 2 张桌子. 一个球面既可以代表一个足球, 也可以代表一个乒乓球. 一元函数 $y=f(x)$ 的导数可以表示变速直线运动质点的瞬时速度, 也可以表示平面曲线的斜率, 还可以表示质量均匀分布细棒的密度等; 第四, 数学的抽象, 不仅仅表示在概念的抽象上, 甚至其思辨和研究都是抽象的, 如自然科学家为了证明自己的论断是正确的, 常常求助于实验, 但数学家证明只需推理和计算.

关于数学严密性的特点: 是指数学中的一切结论只有经过用可以接受的证明证实后才能认为是正确的. 在数学里只有“是”与“非”, 没有中间地带, 要说是就要给出证明, 说“不是”, 就要举出反例. 这个事实决定了数学家的思维与物理学家或其他工程技术专家的思维有所不同. 数学家海姆(D. T. Haimo)在《Experimentation and Conjecture are not enough》(实验与猜想是不够的)一文中风趣地说: “物理学家认为所有素数都是奇数, 他们得到这个结论的证据是, 3 是素数, 5 是素数, 7 是素数, 9 是实验错误, 11 是素数……证毕.”当然, 这话言过其实, 但实际中确有其人. 数年前, 我国有一位著名的自动控制专家, 中国科学院院士曾撰文宣传“哥德巴赫猜想不要再猜了”, 理由是他用计算机验算过, 每个大于或等于 6 的偶数都可以表示成两个素数之和, 并且分解式不是唯一的, 偶数越大, 分解式越多. 按照他的思维方式, 他的结论当然是对的. 如果说不对, 你能举出一个反例吗? 但数学家不这样想. 其实在哥德巴赫猜想提出之后, 已经有许多人验证过了, 正因为找不到反例, 所以才要证明这个猜想是正确的.